OPPGAVER FRA ABELS HJØRNE I DAGBLADET

SETT 21

DAG 1

1. En bonde skal sette opp et gjerde rundt et trekantet område med sider 20 m, 20 m og 30 m. Han planlegger å sette opp stolper med 5 meters avstand (langs gjerdet). Hvor mange stolper trenger han?

   A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

2. På en gård er det dobbelt så mange griser som kuer, og tre ganger så mange høner som griser. Kuene, grisene og hønene har til sammen 360 ben. Hvor høner er det på gården?

   A) 60 B) 72 C) 90 D) 120 E) 180

Løsninger:

1. *C*. Siden omkretsen på gjerdet er 70 meter, og han skal ha en stolpe for hver 5. meter, må han ha $\frac{70}{5} = 14$ stolper.

2. *C*. Hvis det er x kuer, så er det $2x$ griser og $6x$ høner. Disse dyrene har til sammen $4x + 8x + 12x = 24x$ ben. $24x = 360$ gir at $x = 15$. Det er altså 15 kuer, og dermed 30 griser og 90 høner.

DAG 2

1. I en pose er det 20 rød, 20 blå, 20 hvite og 20 grønne kuler. Hva er det minste antall kuler en blind person må ta ut fra posen for å være sikker på å få med minst én av hver farge?

   A) 5 B) 21 C) 24 D) 25 E) 61

2. Hva er summen av vinklene i en femkant? Kan du gi et enkelt bevis for dette for en femkant der alle vinklene er mindre enn 180°? (Du kan ta for gitt at summen av vinklene i en trekant er 180°.)

   A) 360° B) 450° C) 500° D) 540° E) 720°

Løsninger:

1. *E*. Hvis personen bare tar ut 60 kuler, kan det hende at alle de 20 kulene av en farge ligger igjen i posen. Men hvis personen tar ut 61 kuler, så ligger det bare igjen 19 kuler i posen, og da må han ha tatt ut minst en av hver farge.

2. *D*. Tegn en femkant $ABCDE$, og trekk linjene AC og AD. Da er vinklene i femkanten satt sammen av vinklene i trekantene ABC, ACD og ADE. Spesielt er summen av vinklene i femkanten den samme som summen av vinklene i trekantene til sammen. Siden summen av vinklene i en trekant er 180°, blir summen av vinklene i femkanten $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$.

DAG 3

1. Hvis du kaster to terninger, hva er da sannsynligheten for at en av terningene viser et partall (2, 4 eller 6) og den andre et oddetall (1, 3 eller 5)?

   A) 25% B) 33,3% C) 50% D) 66,6% E) 75%

2. Et fullkomment tall er et tall som er lik summen av sine divisorer (her regner vi med tallet 1, men ikke tallet selv som en divisor). For eksempel så er 6 et fullkomment tall, siden $6 = 1 + 2 + 3$. Hva er det neste fullkomne tall?

Løsninger:

1. *C*. Vi tenker oss at vi først kaster én terning. Denne vil vise enten et partall eller et oddetall. Spørsmålet blir da: Hva er sannsynligheten for at den andre terningen viser det motsatte? Siden terningen viser motsatt for 3 av de 6 sidene, så blir sannsynligheten $\frac{3}{6} = 50\%$.

2. Det neste fullkomne tall er $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Deretter følger 496 og 8128. Totalt er det funnet 39 fullkomne tall, og de er alle på formen $2^{p-1}(2^p - 1)$, der p er et primtall. Det er ingen som vet om det finnes uendelig mange fullkomne tall, eller om det finnes et odde fullkomment tall.

DAG 4

1. Tenk på et tall. Gang det med to. Legg til ti. Del tallet du nå har med to. Trekk fra det tallet du tenkte på. Hvis du nå står igjen med tallet 5, hvilket tall må du ha tenkt på?

   A) 2 B) 5 C) 8 D) 10 E) Det er umulig å avgjøre

2. Hva er det største antall skjæringspunkter man kan få hvis man tegner 5 sirkler på et ark?

   A) 10 B) 15 C) 18 D) 20 E) 22

Løsninger:

1. *E*. Hvis du har regnet riktig vil, du ende opp med tallet 5 uansett hva du startet med! Anta at du har tenkt på tallet *x*. Hvis vi skriver utregningene med symboler får vi uttrykket $\frac{2x+10}{2-x}$ som er det samme som $x + 5 - x = 5$.

2. *D*. To sirkler kan maksimalt skjære hverandre i to punkter. En tredje sirkel kan maksimalt skjære hver av de to første i to punkter, slik at vi totalt har maksimalt $2 + 4 = 6$ skjæringspunkter mellom tre sirkler. Tilsvarende er det maksimalt $2 + 4 + 6 = 12$ skjæringspunkter mellom fire sirkler, og det er maksimalt $2 + 4 + 6 + 8 = 20$ skjæringspunkter mellom 5 sirkler. At 20 er mulig, kan man enkelt sjekke ved å legge sirklene tilstrekkelig nær hverandre.

DAG 5

1. I en sjakklubb er det 10 medlemmer. På årsmøtet skal det velges et styre med to personer: En formann og en nestformann. Hvor mange forskjellige muligheter har de for dette valget?

   A) 19 B) 45 C) 55 D) 90 E) 99

2. Hvilket av følgende tall kan ikke skrives som differansen mellom to kvadrattall?

   A) 8 B) 13 C) 21 D) 42 E) 89

Løsninger:

1. *D*. Det er 10 muligheter for valg av formann. For hver av disse er det 9 muligheter for valg av nestformann. Totalt blir det dermed $10 \cdot 9 = 90$ muligheter.

2. *D.* Alle oddetall kan skrives som differansen mellom to kvadrattall: $2t + 1 = (t + 1)^2 - t^2$. Alle tall som er delelig med 4 kan skrives som differansen mellom to kvadrattall: $4t = (t + 1)^2 - (t - 1)^2$. Men tall på formen $4t + 2$, for eksempel tallet 42, kan aldri skrives som en slik differanse. (Siden hvert jevnt kvadrattall $(2u)^2$ er på formen $4t$, og hvert odde kvadrattall $(2u + 1)^2 = 4u^2 + 4u + 1$ er på formen $4t + 1$, kan differansen mellom to kvadrattall aldri bli på formen $4t + 2$.)

DAG 6

1. Gry har vært på torget og handlet epler og pærer. Hvis hun hadde kjøpt ett eple til, så hadde hun hatt dobbelt så mange epler som pærer. Hvis hun hadde byttet ut tre av eplene med pærer, så hadde hun hatt like mange av hver. Hvor mange epler kjøpte Gry?

   A)7 B) 11 C) 13 D) 17 E) 21

2. Hvis x, y og z er positive tall slik at $xy = 2$, $xz = 10$ og $yz = 45$, hva er da xyz?

   A) 19 B) 30 C) 54 D) 60 E) 67,5

Løsninger:

1. *C*. Anta at Gry kjøpte x pærer. Den første betingelsen sier da at hun kjøpte $2x - 1$ epler. Den andre betingelsen sier at $x + 3 = (2x - 1) - 3$ som gir $x = 7$. Gry kjøpte altså 7 pærer og 13 epler.

2. *B*. Hvis vi ganger sammen de tre likhetene, får vi $(xy)(xz)(yz) = 2 \cdot 10 \cdot 45 = 900$. Dette kan også skrives $(xyz)^2 = 900$, og vi får at $xyz = 30$.

DAG 7

1. Per har noen terninger, som alle veier like mye. Han har også noen kuler som alle veier like mye (men ikke det samme som terningene). Han fant ut at 4 kuler og 3 terninger veier 41 gram, og at 3 kuler og 4 terninger veier 36 gram. Hvor mye veier 1 kule og 1 terning til sammen?

   A) 8 gram B) 10,2 gram C) 10,8 gram D) 11 gram E) 11,14 gram

2. Sidelengdene i en trekant er $b + 1$, $7 - b$ og $4 - 2b$. For hvor mange verdier av b er trekanten likebeint? (En trekant kalles likebeint dersom minst to av sidene er like lange.)

   A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Løsninger:

1. *D*. Legger vi sammen de to opplysningene får vi at 7 kuler og 7 terninger til sammen veier $41 + 36 = 77$ gram. 1 kule og 1 terning må veie en syvendedel av dette, altså $\frac{77}{7} = 11$ gram.

2. B. For at trekanten skal være likebeint, må minst en av følgende likninger være oppfylt: $b + 1 = 7 - b$, $b + 1 = 4b - 2$, $7 - b = 4b - 2$. Den første likningene har $b = 3$ som løsning. Men en trekant med sidelengder 4, 4 og 10 finnes ikke. Den andre likningen har $b = 1$ som løsning. Dette gir sidelengdene 2, 6 og 2, som heller ikke er mulig for en trekant. Den siste likningen har $b = 1{,}8$ som løsning. Dette gir trekanten med sidelengder 2,8, 5,2 og 5,2. Trekanten er altså likebeint bare hvis $b = 1{,}8$.