REA3022 2017 Høst

Eksamenstid:

5 timer:

Del 1 skal leveres inn etter 3 timer.

Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler på Del 1:

Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Hjelpemidler på Del 2:

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:

Del 1 har 7 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.

Veiledning om vurderingen:

Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
- vurderer om svar er rimelige

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng) Nettkode: E-4TBF

Deriver funksjonene

a)

$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

Løsningsforslag a)

Funksjonen $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ er en sum av funksjoner på formen ax^n. Fra derivasjonsreglene for en potensfunksjon får vi at $(x^n)' = nax^{n-1}$. Vi har også at den deriverte til en konstant er lik 0. Vi kan finne den deriverte ved å derivere ledd for ledd ved hjelp av disse reglene.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 - 2x + 1)' \\ &= (3x^2)' - (2x)' + (1)' \\ &= 6x - 2 \end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{f'(x) = 6x - 2}}$

b)

$g(x) = x^2 e^x$

Løsningsforslag b)

For to funksjoner $u(x)$ og $v(x)$ har vi ved produktregelen at

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Funksjonen $g(x)$ er et produkt av faktorene $u(x) = x^2$ og $v(x) = e^x$. Vi kan bruke produktregelen for å derivere $g(x)$. Fra derivasjonsreglene har vi at $(e^x)' = e^x$. Da får vi at

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^2 e^x)' \\ &= (u \cdot v)' \\ &= u' \cdot v + u \cdot v' \\ &= (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot e^x \\ &= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x \\ &= x(2 + x)e^x \end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{g'(x) = x(2 + x)e^x}}$

c)

$h(x) = \ln(x^3 - 1)$

Løsningsforslag c)

Funksjonen $h(x)$ er en sammensatt funksjon, og vi kan sette $h(x) = g(u) = \ln u$ der $u = x^3 - 1$ er kjernen. Vi kan bruke kjerneregelen til å derivere $h(x)$. Fra kjerneregelen har vi at

$$h'(x) = g'(u) \cdot u'.$$

Vi husker at den deriverte til $\ln u$ er lik $\frac{1}{u}$, og for kjernen får vi at $u'(x) = (x^3 - 1)' = 3x^2$. Den deriverte til den sammensatte funksjonen blir da $h'(x) = g'(u) \cdot u' = (\ln u)' \cdot u' = \frac{1}{u} \cdot 3x^2$. Nå kan vi sette inn for u, og får da $h'\left(x\right) = \frac{1}{x^3-1} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3-1}$.

Svar: $\underline{\underline{h'\left(x\right) = \frac{3x^2}{x^3-1}}}$

Oppgave 2 (2 poeng) Nettkode: E-4TBJ

Skriv så enkelt som mulig

$$2\ln b - \ln\left(\frac{1}{b}\right) - \ln\left(ab^2\right) + \ln\left(\frac{a}{b^2}\right)$$

Løsningsforslag

Logaritmesetningene kan være nyttig å bruke for å omforme leddene i uttrykket vårt. Fra dem har vi at

$$\begin{aligned}
(1) \quad \ln a^x &= x \cdot \ln a \\
(2) \quad \ln(ab) &= \ln a + \ln b \\
(3) \quad \ln\left(\tfrac{a}{b}\right) &= \ln a - \ln b
\end{aligned}$$

Vi kan ta for oss ledd for ledd og se om vi kan forenkle de. Det andre leddet kan vi skrive om slik at vi får

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln 1 - \ln b$$

Vi har også at $\ln 1 = 0$ og får at $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$. I neste ledd, $\ln\left(ab^2\right)$, kan vi bruke setning (1) og (2) og får at

$$\ln\left(ab^2\right) = \ln a + \ln b^2 = \ln a + 2\ln b$$

Ved å bruke (1) og (3) kan vi skrive det siste leddet om, slik at vi får

$$\ln\left(\frac{a}{b^2}\right) = \ln a - \ln b^2 = \ln a - 2\ln b$$

Nå kan vi skrive om uttrykket og se om vi kan bli kvitt noen ledd

$$\begin{aligned}
&= 2\ln b - (-\ln b) - (\ln a + 2\ln b) + (\ln a - 2\ln b) \\
&= 2\ln b + \ln b - \ln a - 2\ln b + \ln a - 2\ln b \\
&= -\ln b
\end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{-\ln b}}$

Oppgave 3 (6 poeng) Nettkode: E-4TBL

Vektorene $\vec{a} = \left[3, 1\right]$, $\vec{b} = \left[4, 2\right]$ og $\vec{c} = \left[t+1, 3\right]$ er gitt, der $t \in \mathbb{R}$.

a)

Bestem $\vec{a} - 2\vec{b}$

Løsningsforslag a)

Vi skal subtrahere vektorene koordinatvis, altså subtraherer vi førstekoordinatene for seg og andrekoordinatene for seg. Den ene vektoren $\vec{b}$ er multiplisert med en konstant. For en vektor, $\vec{v} = [x, y]$ multiplisert med en konstant k har vi at $k \cdot [x, y] = [kx, ky]$. Ved dette får vi at

$\vec{a} - 2\vec{b} = \left[3, 1\right] - 2 \cdot \left[4, 2\right] = [3, 1] - [8, 4] = \left[3 - 8, 1 - 4\right] = \left[-5, -3\right]$.

Svar: $\underline{\underline{[-5, -3]}}$

b)

Bestem $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Løsningsforslag b)

Vi finner skalarproduktet av to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$ ved

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2.$$

For $\vec{a}$ og $\vec{b}$ får vi at skalarproduktet er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left[3, 1\right] \cdot \left[4, 2\right] = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 12 + 2 = 14.$$

Svar:

$$\underline{\underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = 14}}$$

c)

Bestem t slik at $\overrightarrow{b} \parallel \overrightarrow{c}$

Løsningsforslag c)

For at $\vec{b} \parallel \vec{c}$ må det finnes en k slik at vi kan skrive $\vec{b} = k\vec{c}$, altså må vi ha at $[4,2] = k[t+1,3] \Rightarrow 4 = k(t+1)$ og $2 = k \cdot 3$. Fra likningen $2 = k \cdot 3$ får vi at $k = \frac{2}{3}$ og det medfører at

$$4 = \frac{2}{3}\Big(t+1\Big) = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}$$

som vi kan løse med hensyn på t. Multipliserer vi først med 3 får vi at:

$$\begin{aligned} 2t &= 12 - 2 \\ 2t &= 10 \\ t &= 5 \quad . \end{aligned}$$

Dersom $\vec{b} \parallel \vec{c}$ må $t = 5$.

Svar: $\underline{\underline{t = 5}}$.

d)

Bestem t slik at $|\vec{a}| = |\vec{c}|$

Løsningsforslag d)

Vi vil finne t slik at $|\vec{a}| = |\vec{c}|$. Lengden til en vektor $\vec{v} = [x,y]$ er $|\vec{v}| = \big|[x,y]\big| = \sqrt{x^2+y^2}$, så har vi at

$$\sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{(t+1)^2+3^2}.$$

Vi kan kvadrere begge sider av likningen og løse opp parentesen $(t+1)^2$ ved første kvadratsetning. Da får vi

$$\begin{aligned} 3^2+1^2 &= (t+1)^2 + 3^2 \\ 9+1 &= \big(t^2+2t+1\big) + 9 \\ t^2+2t &= 0 \quad . \end{aligned}$$

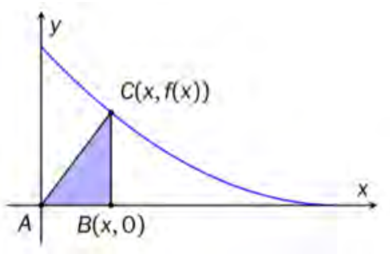
Vi kan faktorisere dette slik at vi får

$$t^2 + 2t = t\big(t+2\big)$$

For at dette skal være lik 0 må vi enten ha at $t = 0$ eller at $t = -2$. Det betyr at for $t = 0$ og $t = -2$ er $|\vec{a}| = |\vec{c}|$.

Svar: $\underline{\underline{t = 0 \text{ og } t = -2}}$.

Oppgave 4 (5 poeng) Nettkode: E-4TBQ



Funksjonen f er gitt ved

$f(x) = 2(x-3)^2 \quad , \quad 0<x<3$

En rettvinklet $\triangle ABC$ er gitt ved punktene $A(0,0)$, $B\,(x{,}0)$ og $C\,(x{,}f\,(x))$. Se skissen til høyre.

a)

Vis at arealet F til $\triangle ABC$ kan skrives som

$F\,(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

Løsningsforslag a)

$\triangle\ ABC$ er en trekant med grunnlinje $g = AB$ og høyde $h = BC$. Arealet F er da gitt ved $\frac{AB \cdot BC}{2}$. Lengden $AB = x$ og lengden på BC er gitt ved funksjonsverdien til f, $BC = f(x) = 2(x-3)^2$.

Da kan vi finne arealet ved å sette inn i formelen over $F\,(x) = \frac{x \cdot 2(x-3)^2}{2} = \frac{2x\left(x^2-6x+9\right)}{2} = x^3 - 6x^2 + 9x.$ Dette var det vi ville frem til.

b)

Bestem x slik at arealet til $\triangle ABC$ blir størst mulig.

Løsningsforslag b)

Vi vil finne når funksjonen $F\left(x\right) = x^3 - 6x^2 + 9x$ er størst. Da kan vi finne ekstremalpunktene til funksjonen ved å sette $F\,'(x) = 0$. Vi begynner med å derivere funksjonen:

$$F\,'\left(x\right) = \left(x^3 - 6x^2 + 9x\right)' = 3x^2 - 12x + 9.$$

Videre vil vi løse $3x^2\ -\ 12x\ +\ 9 = 0$ med hensyn på x. Vi kan begynne med å dividere med 3. Da får vi likningen

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

For å finne nullpunktene kan vi bruke abc-formelen. Den gir at

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

der $a = 1, b = -4$ og $c = 3$. Vi setter inn og får

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-\left(-4\right)\pm\sqrt{\left(-4\right)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}\\
&= \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}\\
&= \frac{4\pm2}{2}.
\end{aligned}
$$

Løsningen til likningen x^2-4x+3 er $x=\frac{4+2}{2}=3$ og $x=\frac{4-2}{2}=1$. Siden x skal ligge i $(0,3)$ ser vi kun på $x=1$. For å sjekke om x=1 gir et toppunkt bruker vi "2. derivert testen". Dersom andrederiverte til F i x=1 er negativ, så er grafen til F konkav i området rundt $(1, F(1))$.

Vi har at $F''\left(x\right)=\left(3x^2-12x+9\right)'=6x-12.$

Vi setter inn 1 og får $F''(1)=6\cdot1-12=-6<0.$

Da er $x=1$ det eneste maksimalpunktet på intervallet (0, 3) og maksimalverdien til arealet av $\triangle\ ABC$ er gitt ved $F\left(1\right)=1^3-6\cdot1^2+9\cdot1=1-6+9=4.$

Svar: Vi får størst mulig areal når $x=1$.

c)

Bestem arealet når $x=2$. Er det andre x-verdier som gir dette arealet?

Løsningsforslag c)

Når $x=2$ er arealet gitt ved

$$F\left(2\right)=2^3-6\cdot2^2+9\cdot2=8-24+18=2.$$

Dersom det finnes andre x-verdier som gir samme areal må vi ha at x tilfredstiller likningen

$$F\left(x\right)=x^3-6x^2+9x=2\Rightarrow x^3-6x^2+9x-2=0.$$

Vi vet at $x=2$ er et nullpunkt for uttrykket, så $x-2$ er en faktor i x^3-6x^2+9x-2. Nå kan vi bruke polynomdivisjon for å finne de andre faktorene. Da ser vi på $\left(x^3-6x^2+9x-2\right)\div\left(x-2\right)$.

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^3-6x^2+9x-2\right)\ :\ \left(x-2\right)=x^2-4x+1\\
\underline{-x^3+2x^2}\\
\qquad -4x^2+9x\\
\qquad \underline{\ \ 4x^2-8x}\\
\qquad\qquad\quad x-2\\
\qquad\qquad \underline{-x+2}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Vi kan faktorisere x^2-4x+1 ved abc-formelen.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-\left(-4\right)\pm\sqrt{\left(-4\right)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} \\
&= \frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2} \\
&= \frac{4\pm\sqrt{12}}{2} \\
&= \frac{4\pm2\sqrt{3}}{2} \\
&= 2\pm\sqrt{3} \qquad .
\end{aligned}
$$

Vi har at $1^2 < \sqrt{3}^2$ så $1 < \sqrt{3}$, som betyr at $x = 2 + \sqrt{3} > 3$ og utenfor definisjonsmengden, men $x = 2 - \sqrt{3}$ er i definisjonsmengden, og gir samme areal som $x = 2$.

Svar: $x = 2$ gir areal lik 2. Det samme gjør $x = 2 - \sqrt{3}$.

Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4TC8

En nøkkelboks er en boks med plass til nøkler. Noen slike bokser har kodelås.

For én type nøkkelboks lages en kode ved å stille inn fire tall. Hvert tall velges blant tallene 0 til 9. Et tall kan velges flere ganger. Tallene må være stilt inn i en bestemt rekkefølge.

a)

Hvor mange ulike koder finnes det for denne typen nøkkelboks.

Løsningsforslag a)

Utvalget er ordnet med tilbakelegging. For hvert av de fire tallene kan vi velge mellom 10 siffer. Da kan vi lage $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$ koder.

Svar: Det finnes 10000 ulike koder for denne typen nøkkelboks.

For en annen type nøkkelboks lages en kode ved å velge et bestemt antall forskjellige tall blant tallene 0 til 9. Tallene trenger ikke å være stilt inn i en bestemt rekkefølge.

b)

Hvor mange ulike koder finnes for denne typen nøkkelboks dersom koden skal bestå av fire forskjellige tall?

Løsningsforslag b)

Når vi har et uordnet utvalg uten tilbakeleggning kan vi bruke binomialkoeffisienten $\binom{n}{k}$, der n er antall elementer vi kan velge mellom, som i vårt tilfelle er 10 og k er antall elementer vi velger, som her er 4. Da får vi

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210.$$

Svar: For denne typen nøkkelboks finnes det 210 ulike koder.

c)
Hvor mange tall må koden bestå av for at antallet mulige koder skal bli størst mulig? Hvor mange koder er det da?

Løsningsforslag c)

Vi kan bruke binomialkoeffisienten for å finne k slik at $\binom{10}{k}$ blir størst mulig. Vi har

$$\binom{10}{k} = \frac{10!}{k! \cdot (10-k)!}$$

som betyr at $\binom{10}{k} = \binom{10}{10-k}$. For at binomialkoeffisienten skal bli størst mulig må vi ha at nevneren $k! \cdot (10-k)!$ blir minst mulig.

For $k = 0$ og $k = 10$ får vi at nevneren blir

$$0!10! = 10!$$

.

For $k = 1$ og $k = 9$ får vi at nevneren blir $1! \cdot 9! = 9!$.

For $k = 2$ og $k = 8$ får vi $2! \cdot 8!$ og for $k = 3$ og $k = 7$ får vi $3! \cdot 7!$.

Da gjenstår $k = 4$ og $k = 6$ som gir nevner

$$4! \cdot 6!$$

og til slutt $k = 5$ der vi får nevneren $5! \cdot 5!$.

Blant disse mulighetene så har vi at $k = 5$ gir minst nevner, og dermed flest muligheter.

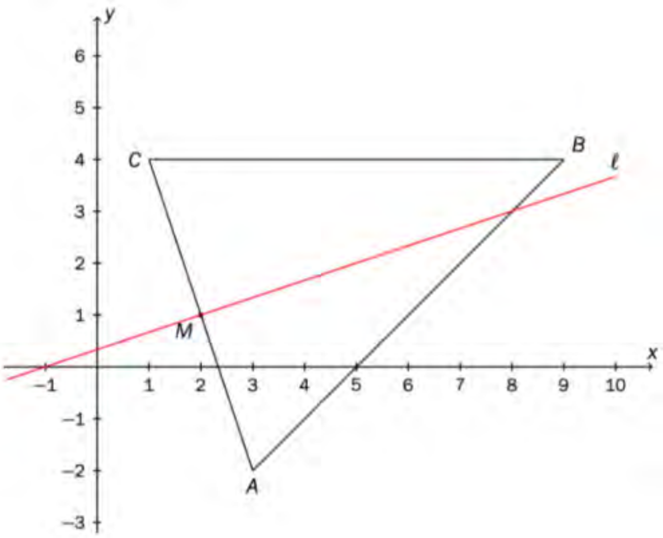
Dersom koden består av 5 tall har vi

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 = 252$$

Svar: Koden må bestå av 5 tall, og da kan vi få 252 ulike koder.

Oppgave 6 (7 poeng) Nettkode: E-4TCK

En $\triangle ABC$ har hjørnene $A\,(3,\,-\,2)$, $B\,(9{,}4)$ og $C\,(1{,}4)$. Punktet M er midtpunktet på AC.



a)
Vis ved vektorregning at M har koordinatene $M\,(2{,}1)$.

Løsningsforslag a)

Vi kan finne koordinatene ved å se på $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, der $\overrightarrow{OA} = \left[3, -2\right]$ og

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\left[1-3, 4-\left(-2\right)\right] = \left[-1, 3\right]$. Setter vi inn får vi at

$\overrightarrow{OM} = \left[3, -2\right] + \left[-1, 3\right] = \left[2, 1\right]$ som var det vi ville frem til.

La ℓ være midtnormalen til AC.

b)
Forklar at

$$\ell : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

er en parameterfremstilling for ℓ.

Løsningsforslag b)

For ei linje, l, som går gjennom punktet (x_1, y_1) og har retningsvektor

$$\overrightarrow{r} = \left[a, b\right]$$

har en parameterfremstilling

$$l : \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{cases}$$

For at parameterfremstillingen er for linja ℓ, må ℓ gå gjennom punktet $(2, 1)$, som er punktet M, så dette stemmer. ℓ skal være midtnormalen til $\vec{AC}$. Det betyr at vi må sjekke at retningsvektoren $\vec{r} = [3, 1]$ står vinkelrett på $\vec{AC} = \left[1 - 3,\ 4 - (-2)\right] = \left[-2,\ 6\right]$. Da må vi ha at skalarproduktet $\vec{AB} \cdot \vec{r} = 0$. Vi setter inn for vektorene

$$[-2, 6] \cdot [3, 1] = -2 \cdot 6 + 6 \cdot 1 = 0$$

som betyr at $\vec{r}$ står normalt på $\vec{AC}$, og

$$\ell : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

er en parameterfremstilling for ℓ.

c)

Avgjør om punktet $\left(12, \frac{9}{2}\right)$ ligger på ℓ.

Løsningsforslag c)

Et punkt på ℓ tilfredstiller likningene for x og y for samme t. Vi må ha at samme t gir $x = 12$ og $y = \frac{9}{2}$. For likningen for x får vi at

$$12 = 2 + 3t \Rightarrow t = \frac{10}{3}.$$

Setter inn denne verdien for t i likningen for y. Da får vi at

$$y = 1 + \frac{10}{3} = \frac{13}{3}$$

som betyr at $\left(12, \frac{9}{2}\right)$ ikke ligger på linja ℓ.

Svar: Punktet ligger ikke på ℓ.

d)

Bestem koordinatene til skjæringspunktet mellom ℓ og midtnormalen til AB.

Løsningsforslag d)

Vi begynner med å finne en parameterlikning for midtnormalen, μ, til AB. Lar D være midtpunktet på AB. Da kan vi finne koordinatene til D ved å se på posisjonsvektoren

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

. Vi har at $\vec{AB} = \left[9 - 3,\ 4 - (-2)\right] = \left[6,\ 6\right]$. Da får vi at $\vec{OD} = \left[3,\ \ -2\right] + \frac{1}{2}\left[6,\ 6\right] = \left[3 + 3,\ 3 + (-2)\right] = \left[6,\ 1\right]$, så μ må gå gjennom punktet $(6, 1)$. I tillegg trenger vi retningsvektoren $[a, b]$ til μ. Den må stå normalt på $\vec{AB} = \left[9 - 3,\ 4 - (-2)\right] = \left[6,\ 6\right]$, så skalarproduktet

$$[6, 6] \cdot [a, b] = 6a + 6b = 0$$

. Dersom vi har $a = -b$ for vilkårlig valg av a vil dette løse likningen. Vi kan velge $a = 1$, og får da at $[1, -1]$ er en retningsvektor for μ. En parameterfremstilling for μ er da

$$\mu : \begin{cases} x = 6 + s \\ y = 1 - s \end{cases}$$

Nå vil vi finne skjæringspunktet mellom ℓ og μ. Da må x-koordinaten til dette punktet tilfredstille likningene $x = 2 + 3t$ og $x = 6 + s$ og y-koordinaten likningene $y = 1 + t$ og $y = 1 - s$ Fra disse likningene får vi likningsystemet

$$\begin{bmatrix} 2 + 3t = 6 + s \\ 1 + t = 1 - s \end{bmatrix}$$

Fra den andre likningen får vi at $s = -t$ og kan sette inn for s i den første likningen og får

$$\begin{aligned} 2 + 3t &= 6 + (-t) \\ 3t + t &= 6 - 2 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Nå kan vi finne koordinatene til skjæringspunktet til ved å sette inn for $t = 1$ i parameterfremstillingen for ℓ. Da får vi at $x = 2 + 3 \cdot 1 = 5$ og $y = 1 + 1 = 2$.

Svar: Skjæringspunktet er $(5{,}2)$.

Oppgave 7 (3 poeng) Nettkode: E-4TCQ

Nedenfor er det gitt noen utsagn. Skriv av utsagnene. I boksen mellom utsagnene skal du sette inn ett av symbolene $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ eller $\Leftrightarrow$. Husk å begrunne svarene.

a)

$x^2 = 1 \quad \boxed{} \quad x = 1$

Løsningsforslag a)

Vi har to påstander; $x^2 = 1$ og $x = 1$. Tar vi utgangspunkt i at $x^2 = 1$ stemmer så kan vi også ha både $x = 1$ og $x = -1$, så $x^2 = 1$ impliserer ikke $x = 1$. Dersom $x = 1$ stemmer må vi også ha at $x^2 = 1$ stemmer, så vi kan sette inn implikasjonspil $\Leftarrow$.

Svar: $\Leftarrow$

b)

$f(x) = 5x^2 - 1 \quad \boxed{} \quad f'(x) = 10x$

Løsningsforslag b)

Vi ser på påstandene $f(x) = 5x^2 - 1$ og $f'(x) = 10x$. Deriverer $f(x) = 5x^2 - 1$ får vi $f'(x) = 10x$, så vi har implikasjonspil $\Rightarrow$. Når vi deriverer så forsvinner konstanten, det betyr at

$$f'(x) = 10x \implies f(x) = 5x^2 + k$$

for vilkårlig konstant k, så vi har ikke implikasjonspil $\Leftarrow$.

Svar:$\Rightarrow$

Oppgave 8 (2 poeng) Nettkode: E-4TCY

Funksjonen f er gitt ved

$f(x) = e^{1-x}$

Grafen til f har en tangent som går gjennom origo. Bestem likningen for denne tangenten.

Løsningsforslag

Stigningstallet til en tangent gjennom et punkt $(x_0, f(x_0))$ er lik den deriverte, $f'(x_0)$, så vi begynner med å finne den deriverte til $f(x)$. Dersom vi har en funksjon som kan skrives om til $f(u)$ der $u(x)$ er kjernen, så kan vi bruke kjerneregelen. Funksjonen $f(x) = e^{1-x}$ kan skrives om til $f(u) = e^u$ der $u(x) = 1 - x$ er kjernen. Da kan vi bruke kjerneregelen for å derivere $f(x)$. Den gir at $f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = (e^u)' \cdot (1-x)' = e^u \cdot (1-x)' = e^{1-x} \cdot (-1) = -e^{1-x}$.

Fra ettpunktsformelen får vi at likningen til tangenten er gitt ved

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$\Updownarrow$$
$$y = x \cdot f'(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0) + f(x_0)$$

Siden tangenten skal gå gjennom origo $(0, 0)$ vil vi ha at konstantleddet lik 0, altså $-f'(x_0)x_0 + f(x_0) = 0$. Vi har at $f(x_0) = e^{1-x_0}$ og $f'(x_0) = -e^{1-x_0}$. Setter vi inn dette får vi at

$$\begin{aligned} -(-e^{1-x_0})x_0 + e^{1-x_0} &= 0 \\ e^{1-x_0}(1 + x_0) &= 0 \end{aligned}$$

Vi har at $e^{(1-x_0)} > 0$, så vi kan dividere med det på begge sider. Da får vi

$$1 + x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = -1$$

og stigningstallet til tangenten er $f'(-1) = -e^{1-(-1)} = -e^2$. Siden tangenten går gjennom origo har vi ingen konstantledd og likningen til tangenten er

$$y = -e^2 x$$

Svar: $\underline{\underline{y = -e^2 x}}$

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng) Nettkode: E-4TD0

Jakob har en spilleliste med 20 sanger på mobilen sin. Fire av sangene på spillelisten er med artisten Kygo. Programmet spiller av sangene i tilfeldig rekkefølge (shuffle) med tilbakelegging. Det vil si at samme sang kan bli spilt at flere ganger etter hverandre.

a)

Forklar at sannsynligheten alltid er $p = 0{,}2$ for at neste sang som blir spilt, er med Kygo.

Løsningsforslag a)

Vi ser på hendelsen at neste sang er med Kygo. Vi har en uniform sannsynlighetmodell. Da har vi

$$p = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall mulige utfall}}.$$

Jakob har 20 sanger på spillelisten og det betyr at antall mulige utfall er 20. Gunstige utfall er de sangene som er med Kygo, så da har vi 4. Dermed har vi at sannsyligheten for at neste sang er med Kygo er

$$p = \frac{4}{20} = 0,2.$$

b)

Jakob vil høre på fem sanger fra spillelisten. Bestem sannsynligheten for at nøyaktig to av sangene han spiller, er med Kygo.

Løsningsforslag b)

Vi har altså et binomisk forsøk som består av fem delforsøk. Hver gang det spilles av en ny sang, kan den enten være med Kygo eller ikke. Fra oppgave a) vet vi at sannsynligheten for at neste sang er med Kygo er $p = 0,2$. Siden vi har tilbakelegging av sangene, er denne sannsynligheten lik for hver sang som spilles av. Sannsynligheten for at neste sang ikke er med Kygo er $1 - p = 1 - 0,2 = 0,8$. For binomiske forsøk har vi

$P\,(k\ suksesser)$ = $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$. Vi setter inn tall for k, p *og* $1-p$.

$$P\,(Kygo\ spilles\ to\ ganger) = \binom{5}{2} 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}2048 \approx 20{,}5\,\%$$

Svar: Sannsynligheten er tilnærmet 20,5% for at nøyaktig 2 av de fem sangene som spilles av er med Kygo.

c)

Hvor mange avspillinger må man høre for at sannsynligheten for å få høre minst én sang med Kygo skal være større enn $90\,\%$?

Løsningsforslag c)

Vi vil finne hvor mange avspillinger Jakob må høre for at sannsynligheten for å få høre minst en sang med Kygo er 90%. Det betyr at vi vil ha

$$P(\text{minst en Kygo-sang}) > 0,9$$

Hendelsen *"minst en Kygo-sang"* er komplementær med hendelsen *"ingen Kygo-sanger"*. Vi lar n være antall avspillinger Jakob hører. Fra oppgave b) har vi at sannsynligheten for neste sang ikke er med Kygo er $0,8$. Ved produktsetningen får vi at sannsynligheten for at ingen av de n neste sangene er med Kygo er gitt ved $0,8^n$. Sannsynligheten for at det spilles av minst en Kygo sang blant de n neste sangene er da

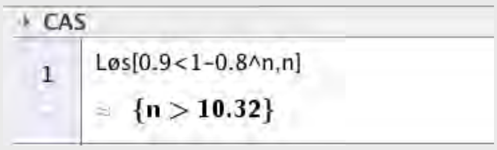
$$P(\text{minst en Kygo-sang}) = 1 - 0,8^n$$

Vi vil finne n slik at

$$0,9 < 1 - 0,8^n$$

Denne likningen kan vi løse i CAS ved å skrive inn

$$\mathtt{L\o s}\left[0.9 < 1 - 0.8^\wedge \mathtt{n}, \mathtt{n}\right]$$



Her kan vi se at $n > 10,32$, så Jakob må ha 11 avspillinger.

Svar: 11 avspillinger

Oppgave 2 (5 poeng) Nettkode: E-4TDU

En $\triangle ABC$ har hjørnene $A\,(3{,}5)$, $B\,(6{,}5)$ og $C\,(7{,}9)$.

a)

Bestem $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ og bruk vektorregning til å bestemme $\angle BAC$.

Løsningsforslag a)

Vektoren $\vec{PQ}$ mellom to punkter $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$ er gitt ved

$$\vec{PQ} = \left[x_2 - x_1, y_2 - y_1\right]$$

For $\vec{AB}$ og $\vec{AC}$ får vi da $\overrightarrow{AB} = \left[6-3, 5-5\right] = \left[3, 0\right]$

$$\overrightarrow{AC} = \left[7-3, 9-5\right] = \left[4, 4\right].$$

Skalarproduktet av vektorene $\vec{AB}$ og $\vec{BC}$ er gitt ved

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right| \cos \angle BAC$$

der

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$$

og

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Vi kan også finne skalarproduktet ved

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \cdot 4 + 0 \cdot 4 = 12$$

Da må vi ha

$3 \cdot 4\sqrt{2} \cos \angle BAC = 12$

$\cos \angle BAC = \frac{12}{12\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\angle BAC = 45^\circ$.

Svar: $\angle BAC = 45^\circ$.

Tyngdepunktet T til en trekant med hjørnene A, B og C er generelt gitt ved

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right),$$

der O er origo.

b)
Bestem, ved vektorregning, koordinatene til tyngdepunktet T til $\triangle ABC$.

Løsningsforslag b)

Posisjonsvektoren til et punkt er bestemt av koordinatene til punktet. Vi får at

$$\begin{aligned}\vec{OA} &= [3,5] \\ \vec{OB} &= [6,5] \\ \vec{OC} &= [7,9]\end{aligned}$$

Da får vi at

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \\ &= \tfrac{1}{3}\left([3,5] + [6,5] + [7,9]\right) \\ &= \tfrac{1}{3}\left([3+6+7, 5+5+9]\right) \\ &= \tfrac{1}{3}[16,19] \\ &= \left[\tfrac{16}{3}, \tfrac{19}{3}\right]\end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{T = \left(\tfrac{16}{3}, \tfrac{19}{3}\right)}}$

En $\triangle\ DEF$ er gitt. To av hjørnene er $D\,(2{,}3)$ og $E\,(-3{,}5)$. Tyngdepunktet er $S\,(4{,}2)$.

c)
Bestem koordinatene til hjørnet F.

Løsningsforslag c)

For $\triangle\ DEF$ har vi at tyngdepunktet S er gitt ved $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\left[\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right]$. Nå kan vi la F være gitt ved (x, y). Dersom vi setter inn for $\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}$ og $\overrightarrow{OF}$ får vi

$$[4,\ 2] = \ \frac{1}{3}\left([2,\ 3] + [-3,\ 5] + [x,\ y]\right)$$

$$3 \cdot [4,\ 2] \ = \left([2-3, 3+5] + [x,\ y]\right)$$

$$[12,\ 6] = [-1,\ 8] + [x,\ y]$$

$$[12,\ \ 6\ ] - [-1, 8] \quad = \quad [x,\ y]$$

$$[12-(-1), 6-8] \ = \ [x,\ y]$$

$$[x,\ y] = \ \ [13,\ \ -2]$$

Svar: Koordinatene til F er $(13, -2)$.

Oppgave 3 (8 poeng) Nettkode: E-4TE1

Funksjonen f er gitt ved

$$f\left(x\right) = 2\ln\left(x^2 + 4\right) - \frac{1}{2}x$$

a)

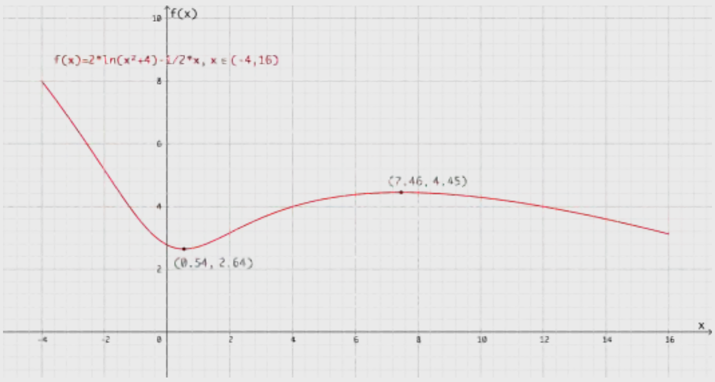
Bruk graftegner til å tegne grafen når $x \in \langle -4{,}16 \rangle$

Løsningsforslag a)

I GeoGebra skriver vi inn

$$f(x) = \text{Funksjon}\left[2^* \ln\left(x^\wedge 2 + 4\right) - (1/2)^* x, -4, 16\right]$$

og setter navn på aksene. Da får vi opp grafen



b)

Bestem eventuelle topp- og bunnpunkt på grafen til f.

Løsningsforslag b)

GeoGebra har kommandoen Ekstremalpunkt, og denne kan vi bruke for å finne ekstremalpunktene til f. Da skriver vi inn

$$\text{Ekstremalpunkt}[f, -4, 16]$$

og vi får opp ekstremalpunktene til f i intervallet $\langle -4, 16 \rangle$ som er bunnpunktet $(0,54,\ 2,64)$ og toppunktet $(7,46,\ 4,45)$.

Svar: $(0,54,\ 2,64)$ og $(7,46,\ 4,45)$.

Funksjonen g er gitt ved

$$g\left(x\right) = 2\ln\left(x^2 + k\right) - \frac{1}{2}x \quad , \quad k > 0$$

c)

Bruk CAS til å bestemme k slik at g har et ekstremalpunkt i $x = 1$.

Løsningsforslag c)

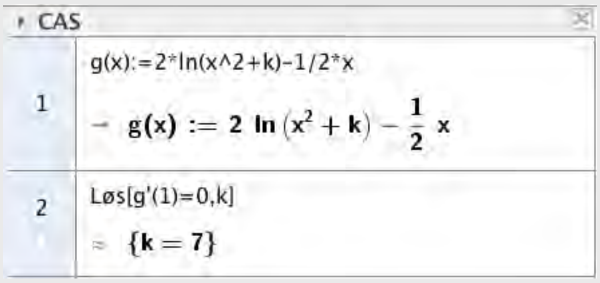
Vi vil bestemme k slik at g har et ekstremalpunkt i $x = 1$. Da må vi ha at $g'(1) = 0$. Vi skal bruke CAS som hjelpemiddel. Det første vi gjør er å definere g ved å skrive inn

$$g(x) := 2^* \ln(x^\wedge 2 + k) - (1/2)^* x$$

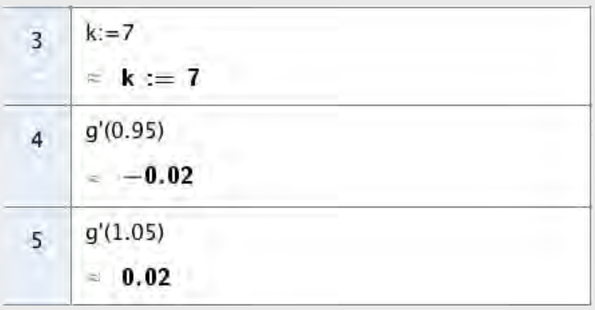
Videre skriver vi inn

$$\text{Løs}[g'(1) = 0, k]$$

for å løse likningen med hensyn på k.



Da får vi at $k = 7$, så $x = 1$ er et ekstremalpunkt når $k = 7$.



Her kan vi se at $g'(0,95) < 0$ og $g'(1,05) > 0$, så $x = 1$ er et bunnpunkt.

Svar: $x = 1$ er et ekstremalpunkt for $k = 7$.

d)

Bruk blant annet CAS til å bestemme hvor mange ekstremalpunkt g har for ulike verdier av k.

Løsningsforslag d)

Vi begynner med å derivere g(x).

1	$g(x) := 2\ \ln(x^2 + k) - \frac{x}{2}$
2	$g'(x)$ $\rightarrow \ \frac{-x^2 - k + 8\,x}{2\,x^2 + 2\,k}$

Vi vet at k>0 og at $x^2 \geq 0$, så nevneren er alltid positiv. Fortegnet til $g\,(x)$ er derfor alltid det samme som fortegnet til telleren $-x^2 - k + 8x$. Denne telleren er et andregradspolynom, og vi vet at hvis et andregradspolynom har to nullpunkter, så skifter fortegnet i nullpunktene. Hvis det bare finnes ett nullpunkt, så skifter ikke fortegnet, for da tangerer bare grafen x-aksen.

Antall nullpunkter er bestemt av fortegnet til diskriminanten, altså uttrykket $b^2 - 4ac$ under rottegnet i abc-formelen. Positiv diskriminant gir 2 nullpunkter, negativ diskriminant gir ingen nullpunkter, mens det er ett nullpunkt hvis diskriminanten er 0. Vi bruker CAS til å finne og analysere diskriminanten D.

3	$D := 8^2 - 4\,(-1)\,(-k)$
4	$D > 0$ Løs: $\{k < 16\}$
5	$D = 0$ Løs: $\{k = 16\}$

Vi ser fra celle 4 at dersom $0 < k < 16$, så har $g^{'}\,(x)$ to nullpunkter, og som vi har sett, bytter $g^{'}$ fortegn i begge nullpunktene. Slike verdier for k gir dermed 2 ekstremalpunkter.

Fra celle 5 ser vi at hvis $k = 16$ så har $g^{'}$ bare ett nullpunkt, men vil ikke bytte fortegn der, så det er ikke et ekstremalpunkt.

For $k > 16$ må diskriminanten være negativ, så $g^{'}$ har ingen nullpunkter og dermed har g ingen ekstremalpunkter for disse verdiene av k.

Svar: Hvis $0 < k < 16$ har *g* to ekstremalpunkter. For $k \geq 16$ har *g* ingen ekstremalpunkter.

Oppgave 4 (6 poeng) Nettkode: E-4TEA

Skipet *Euler* sender ut en melding om at det har fått motorstopp. Kapteinen oppgir at posisjonen er $P_0\ (80{,}16)$ i et bestemt koordinatsystem. På grunn av driften vil posisjonen (i nm) i timer senere være gitt ved

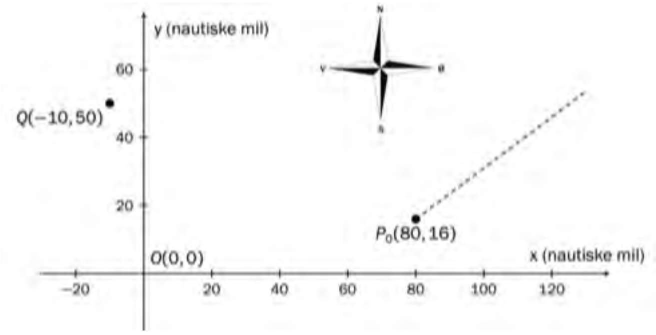
På havet måles avstander i nautiske mil (nm).

1 nm = 1852 m

$$\overrightarrow{OP} = \left[80 + 4t, 16 + 3t\right]$$

a)

Hvilken fartsvektor $\vec{v}$ driver skipet med? Hvor stor er farten (banefarten)?



Løsningsforslag a)

Vi kan bruke GeoGebra og CAS for å bestemme fartsvektoren og banefarten. Da må vi først definere posisjonsvektoren $\vec{OP}$ ved å skrive

$$r(t) := (80 + 4t, 16 + 3t)$$

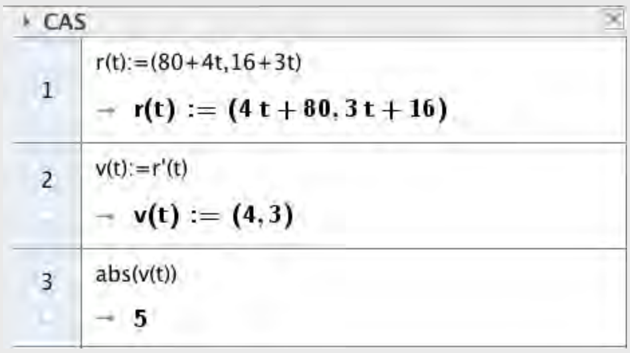
. Videre kan vi finne fartsvektoren ved å skrive inn

$$v(t) := r'(t)$$

og banefarten, $|v'(t)|$ ved å skrive

$$\text{abs}(v(t))$$

. Da får vi



CAS

1	r(t):=(80+4t,16+3t) → $\mathbf{r(t) := (4\,t + 80, 3\,t + 16)}$
2	v(t):=r'(t) → $\mathbf{v(t) := (4, 3)}$
3	abs(v(t)) → $\mathbf{5}$

Svar: Fartsvektoren $\vec{v} = (4, 3)$ og farten er på 5 nm/h (knop).

En redningsbåt som ligger i O, sier at den er klar til å gå mot skipet og kan være ved *Euler* om 4 timer.

b)
Hvor stor fart holder redningsbåten?

Løsningsforslag b)

Først bestemmer vi posisjonen til Euler ved å finne at $\vec{r}(4) = (96, 28)$. Avstanden fra O er

$$\left|\left[96, 28\right]\right| = \sqrt{96^2 + 28^2} = 100$$

. Det betyr at redningsbåten reiser en distanse på 100 nm på 4 timer. Vi antar at redningsbåten holder en konstant fart, som da må være på

$$\frac{100\text{nm}}{4\text{h}} = 25\text{nm}/\text{h}.$$

Svar: Redningsbåten holder en fart på 25 nm/h.

En annen redningsbåt er i posisjonen $Q\,(-10{,}50)$ når meldingen blir sendt. Den kan holde en fart på 35 nm/h.

c)
Bruk CAS til å bestemme hvor lang til det vil gå før denne redningsbåten kan være framme ved *Euler*.

Løsningsforslag c)

Vi antar at redningsbåten holder en rettlinjet kurs. Etter t timer vil redningsbåten være posisjonert et sted $35 \cdot t$ nm unna Q, altså et sted på sirkelen med sentrum $Q(-10, 50)$ og radius $35t$. Likningen for denne sirkelen er

$$(x + 10)^2 + (y - 50)^2 = (35t)^2.$$

Eulers koordinater (x, y) etter t timer er gitt ved $\vec{r}(t) = (80 + 4t, 16 + 3t)$. Vi vil at disse skal være like. Da kan vi sette inn for

$$x = 80 + 4t,\ y = 16 + 3t$$

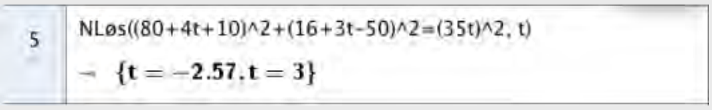
i likningen til posisjonen til redningsbåten, slik at vi får

$$(80 + 4t + 10)^2 + (16 + 3t - 50)^2 = (35t)^2.$$

Nå kan vi bruke CAS til å løse denne likningen, og bruker kommandoen “NLøs” for å få svaret oppgitt som desimaltall. Da skriver vi inn

$$\mathrm{NLøs}((80+4t+10)^\wedge 2+(16+3t-50)^\wedge 2=(35t)^\wedge 2,\ t)$$

og får



Tiden må være positiv, så vi får det tar 3 timer før redningsbåten vil være fremme hos Euler.

Svar: Denne redningsbåten vil være fremme hos *Euler* etter 3 timer.