



www.matematikk.org

Eksamensoppgavesettet er utarbeidet av Utdanningsdirektoratet. Avvik fra det originale eksamenssettet er eventuelle spesifiseringer og illustrasjoner. Løsningsforslagene i sin helhet er utarbeidet av matematikk.org.

Nettkoden som står til høyre for oppgavetittelen brukes i søkefeltet på www.matematikk.org for å åpne oppgaven og se utfyllende løsningsforslag.

Våre samarbeidspartnere:



REA3022 2017 Vår



Eksamenstid:

5 timer:

Del 1 skal leveres inn etter 3 timer.

Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler på Del 1:

Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Hjelpemidler på Del 2:

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:

Del 1 har 7 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.

Veiledning om vurderingen:

Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
- vurderer om svar er rimelige



DEL 1 Uten hjelpemidler



Oppgave 1 (5 poeng) Nettkode: E-4QXO

Deriver funksjonene.

a)

$$f(x) = 2x^3 - 5x + 4$$

Løsningsforslag a)

Når vi har en sum kan vi derivere hvert av leddene og summere sammen.

$$f'(x) = (2x^3 - 5x + 4)' = (2x^3)' - (5x)' + (4)'$$

Nå kan vi bruke derivasjonsregelen til den deriverte av en potensfunksjon, at $(ax^n)' = nax^{n-1}$. Den deriverte til en konstant er lik 0. Da får vi

$$f'(x) = 3 \cdot 2x^2 - 5 + 0 = 6x^2 - 5$$

$$\textbf{Svar: } \underline{\underline{f'(x) = 6x^2 - 5}}$$

b)

$$g(x) = x^2 e^x$$

Løsningsforslag b)

Vi kan bruke produktregelen

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

for å derivere funksjonen. Vi setter $u = x^2$ og $v = e^x$. Da får vi at

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^2 e^x)' \\ &= (u \cdot v)' \\ &= u'v + uv' \\ &= 2xe^x + x^2 e^x \\ &= x(2 + x)e^x \end{aligned}$$

$$\textbf{Svar: } \underline{\underline{g'(x) = x(2 + x)e^x}}$$



c)

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 3}$$

Løsningsforslag c)

Vi har en sammensatt funksjon $h(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ som kan skrives som $k(u(x))$, der $k(u) = \sqrt{u}$ og kjernen $u(x) = x^2 - 3$. Nå kan vi bruke kjerneregelen som gir $h'(x) = (k(u(x)))' = k'(u) \cdot u'(x)$. Vi kan derivere hver av funksjonene, og ved å bruke derivasjonsreglene får vi $k'(u) = (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ og $u'(x) = (x^2 - 3)' = 2x$. Fra kjerneregelen får vi da at

$$h'(x) = (k(u(x)))' = k'(u) \cdot u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$$

Svar: $\underline{\underline{h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}}}$



Oppgave 2 (4 poeng) [Nettkode: E-4QXS](#)

Skriv så enkelt som mulig

a)

$$\frac{x^2-3}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} + \frac{5}{x-3}$$

Løsningsforslag a)

Vi kan begynne med å finne fellesnevner. De to siste leddene har førstegradsuttrykk i nevneren, så disse kan vi ikke faktorisere. Det første leddet har nevneren $x^2 - 9$. Dette kan vi skrive som $x^2 - 3^2$ og vi kan bruke konjugatsetningen til å faktorisere uttrykket. Da får vi at

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3).$$

Faktorene i nevneren her er de samme som faktorene i de to andre leddene, så $(x - 3)(x + 3)$ er fellesnevneren for uttrykket. Nå kan vi utvide de to andre leddene slik at vi får samme nevner. Vi utvider det andre leddet med $\frac{x-3}{x-3}$ og det tredje leddet med $\frac{x+3}{x+3}$. Da får vi

$$\frac{x^2 - 3}{(x - 3)(x + 3)} + \frac{1(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)} + \frac{5(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)}.$$

Videre kan vi sette på fellesnevner og regne ut:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-3+1(x-3)+(5(x+3))}{(x-3)(x+3)} &= \frac{(x^2-3)+(x-3)+(5x+15)}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{x^2-3+x-3+5x+15}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{x^2+6x+9}{(x-3)(x+3)} \end{aligned}$$

Telleren i dette uttrykket kan vi faktorisere ved å bruke første kvadratsetning. Vi kan skrive

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = (x + 3)^2$$

Setter vi dette inn i uttrykket vi fant over ser vi at vi har $(x + 3)$ som felles faktor i teller og nevner, og kan forkorte. Da får vi

$$\frac{(x + 3)^2}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{x + 3}{x - 3}$$

Svar: $\frac{x+3}{x-3}$



b)

$$2 \ln(a^{-3}b^2) - 3 \ln\left(\frac{b}{a^2}\right)$$

Løsningsforslag b)

Vi har et uttrykk som består av to ledd hvor vi tar logaritmen til et produkt av to faktorer og logaritmen til en brøk. For logaritmen til produkter og brøker har vi logaritmereglene som sier at $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ og at $\ln \frac{c}{d} = \ln c - \ln d$. Vi har også en logaritmeregel som sier at $\ln a^n = n \ln a$. Ved å bruke disse reglene kan vi forenkle uttrykket ledd for ledd og se om vi etterhvert kan trekke sammen noen ledd. Vi begynner med det første leddet. Her får vi ved å bruke logaritmereglene for produkt at

$$2 \ln(a^{-3}b^2) = 2(\ln a^{-3} + \ln b^2) = 2 \ln a^{-3} + 2 \ln b^2.$$

Videre kan vi bruke regelen for potenser. Det gir

$$2 \ln a^{-3} + 2 \ln b^2 = 2 \cdot (-3) \ln a + 2 \cdot 2 \ln b = -6 \ln a + 4 \ln b$$

. I det andre leddet bruker vi regelen for brøk og regelen for potenser og får at

$$3 \ln\left(\frac{b}{a^2}\right) = 3(\ln b - \ln a^2) = 3 \ln b - 3 \cdot 2 \ln a = 3 \ln b - 6 \ln a$$

Nå kan vi sette inn i det opprinnelige uttrykket og regne ut.

$$\begin{aligned} 2 \ln(a^{-3}b^2) - 3 \ln\left(\frac{b}{a^2}\right) &= -6 \ln a + 4 \ln b - (3 \ln b - 6 \ln a) \\ &= -6 \ln a + 4 \ln b - 3 \ln b + 6 \ln a \\ &= \ln b \end{aligned}$$

Svar: $\ln b$



Oppgave 3 (4 poeng) [Nettkode: E-4QXV](#)

Tre punkt $A(-1,6)$, $B(2,1)$ og $C(4,4)$ er gitt.

a)

Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

Løsningsforslag a)

Ved vanlig vektorregning finner vi at vektoren $\overrightarrow{AB}$ mellom punktene $A(-1,6)$ og $B(2,1)$ er gitt ved

$$\overrightarrow{AB} = [2 - (-1), 1 - 6] = [3, -5]$$

og vektoren $\overrightarrow{AC}$ mellom punktene $A(-1,6)$ og $C(4,4)$ er gitt ved

$$\overrightarrow{AC} = [4 - (-1), 4 - 6] = [5, -2]$$

.

Svar: $\overrightarrow{AB} = [3, -5]$ og $\overrightarrow{AC} = [5, -2]$.

b)

Et punkt D er gitt slik at

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

Bestem koordinatene til D .

Løsningsforslag b)

Vi lar D være punktet gitt ved $D(x, y)$. Vi kan nå finne et uttrykk for $\overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{CD} = [x - 4, y - 4].$$

Når vi summerer to vektorer summerer vi de koordinatvis. Da får vi at

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = [3, -5] + [x - 4, y - 4] = [3 + (x - 4), -5 + (y - 4)] = [x - 1, y - 9].$$

Fra likningen vi får oppgitt vil vi ha at begge koordinatene er lik 0, altså at $x - 1 = 0$ og at $y - 9 = 0$. Ved å løse disse likningen får vi $x = 1$ og $y = 9$. Dermed har vi funnet koordinatene til D , $D(1, 9)$.

Svar: $x = 1, y = 9$



Oppgave 4 (6 poeng) [Nettkode: E-4QXY](#)

Funksjonen P er gitt ved

$$P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6$$

a)

Begrunn at $(1,0)$ er et vendepunkt på grafen til P .

Løsningsforslag a)

Vi vil bestemme om $(1,0)$ er et vendepunkt for grafen til $P(x)$. Først sjekker vi at punktet faktisk ligger på grafen, altså at $P(1) = 0$. Vi setter inn i for $x = 1$ i uttrykket. Da får vi

$$P(1) = 2(1)^3 - 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 6 = 2 - 6 - 2 + 6 = 0$$

. Det betyr at punktet ligger på grafen.

For at punktet skal være et vendepunkt må vi ha at $P''(1) = 0$ og at P'' skifter fortegn i $x = 1$. For å se om dette stemmer begynner vi med å derivere funksjonen to ganger.

$$P'(x) = (2x^3 - 6x^2 - 2x + 6)' = 2 \cdot 3x^2 - 6 \cdot 2x - 2 = 6x^2 - 12x - 2$$

$$P''(x) = (6x^2 - 12x - 2)' = 6 \cdot 2x - 12 = 12x - 12$$

Hvis vi setter inn for $x = 1$ i uttrykket for den andrederiverte får vi $P''(1) = 12 \cdot 1 - 12 = 0$.

Uttrykket til den andrederiverte $P''(x) = 12x - 12$ er likningen til ei rett linje. Da vet vi også at den vil skifte fortegn i nullpunktet sitt, og $(1,0)$ er et vendepunkt for grafen til P .

b)

Faktoriser $P(x)$ i lineære faktorer.

Løsningsforslag b)

Siden $(1,0)$ er et punkt på grafen til P vet vi at $(x - 1)$ er en faktor. Vi kan nå bruke polynomdivisjon for å finne de resterende faktorene. For enkelhets skyld faktoriserer vi ut 2 før vi gjennomfører polynomdivisjonen. Da får vi

$$P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 = 2(x^3 - 3x^2 - x + 3).$$

Vi regner da $x^3 - 3x^2 - x + 3 : x - 1$.

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x^2 - x + 3) : (x - 1) = x^2 - 2x - 3 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ -2x^2 - x \\ \underline{2x^2 - 2x} \\ -3x + 3 \\ \underline{3x - 3} \\ 0 \end{array}$$



Det betyr at vi kan skrive

$$2(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 2(x - 1)(x^2 - 2x - 3)$$

$x^2 - 2x - 3$ er ikke en lineær faktor, så denne må vi faktorisere videre. For å faktorisere dette andregraduttrykket bruker vi abc-formelen til å finne nullpunktene som vi kan bruke til å faktorisere. Da får vi

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 4}{2} \end{aligned}$$

Nullpunktene til $x^2 - 2x - 3$ er

$$x = \frac{2 + 4}{2} = 3, \quad x = \frac{2 - 4}{2} = -1$$

og vi har at $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x - (-1))$.

Dermed kan vi faktorisere

$$2(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 2(x - 1)(x^2 - 2x - 3) = 2(x - 1)(x + 1)(x - 3)$$

$$\underline{\underline{\text{Svar: } 2(x - 1)(x + 1)(x - 3)}}$$

c)

Løs likningen

$$2e^{3x} - 6e^{2x} - 2e^x + 6 = 0$$

Løsningsforslag c)

I oppgave b) så vi at vi kunne faktorisere $2(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 2(x - 1)(x + 1)(x - 3)$. Vi kan merke oss at $e^{3x} = (e^x)^3$, og $e^{2x} = (e^x)^2$. Nå kan vi skrive

$$2e^{3x} - 6e^{2x} - 2e^x + 6 = 2(e^x)^3 - 6(e^x)^2 - 2e^x + 6$$

og vi kan faktorisere slik at vi får

$$2(e^x)^3 - 6(e^x)^2 - 2e^x + 6 = 2((e^x)^3 - 3(e^x)^2 - e^x + 3) = 2(e^x - 1)(e^x + 1)(e^x - 3)$$



For at vi skal ha $2(e^x - 1)(e^x + 1)(e^x - 3) = 0$ må en av faktorene være lik 0.

Vi kan se på faktorene hver for seg. Vi får likningen $e^x - 1 = 0$, $e^x + 1 = 0$ og $e^x - 3 = 0$ som gir $e^x = 1$, $e^x = -1$ og $e^x = 3$. Her kan vi bruke den naturlige logaritmen til å løse likningen. Den har den egenskapen at $\ln e^x = x$. Vi begynner med $e^x = 1$, og tar vi $\ln$ på begge sider av likhetstegnet får vi at

$$\ln e^x = \ln 1 \Rightarrow x = 0$$

Siden $e^x > 0$ kan vi se bort i fra den andre likningen, $e^x = -1$.

Til slutt ser vi på $e^x = 3$, og igjen tar vi logaritmen på begge sider av likhetstegnet. Da får vi

$$\ln e^x = \ln 3 \Rightarrow x = \ln 3$$

Det betyr at løsningen til likningen $2e^{3x} - 6e^{2x} - 2e^x + 6 = 0$ er

$$x = 0 \text{ og } x = \ln 3$$

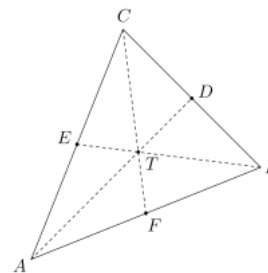
Svar: $x = 0$ og $x = \ln 3$



Oppgave 5 (6 poeng) [Nettkode: E-4QY2](#)

Hjørnene i en trekant er $A(1,0)$, $B(6,2)$ og $C(3,5)$.

Midtpunktene på sidene i trekanten er D , E og F . Se figuren.



a)

Forklar at koordinatene til punktene D , E og F er

$$D\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right), E\left(2, \frac{5}{2}\right) \text{ og } F\left(\frac{7}{2}, 1\right)$$

Løsningsforslag a)

For å finne koordinatene til D , E og F kan vi se på posisjonsvektorene $\vec{OD}$, $\vec{OE}$ og $\vec{OF}$. Vi begynner med å finne koordinatene til D . Da ser vi på $\vec{OD}$, den kan vi skrive som en sum av vektorene $\vec{OB}$ og $\vec{BD}$, altså har vi at

$$\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{BD}.$$

Vi har at $\vec{OB} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ og siden D er midtpunktet på BC får vi at

$$\vec{BD} = \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 - 6 \\ 5 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Nå kan vi regne ut $\vec{OD}$:

$$\vec{OD} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - \frac{3}{2} \\ 2 + \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix},$$

som gir $D\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

På tilsvarende måte får vi at

$$\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{AE}$$

der $\vec{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og

$$\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 - 1 \\ 5 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Da får vi



$$\vec{OE} = \begin{bmatrix} 1, 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1, \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2, \frac{5}{2} \end{bmatrix},$$

som gir $E\left(2, \frac{5}{2}\right)$.

Til slutt finner vi koordinatene til F ved å se på

$$\vec{OF} = \vec{OA} + \vec{AF}$$

der

$$\vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}[6 - 1, 2 - 0] = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}, 1 \end{bmatrix}$$

som gir at

$$\vec{OF} = \begin{bmatrix} 1, 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{2}, 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2}, 1 \end{bmatrix},$$

og $F\left(\frac{7}{2}, 1\right)$

Da har vi at D , E og F har punktkoordinatene $D\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $E\left(2, \frac{5}{2}\right)$ og $F\left(\frac{7}{2}, 1\right)$.

b)

Skjæringspunktet mellom medianene i trekanten er T .

Forklar at vi kan skrive $\vec{AT}$ på to måter:

$$\vec{AT} = s \cdot \vec{AD}$$

$$\vec{AT} = \vec{AB} + t \cdot \vec{BE}$$

der s og t er reelle tall.

Løsningsforslag b)

Det er flere muligheter for å gå fra A til C . Vi kan gå direkte fra A til T , og siden $\vec{AT}$ er parallell med $\vec{AD}$ har vi at

$$\vec{AT} = s \cdot \vec{AD},$$

der s er et reelt tall.

Vi kan også finne $\vec{AT}$ ved å gå via B . Da har vi at $\vec{AT} = \vec{AB} + \vec{BT}$, og siden $\vec{BT}$ er parallell med $\vec{BE}$ kan vi skrive $\vec{BT} = t \cdot \vec{BE}$, der t er et reelt tall. Det medfører at

$$\vec{AT} = \vec{AB} + t \cdot \vec{BE}.$$



c)

Bruk vektorlikningene i oppgave b) til å bestemme s og t . Bestem koordinatene til T .

Løsningsforslag c)

Fra oppgave b) har vi at

$$\vec{AT} = s \cdot \vec{AD}$$

og

$$\vec{AT} = \vec{AB} + t \cdot \vec{BE}$$

og det betyr at vi må ha

$$s \cdot \vec{AD} = \vec{AB} + t \cdot \vec{BE}.$$

Vi har at $\vec{AB} = \begin{bmatrix} 5, 2 \end{bmatrix}$,

$$\vec{AD} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} - 1, \frac{7}{2} - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

og at

$$\vec{BE} = \begin{bmatrix} 2 - 6, \frac{5}{2} - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4, \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Setter vi inn i likningen over får vi at

$$\begin{aligned} s \cdot \begin{bmatrix} \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5, 2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -4, \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{7}{2}s, \frac{7}{2}s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 - 4t, 2 + \frac{1}{2}t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

For at likningen må stemme må både førstekoordinatene og andre koordinatene være lik hverandre, så da får vi to likninger:

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{2}s = 5 - 4t \\ \frac{7}{2}s = 2 + \frac{1}{2}t \end{bmatrix}$$

Fra den andre likningen får vi at

$$s = \frac{2}{7} \left(2 + \frac{1}{2}t \right) = \frac{4}{7} + \frac{1}{7}t.$$

Setter vi inn for s i den første likningen får vi



$$\begin{aligned}\frac{7}{2}\left(\frac{4}{7} + \frac{1}{7}t\right) &= 5 - 4t \\ 2 + \frac{1}{2}t &= 5 - 4t \\ \frac{9}{2}t &= 3 \\ t &= \frac{2}{9} \cdot 3 \\ t &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Nå kan vi løse for s og får at

$$s = \frac{4}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12 + 2}{21} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}.$$

Vi får at $s = \frac{2}{3}$ og at $t = \frac{2}{3}$. For å finne koordinatene til T kan vi se på

$\vec{OT} = \vec{OA} + \vec{AT} = \vec{OA} + s\vec{AD}$. Vi har at $s\vec{AD} = \frac{2}{3}\left[\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right] = \left[\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right]$ som medfører at

$$\vec{OT} = \begin{bmatrix} 1, 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{7}{3}, \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3}, \frac{7}{3} \end{bmatrix}.$$

Svar: $T\left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$.



Oppgave 6 (4 poeng) [Nettkode: E-4QYA](#)

En fabrikk produserer lyspærer. Alle lyspærene blir kontrollert. I kontrollen blir 8,0 % av lyspærene forkastet. Nærmere undersøkelser viser at

- 92,0 % av de forkastede lyspærene er defekte
- 2,0 % av de godkjente lyspærene er defekte

a)

Vis at sannsynligheten er 9,2 % for at en tilfeldig produsert lyspære er defekt.

Løsningsforslag a)

Vi kan se på hendelsene

D: Lyspæren er defekt

G: Lyspæren blir godkjent i kontrollen

Vi har to mulige hendelser for defekte pærer, at den er defekt og godkjent, $G \cap D$, og at den er defekt og ble forkastet, $\overline{G} \cap D$. Disse hendelsene er disjunkte, så fra addisjonssetningen får vi at

$$P(D) = P(G \cap D) + P(\overline{G} \cap D).$$

Vi kan bruke produktsetningen til å finne $P(D \cap G)$ og $P(D \cap \overline{G})$. Fra produktsetningen får vi at

$$P(G \cap D) = P(G) \cdot P(D|G)$$

$$P(\overline{G} \cap D) = P(\overline{G}) \cdot P(D|\overline{G}).$$

Fra oppgaveteksten vet vi at sannsynligheten for at en lyspære ikke blir godkjent,

$$P(\overline{G}) = 8\% = 0,08,$$

og siden det er komplementet til at en lyspære blir godkjent, må vi ha

$$P(G) = 1 - P(\overline{G}) = 1 - 0,08 = 0,92.$$

Vi får også vite at 92% av de forkastede lyspærene er defekte. Det betyr at $P(D|\overline{G}) = 92\% = 0,92$. I tillegg får vi vite at 2% av de godkjente lyspærene er godkjent. Det betyr at

$$P(D|G) = 2\% = 0,02.$$

Nå kan vi finne sannsynligheten for at en lyspære er defekt ved å sette dette inn i likningene over

$$\begin{aligned} P(D) &= P(G \cap D) + P(\overline{G} \cap D) \\ &= P(G) \cdot P(D|G) + P(\overline{G}) \cdot P(D|\overline{G}) \\ &= 0,92 \cdot 0,02 + 0,08 \cdot 0,92 \\ &= 0,92(0,02 + 0,08) = 0,92 \cdot 0,1 \\ &= 0,092 = 9,2\% \end{aligned}$$

som var det vi ville vise.



b)

Bruk Bayes' setning til å bestemme sannsynligheten for at en defekt lyspære blir forkastet i kontrollen.

Løsningsforslag b)

I denne oppgaven skal vi bruke Bayes' setning til å finne sannsynligheten for at en defekt pære blir forkastet, altså $P(\overline{G}|D)$. Fra Bayes' setning har vi at $P(\overline{G}|D) = \frac{P(\overline{G}) \cdot P(D|\overline{G})}{P(D)}$. Disse sannsynlighetene fant vi i a) og kan sette inn i uttrykket. Da får vi

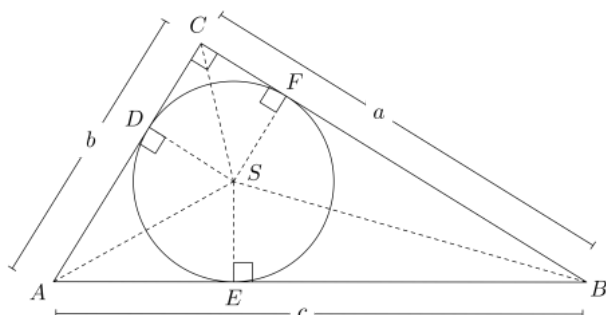
$$P(\overline{G}|D) = \frac{0,08 \cdot 0,92}{0,092} = 0,08 \cdot 10 = 0,8 = 80\%.$$

Svar: Sannsynligheten er 80%.



Oppgave 7 (7 poeng) Nettkode: E-4QYD

En rettvisklet $\triangle ABC$ der $\angle C = 90^\circ$ er gitt. Den innskrevne sirkelen har sentrum S og radius r . Sirkelen tangerer trekanten i punktene D , E og F . Vi setter $AC = b$, $BC = a$ og $AB = c$. Du får oppgitt at $BF = BE$ og $AD = AE$.



a)

Bruk figuren til å forklare at $a = BF + r$ og $b = AD + r$.

Løsningsforslag a)

Vi kan skrive $a = CF + BF$ og $b = CD + AD$, og vil vise at $CF = CD = r$. Da kan vi se på $\square CDSF$. DS og FS er radier i sirkelen med sentrum S og dermed har vi at

$$DS = FS = r.$$

Fra figuren ser vi at $\square CDSF$ har tre rette vinkler og fra vinkelsummen til en firkant vet vi at de siste vinkelen også må være 90° . Det betyr at vi har et kvadrat, så

$$CD = CF = DS = FS = r$$

og $a = r + BF$ og $b = r + AD$ som var det vi ville vise.

b)

Av figuren ser vi dessuten at $c = AE + BE$.

Vis at $a + b - c = 2r$.

Løsningsforslag b)

Fra oppgave a) har vi at $a = BF + r$ og at $b = AD + r$. I tillegg har vi at $c = AE + BE$. I oppgaveteksten får vi vite at $AD = AE$ og $BF = BE$, som betyr at vi kan skrive $c = AD + BF$. Skriver vi inn uttrykkene for a , b og c får vi da

$$a + b - c = (BF + r) + (AD + r) - (AD + BF) = 2r + BF + AD - AD - BF = 2r$$

som var det vi ville vise.



c)

Forklar at vi kan skrive arealet T av trekanten på to måter:

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \quad \text{og} \quad T = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a + b + c)$$

Løsningsforslag c)

Vi begynner med å se på hele trekanten. Arealet til en trekant med grunnlinje g og høyde h er gitt ved $\frac{1}{2}g \cdot h$. For $\triangle ABC$ har vi at BC står vinkelrett på AC , så vi kan skrive $g = BC = a$ og $h = AC = b$. Det betyr at arealet er gitt ved

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b.$$

Da har vi vist den første formelen.

Vi kan også se at $\triangle ABC$ kan deles opp i tre trekanten, $\triangle BSC$, $\triangle ASC$ og $\triangle ASB$, med henholdsvis a , b og c som grunnlinje. Alle de tre trekantene har en radius stående vinkelrett på, så trekantene har høyde r . Da har vi at arealet til $\triangle BSC$ er gitt ved $A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r$, arealet til $\triangle ASC$ er gitt ved $A_2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r$ og arealet til $\triangle ASB$ er gitt ved $A_3 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot r$. Arealet til $\triangle ABC$ er summen av disse, så vi har at

$$\begin{aligned} T &= A_1 + A_2 + A_3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot r + \frac{1}{2} \cdot b \cdot r + \frac{1}{2} \cdot c \cdot r \\ &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a + b + c) \end{aligned}$$

Dette viser den andre formelen vi skulle vise.

d)

Bruk resultatene du fant i oppgavene b) og c) til å utlede Pytagoras' setning.

Løsningsforslag d)

Pytagoras læresetning sier at for en rettvinklet trekant med kateter a og b og hypotenus C har vi at $a^2 + b^2 = c^2$. Så det er dette uttrykket vi vil frem til. I oppgave c) har vi at $T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ og $T = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a + b + c)$. Det betyr at vi må ha

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a + b + c).$$



Vi vet også fra oppgave b) at $a + b - c = 2r$, som gir at $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$. Vi kan sette inn for r i likningen. Da får vi

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (a + b - c) \cdot (a + b + c).$$

Videre kan multiplisere med 4 og multiplisere ut parentesene.

$$\begin{aligned} 2ab &= (a + b - c) \cdot (a + b + c) \\ &= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc - ca - cb - c^2 \\ &= a^2 + b^2 - c^2 + 2ab \end{aligned} .$$

Subtraherer vi $2ab$ fra begge sider og flytter c^2 over står vi igjen med

$$c^2 = a^2 + b^2$$

som var det vi ville frem til.



DEL 2 Med hjelpemidler



Oppgave 1 (6 poeng) Nettkode: E-4QYS

I en kortstokk er det 52 kort. Kortene er fordelt på de fire fargene hjerter, ruter, spar og kløver. Hver farge har 13 kort fordelt på verdiene 2 til 10, knekt, dame, konge og ess. Tenk deg at du skal trekke tilfeldig fem kort fra kortstokken.

a)

Bestem sannsynligheten for at du kommer til å trekke nøyaktig tre kort med verdi 10.

Løsningsforslag a)

Vi vil finne sannsynligheten for å trekke nøyaktig 3 kort med verdi 10. Siden sannsynligheten er uniform, kan vi finne den ved å regne $\frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}}$. Vi kan begynne med å se på antall mulige. Rekkefølgen vi trekker spiller ingen rolle, så vi har et uordnet utvalg uten tilbakelegging, og vi skal velge 5 kort av 52. Antall utvalg finner vi da ved

$$\binom{52}{5} = 2598960.$$

I kortstokken er det totalt 4 kort med verdi 10 og vi skal velge 3 av de. Det kan vi velge på $\binom{4}{3}$ ulike måter. I tillegg skal vi trekke 2 kort som ikke har verdi 10, altså må vi velge 2 kort blant de 48 kortene som har verdi forskjellig fra 10. Det kan vi gjøre på $\binom{48}{2}$ måter. Hvert enkelt av de $\binom{4}{3}$ måtene kan kombineres med de $\binom{48}{2}$, så antall gunstige utfall er

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{2} = 4512.$$

Sannsynligheten for nøyaktig 3 kort med verdi 10 er dermed

$$P(\text{tre kort med verdi 10}) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{4512}{2598960} \approx 0,0017 = 0,17\%.$$

Svar: 0,17%.

ALTERNATIV LØSNING

b)

Bestem sannsynligheten for at du kommer til å trekke nøyaktig tre kort med samme verdi.



Løsningsforslag b)

Sannsynligheten for å trekke nøyaktig tre kort med samme verdi er den samme for alle verdier, og fra oppgave a) vet vi

$$\frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{2}}{\binom{52}{5}}.$$

Det er 13 forskjellige kortverdier, så vi kan trekke tre kort med samme verdi på 13 måter. Da får vi

$$P(\text{tre kort med samme verdi}) = 13 \cdot \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} \approx 0,023 = 2,3\%.$$

Svar: 2,3%

c)

Bestem sannsynligheten for at alle kortene du kommer til å trekke, har samme farge.



Figur 1: Ett mulig utfall i oppgave a)



Figur 2: Ett mulig utfall i oppgave b)



Figur 3: Ett mulig utfall i oppgave c)

Løsningsforslag c)

Vi skal fortsatt trekke 5 kort fra kortstokken, så antall mulige utvalg er det samme som i oppgave a), $\binom{52}{5}$. Antall gunstige utfall er nå annerledes. Vi vil trekke 5 kort med samme farge. Utfra Figur 3, antar vi at de med farge skiller mellom ruter og hjerter, og kløver og spar. I kortstokken er det 13 kort av hver farge, og vi skal velge 5. Det kan vi gjøre på $\binom{13}{5} = 1287$ måter. Vi kan velge disse kortene på 4 forskjellige måter, en for hver av fargene. Dermed er

$$P(\text{fem kort i samme farge}) = 4 \cdot \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = 4 \cdot \frac{1287}{2598960} \approx 0,002 = 0,2\%.$$

Svar: 0,2%



Oppgave 2 (6 poeng) [Nettkode: E-4QYW](#)

Posisjonsvektoren til en partikkel er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [t^2 - 1, t^3 - t]$$

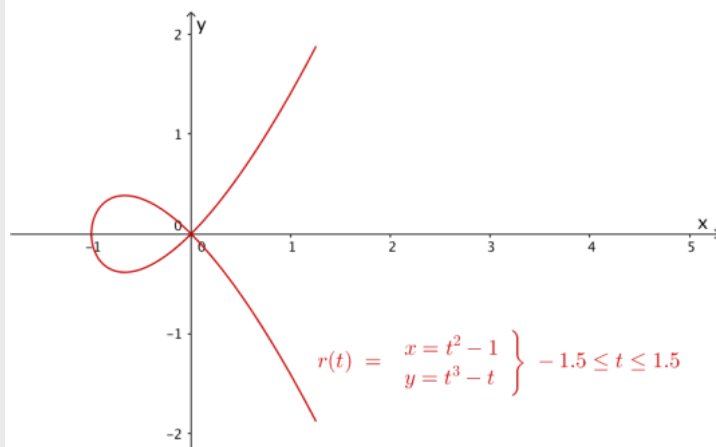
a)

Tegn grafen til $\vec{r}$ når $t \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

Løsningsforslag a)

For å tegne grafen til $\vec{r}$ kan vi bruke kommandoen `Kurve[<Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt>]` i GeoGebra. Da skriver vi inn $r = \text{kurve}[t^2 - 1, t^3 - t, t, -3/2, 3/2]$. Vi husker å sette navn på aksene.

Svar:



b)

Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t)$.

Løsningsforslag b)

Fart er endring i posisjon per tidsenhet og akselerasjon er endring i fart per tidsenhet. For å finne fartsvektoren $\vec{v}(t)$ kan vi derivere $\vec{r}(t)$, og for å finne akselerasjonsvektoren kan derivere fartsvektoren $\vec{v}(t)$. Vi kan bruke CAS til å derivere. For å se hvordan vi kan gjøre det ved regning, se alternativ. Vi velger "CAS" i "Vis"-menyen i GeoGebra. Fartsvektoren finner vi ved å skrive inn

$$v(t) := r'(t)$$



og akselerasjonsvektoren ved å skrive

$$\mathbf{a}(t) := \mathbf{v}'(t).$$

Da får vi

CAS	
1	$\mathbf{v}(t) := \mathbf{r}'(t)$ $\rightarrow \mathbf{v}(t) := (2t, 3t^2 - 1)$
2	$\mathbf{a}(t) := \mathbf{v}'(t)$ $\rightarrow \mathbf{a}(t) := (2, 6t)$

Svar: $\vec{v}(t) = [2t, 3t^2 - 1]$ og $\vec{a}(t) = [2, 6t]$.

c)

Bruk CAS til å bestemme den minste banefarten til partikkelen.

Løsningsforslag c)

Banefarten er gitt ved absoluttverdien til fartsvektoren. Vi kan betegne banefarten som f , og får da at $f(t) = |\vec{v}'(t)|$ er en funksjon for banefart. For å bestemme den minste banefarten til partikkelen kan vi finne bunnpunktet til f . Vi kan begynne med å definere f i CAS. Fortsetter vi i samme CAS-vindu som i oppgave b), der vi allerede har definert $v(t)$ kan vi skrive inn

$$f(t) := \text{abs}(\mathbf{v}(t))$$

Bunnpunkter til en funksjon er et ekstremalpunkt, og nå kan vi bruke kommandoen ekstremalpunkt for å finne bunnpunktet til f . Da skriver vi inn

Ekstremalpunkt[f].

3	$f(t) := \text{abs}(\mathbf{v}(t))$ $\rightarrow f(t) := \sqrt{9t^4 - 2t^2 + 1}$
4	$\text{Ekstremalpunkt}[f]$ $\rightarrow \left\{ \left(-\frac{1}{3}, 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \right), (0, 1), \left(\frac{1}{3}, 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right\}$

Her kan vi se at f har tre ekstremalpunkt, for $t = -\frac{1}{3}$, $t = 0$ og $t = \frac{1}{3}$, der $f(0) = 1$ og $f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{3}$. Vi vil finne det ekstremalpunktet som har minst verdi, og har at $2\frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,943 < 1$. Det betyr at banefarten er minst for $t = \frac{1}{3}$ og $t = -\frac{1}{3}$, og da er den $2\frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,94$.

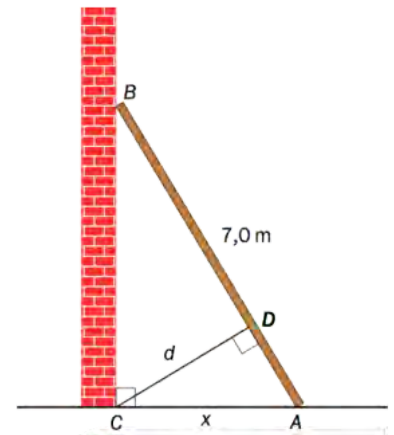
Svar: Den minste banefarten til partikkelen er omtrent 0,94.



Oppgave 3 (4 poeng) [Nettkode: E-4QZ0](#)

En stige på 7,0 m er stilt opp langs en vegg. Stigen danner sammen med vegg og bakken en rettvinklet $\triangle ABC$. Se figuren.

Vi setter $AC = x$. Den korteste avstanden fra C til stigen er d meter.



a)

Vis at $d = \frac{x\sqrt{49-x^2}}{7}$

Løsningsforslag a)

Vi kan begynne med å se på de to trekantene $\triangle ABC$ og $\triangle ACD$. Begge trekantene har $\angle A$ til felles og begge har en rett vinkel. Det betyr at $\triangle ABC \sim \triangle ACD$. I formlike trekanter er forholdet mellom tilsvarende sider konstant, og det betyr at vi har at

$$\frac{CD}{BC} = \frac{AC}{AB}.$$

Vi har at $CD = d$, $AC = x$ og $AB = 7$. For å finne et uttrykk for BC kan vi se på $\triangle ABC$ og bruke Pytagoras læresetning. Da har vi at

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ BC &= \sqrt{AB^2 - AC^2} \\ BC &= \sqrt{7^2 - x^2} \end{aligned}$$

Nå kan vi sette inn uttrykk for sidene og da får vi at

$$\frac{d}{\sqrt{7^2 - x^2}} = \frac{x}{7} \Rightarrow d = \frac{x\sqrt{7^2 - x^2}}{7} = \frac{x\sqrt{49 - x^2}}{7}$$

som var det vi ville vise.



b)

Bestem x slik at d blir lengst mulig.

Hvor lang er d for denne verdien av x ?

Løsningsforslag b)

Vi kan bruke uttrykket vi fant i oppgave a) til å skrive d som en funksjon av x , $d(x) = \frac{x\sqrt{49-x^2}}{7}$. Vi vil

finne når denne funksjonen har størst verdi, og da kan vi bruke CAS. Først definerer vi funksjonen ved å skrive inn

$$d(x) := x * \text{sqrt}(49 - x^2) / 7$$

Vi finner ekstremalpunktene til d ved å bruke kommandoen Ekstremalpunkt, og skriver

`Ekstremalpunkt[d]`

og får opp

1	$d(x) := x * \text{sqrt}(49 - x^2) / 7$ $\rightarrow d(x) := \frac{1}{7} x \sqrt{-x^2 + 49}$
2	<code>Ekstremalpunkt[d]</code> $\rightarrow \left\{ \left(-\frac{7}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{2} \right), \left(\frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{7}{2} \right) \right\}$

Vi har to ekstremalpunkter, ett i $x = -\frac{7}{\sqrt{2}}$ og ett i $x = \frac{7}{\sqrt{2}}$. Den negative x -verdien kan vi utelukke siden vi ikke kan ha negative lengder.

Vi bruke 2. derivert test ved hjelp av CAS i Geogebra for å sjekke om $\frac{7}{\sqrt{2}}$ er toppunkt. I ekstremalpunktene er den deriverte lik null. Dersom 2. deriverte er negativ i et ekstremalpunkt, så er den deriverte avtagende og vil skifte fortegn i dette punktet. Den går fra å være positiv til å være negativ. Grafen ser dermed konkav ut og punktet er et toppunkt.

Vi skriver inn påstanden $d''\left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right) < 0$ i CAS og sjekker om vi får "true" eller "false" i retur.

3	$d''(7/\sqrt{2}) < 0$ $\rightarrow \text{true}$
4	

Det gir at d har toppunkt for $x = \frac{7}{\sqrt{2}}$. Den maksimale lengden til d er dermed gitt ved

$$d\left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right) = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Svar: d er lengst når $x = \frac{7}{\sqrt{2}} \approx 4,95$ m og da er $d = 3,5$ m.



Oppgave 4 (8 poeng) [Nettkode: E-4QZ7](#)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x$$

a)

Bruk graftegner til å tegne grafen til f .

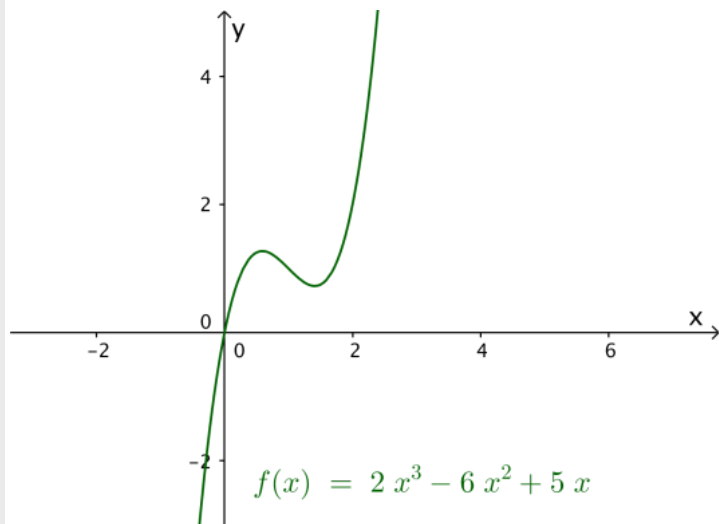
Løsningsforslag a)

Vi tegner grafen til f ved hjelp av GeoGebra. Da skriver vi inn

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x$$

i Skriv-inn-feltet og setter navn på aksene. Resultatet er som vist under.

Svar:



b)

Grafen til f har tre tangenter som går gjennom punktet $A(4,3)$.

Forklar at x -koordinaten til tangeringspunktene må være løsning av likningen

$$\frac{f(x) - 3}{x - 4} = f'(x)$$



Løsningsforslag b)

Vi skal se på tangeringspunktene, $(x, f(x))$, hvis tangent går gjennom punktet $A(4, 3)$. Stigningstallet til tangenten gjennom $(x, f(x))$ er gitt ved $f'(x)$. Vi kan også finne stigningstallet ved å se på forholdet mellom endring i y -verdi og endring i x -verdi, og siden tangenten går gjennom punktene $(4, 3)$ og $(x, f(x))$ også være gitt ved $\frac{f(x)-3}{x-4}$, det betyr at vi må ha

$$f'(x) = \frac{f(x) - 3}{x - 4}$$

og x -koordinaten i disse tangeringspunktene må tilfredstille likningen over.

c)

Bruk CAS til å løse denne likningen. Bestem likningen til hver av tangentene.

Løsningsforslag c)

Vi kan bruke samme GeoGebra-vindu som i oppgave a), og velger CAS i "Vis"-menyen. Først kan vi skrive inn $f(x)$ for å sjekke at funksjonen får er definert. Videre kan vi bruke Løs kommandoen for å løse likningen fra oppgave c). Da skriver vi inn $\text{Løs}[(f(x) - 3)/(x - 4) = f'(x)]$. Da får vi opp punktene

$$x = \frac{1}{2}, x = \frac{-\sqrt{15} + 7}{2} \text{ og } x = \frac{\sqrt{15} + 7}{2}.$$

CAS	
1	$f(x)$ $\rightarrow 2x^3 - 6x^2 + 5x$
2	$\text{Løs}[(f(x)-3)/(x-4)=f'(x)]$ $\rightarrow \left\{ x = \frac{1}{2}, x = \frac{-\sqrt{15} + 7}{2}, x = \frac{\sqrt{15} + 7}{2} \right\}$

Det betyr at vi vil finne tangenten gjennom punktene

$$\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right) \right), \left(\frac{-\sqrt{15} + 7}{2}, f\left(\frac{-\sqrt{15} + 7}{2}\right) \right) \text{ og } \left(\frac{\sqrt{15} + 7}{2}, f\left(\frac{\sqrt{15} + 7}{2}\right) \right)$$

Nå kan vi bruke kommandoen $\text{Tangent}[\langle \text{Punkt} \rangle, \langle \text{Funksjon} \rangle]$ for hvert av punktene. Da skriver vi inn

$\text{Tangent}\left[\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right), f\right]$

$\text{Tangent}\left[\left(\frac{\sqrt{15} + 7}{2}, f\left(\frac{\sqrt{15} + 7}{2}\right)\right), f\right]$

$\text{Tangent}\left[\left(\frac{-\sqrt{15} + 7}{2}, f\left(\frac{-\sqrt{15} + 7}{2}\right)\right), f\right]$

Trykker vi på $\approx$ -knappen får vi en avrundet likning for tangenten.



3	Tangent[(1 / 2, f(1 / 2)),f] → $y = \frac{1}{2}x + 1$
4	Tangent[((-sqrt(15) + 7) / 2, f((-sqrt(15) + 7) / 2)),f] → $y = (-15\sqrt{15} + 59)x + 60\sqrt{15} - 233$
5	\$4 = $y = 0.91x - 0.62$
6	Tangent[(sqrt(15) + 7) / 2, f(sqrt(15) + 7) / 2),f] → $y = (15\sqrt{15} + 59)x - 60\sqrt{15} - 233$
7	\$6 = $y = 117.09x - 465.38$

Likningen til tangentene som går gjennom $A(4, 3)$ er

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

$$y = 0,91x - 0,62$$

$$y = 117,09x - 465,38$$

Svar: $y = \frac{1}{2}x + 1$, $y = 0,91x - 0,62$ og $y = 117,09x - 465,38$.

d)

La $P(a, b)$ være et punkt i planet.

Hva er det maksimale antallet tangenter grafen til f kan ha som går gjennom P ?

Løsningsforslag d)

Vi kan bruke likningen fra oppgave b), men vi setter inn a og b i stedet for 4 og 3. Da får vi at de punktene på f som har tangent som går gjennom $P(a, b)$ har x -koordinat som tilfredstiller likningen

$$\frac{f(x) - b}{x - a} = f'(x) \Rightarrow f(x) - b - f'(x)(x - a) = 0.$$

Vi har at $f(x)$ er en tredjegradsfunksjon og $f'(x)$ må være en andregradsfunksjon som vi multipliserer med en lineær faktor. Det betyr at dette må være en tredjegradslikning, og den kan maksimalt ha tre løsninger, som betyr at grafen til f kan maksimalt ha tre tangenter som går gjennom P .

Svar: 3 tangenter.

