REA3024 2016 HØST

Eksamenstid
5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 3 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler på del 1
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler

Hjelpemidler på del 2
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte
Del 1 har 7 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.

Veiledning om vurderingen
Poeng i del 1 og del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger
Kilder for bilder, tegninger osv.:

- Befolkning: www.dagbladet.no (06.05.2016)
- Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng) Nettkode: E-4PBT

Deriver funksjonene

$f(x) = 3\cos 2x$

Løsningsforslag

Vi har $f(x) = 3\cos(2x)$ som er en sammensatt funksjon. Da kan vi bruke kjerneregelen for derivasjon som sier at den deriverte av en sammensatt funksjon

$$[f(u(x))]' = f'(u(x))u'(x)]$$

Vi kan sette $u(x) = 2x$.

$$\begin{aligned} u'(x) &= (2x)' &= 2 \\ f'(u) &= (3\cos u)' &= -3\sin u \end{aligned}$$

Når vi regner ut ved å bruke kjerneregelen får vi

$$\begin{aligned} f'(u(x)) &= f'(u(x))u'(x) \\ &= -3\sin u \cdot 2 \\ &= -6\sin(2x) \end{aligned}$$

Svar:$\underline{\underline{f'(x) = -6\sin(2x)}}$

b)

$g(x) = e^{\sin x}$

Løsningsforslag b)

Vi kan bruke kjerneregelen da kan vi velge $u(x) = \sin x$ som kjerne. Kjerneregelen gir da

$$\begin{aligned} g(u(x)' &= g'(u) \cdot u'(x) \\ &= (e^u)' \cdot (\sin x)' \\ &= e^u \cdot \cos x \\ &= e^{\sin x} \cdot \cos x \end{aligned}$$

Svar:$\underline{\underline{g'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x}}$

c)

$h(x) = \frac{x}{\sin x}$

Løsningsforslag c)

Brøkregelen for derivasjon sier at for to deriverbare funksjoner $u(x)$ og $v(x)$ er

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Vi kan sette $u(x) = x$ og $v(x) = \sin x$. Vi har at $u'(x) = 1$ og $v'(x) = \cos x$. Da følger det at

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{x}{\sin x} \\ &= \frac{x' \sin x - x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{h'(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}}}$

Oppgave 2 (5 poeng) Nettkode: E-4PBX

Bestem integralene

a)

$\int \left(x^2 - 3x + 2\right) \mathrm{dx}$

Løsningsforslag a)

Vi kan integrere leddene i polynomet hver for seg, så vi kan skrive

$$\int \left(x^2 - 3x + 2\right) dx = \int x^2 dx + \int \left(-3x\right) dx + \int 2\, dx$$

Når C er en konstant kan vi skrive $\int Cf\left(x\right) dx = C \int f\left(x\right) dx$, da får vi

$$\int \left(x^2 - 3x + 2\right) dx = \int x^2\, dx - 3 \int x\, dx + 2 \int 1\, dx$$

Integralet av en funksjon x^n er $\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$.

Nå kan vi regne ut

$$\begin{aligned} \int \left(x^2 - 3x + 2\right) dx &= \int x^2 dx - 3 \int x dx + 2 \int 1\, dx \\ &= \tfrac{1}{3}x^3 + C_1 - \tfrac{3}{2}x^2 + C_2 + 2x + C_3 \\ &= \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + 2x + C \end{aligned}$$

Her har vi satt $C = C_1 + C_2 + C_3$.

Svar: $\int \left(x^2 - 3x + 2\right) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$

Løsningsforslag b)

Delvis integrasjon sier at hvis vi har to deriverbare funksjoner $u(x)$ og $v(x)$ så er

$$\int u\left(x\right)v'\left(x\right)\,dx = u\left(x\right)v\left(x\right) - \int u'\left(x\right)v\left(x\right)\,dx$$

Ved å sette $u(x) = x$ og $v'(x) = \cos x$ får vi $u'(x) = 1$ og $v(x) = \sin x$. Da har vi at

$$\begin{aligned}
\int x\cos x dx &= \int u(x)v'(x)\,dx \\
&= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx \\
&= x\sin x + C_1 - \int 1\sin x\,dx \\
&= x\sin x + C_1 + \cos x + C_2 \\
&= x\sin x + \cos x + C
\end{aligned}$$

der $C = C_1 + C_2$

Svar: $\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + C$

c)

$\int 2x\ \sin x^2\ \ \mathrm{dx}$

Løsningsforslag c)

Vi kan prøve å løse integralet ved å bruke substitusjon. Regelen for intergrasjon sier at dersom vi har $F' = f$ og u er deriverbar, så er

$\int f\left(u\left(x\right)\right) \cdot u'\left(x\right)\,dx = \int F\left(u(x)\right)\ + C$

Sinusfunksjonen har en kjerne x^2, så vi kan prøve med $u\left(x\right) = x^2$. Da blir $u'(x) = 2x$, og vi får følgende utregning:

$$\int 2x\sin x^2\,dx = \int \sin u \cdot u'\left(x\right)\,dx = \int \sin u\,du = -\cos u + C$$

Nå kan vi sette inn $u = u\left(x\right) = x^2$. Resultatet av integrasjonen blir da

$\int 2x\ \sin x^2\ dx = -\cos x^2\ + C$

Svar: $\int 2x\ \sin x^2\ dx = -\cos x^2\ + C$

Oppgave 3 (4 poeng) Nettkode: E-4PC1

En rett linje går gjennom $A(0,0)$ og $B(h,r)$ der h og r er to positive tall.

a)
Bestem ligningen for linjen, uttrykt ved h og r.

Løsningsforslag a)

Linjen går gjennom $A(0,0)$, så den krysser y-aksen i 0, så $b = 0$.

Stigningstallet kan vi finne ved å dividere hvor mye grafen vokser i y-retning, r, på hvor mye den vokser i x-retning, h, da finner vi får vi

$f(x) = \frac{r}{h}x$

Svar: $\underline{\underline{f(x) = \frac{r}{h}x}}$

b)
Linjestykket AB roteres 360° om x-aksen. Vi får da et omdreiningslegeme.

Bestem et uttrykk for volumet til omdreiningslegemet.
Hva slags legeme har du regnet ut volumet til?

Løsningsforslag b)

I deloppgave b) fant vi at linjen gjennom punktene A og B kan uttrykkes ved $f(x) = \frac{r}{h}x$.

Nå skal vi bare se på linjestykket AB. Det avgrenses av $x = 0$ og $x = h$. For å finne volumet til omdreiningslegemet, bruker vi at $h > 0$ og får

$$V = \pi \int_0^h \left(f\left(x\right)\right)^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}\right)^2 x^2\, dx$$

Siden $\frac{r}{h}$ er en konstant, kan vi trekke den utenfor integralet. Vi kan bruke regelen for integralet til x^n er $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ og da kan vi finne volumet V ved å regne ut

$$\begin{aligned}
\pi \cdot \int_0^h \left(\tfrac{r}{h}\right)^2 x^2 dx &= \pi\left(\tfrac{r}{h}\right)^2 \int_0^h x^2 dx \\
&= \pi \cdot \left(\tfrac{r}{h}\right)^2 \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^h \\
&= \tfrac{\pi \cdot r^2}{h^2}\left(\tfrac{1}{3}h^3 - \tfrac{1}{3}0^3\right) \\
&= \pi \cdot \tfrac{r^2}{h^2} \cdot \tfrac{1}{3}h^3 \\
&= \tfrac{\pi \cdot h \cdot r^2}{3}
\end{aligned}$$

Volumet til omdreiningslegemet kan uttrykkes ved $V = \frac{\pi \cdot h \cdot r^2}{3}$.

Dette er formelen for volumet til en kjegle. Den vil ha toppunkt i $(0,0)$, høyde h og akse langs x-aksen.

Svar: $V = \frac{\pi \cdot h \cdot r^2}{3}$ og er volumet til en kjegle.

Oppgave 4 (6 poeng) Nettkode: E-4P7A

En funksjon f er gitt ved

$$f\left(x\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 5,\ D_f = \left\langle 0, 12 \right\rangle$$

a)

Bestem perioden til f.

Løsningsforslag a)

Funksjonen $f(x)$ er på formen

$A\sin(cx + \varphi) + d$

med $c = \frac{\pi}{2}$. Perioden er derfor

$$p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

Svar: Perioden til f er 4.

b)

Bestem ekstremalverdiene y_{min} og y_{maks}.

Løsningsforslag b)

Siden $D_f = \langle 0, 12 \rangle$ vil den harmoniske funksjonen gjennomløpe 3 fulle perioder, og dermed oppnå ekstremalverdienen

$3 \cdot (\pm 1) + 5 = 5 \pm 3$.

Dette gir $y_{min} = 2$ og $y_{\text{maks}} = 8$.

Svar: $y_{min} = 2$ og $y_{\text{maks}} = 8$

c)
Forklar hvorfor grafen vil ha alle sine vendepunkter på likevektlinjen. Bestem koordinatene til vendepunktene.

Løsningsforslag c)

Vendepunktene til $f(x)$ kan vi finne ved å finne ut når $f''(x) = 0$.

Da kan vi begynne med $f'(x)$. For å derivere $f(x)$ kan vi bruke kjerneregelen, med $u(x) = \frac{\pi}{2}x$ som kjerne. Utregning gir da

$$f'(x) = (3\sin(u) + 5)' = 3\cos u \cdot (u)'\tfrac{\pi}{2} = \tfrac{3\pi}{2}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)$$
$$= 3\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) \cdot \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{3\pi}{2}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)$$

Vi kan derivere dette uttrykket igjen for å finne $f''(x)$. Da kan vi bruke samme kjerne.

$$f''(x) = \left(\tfrac{3\pi}{2}\cos u\right)' = \tfrac{3\pi}{2}(-\sin u) \cdot u'$$
$$= \tfrac{3\pi}{2}\left(-\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)\right) \cdot \tfrac{\pi}{2} = -\tfrac{3\pi^2}{4}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)$$

$f''(x) = 0$ når $\sin\frac{\pi}{2}x = 0$. For at dette skal være tilfelle må vi ha

$$\tfrac{\pi}{2}x = k\pi \qquad \Rightarrow \qquad x = 2k$$

Da må x-koordinaten til vendepunktet være $2k$. Siden $D_f = \langle 0, 12\rangle$ må vi ha $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

For å finne y-verdien til vendepunktene setter vi inn for $x = 2k$ i $f(x)$

$$f(2k) = 3\sin\left(\tfrac{2\pi k}{2}\right) + 5 = 5$$

Sinusuttrykket blir da lik 0, og y-verdiene til koordinatene til vendepunktene er 5 og dermed ser vi at alle vendepunktene ligger på likevektslinjen.

Svar: Vendepunktene har koordinater $(2k, 5)$, der $k = 1{,}2{,}3{,}4{,}5$

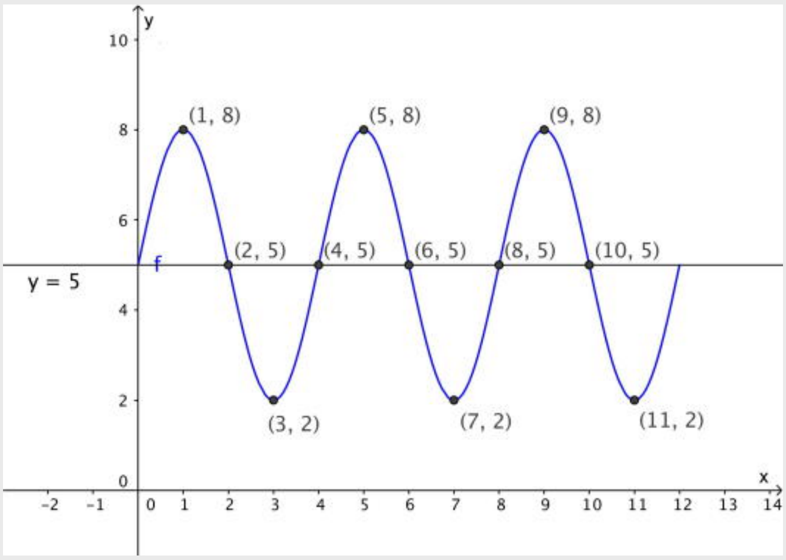
d)

Lag en skisse av grafen til f.

Løsningsforslag d)

Fra deloppgave c) vet vi at likevektslinjen til f er $y = 5$. Vi vet også at $y_{maks} = 8$. Denne verdien fikk vi når $\sin \frac{\pi}{2}x = 1$, for eksempel hvis $\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2}$ så $x = 1$. Siden perioden $p = 4$ har vi y_{maks} når $x = 1 + 4n$, altså for $x = 5$ og $x = 9$. Minimumspunktene, når $f(x) = y_{min}$ vil ligge midt i mellom to maksimumspunkt, så vi $f(x) = y_{min}$ når $x = 3 + 4n$, altså $x = 3, x = 7$ og $x = 11$. I tillegg vet vi at vi har vendepunkt i $(2k, 5)$, for $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Nå kan vi tegne inn de punktene vi har og skissere grafen som går gjennom disse punktene.

Svar:



Oppgave 5 (5 poeng) Nettkode: E-4PC4

Vi har gitt differensialligningen

$$y'' - 4y' - 5y = 0$$

a)

Vis at $y = e^{rx}$ er en løsning til differensiallikningen når $r^2 - 4r - 5 = 0$.

Løsningsforslag a)

Dersom $y = e^{rx}$ er en løsning av ligningen $y'' - 4y' - 5y = 0$, må vi ha at $(e^{rx})'' - 4(e^{rx})' - 5e^{rx} = 0$.

Vi kan derivere e^{rx} ved å bruke kjerneregelen med $u(x) = rx$ som kjerne. Det gir at

$$\left(e^{rx}\right)' = \left(e^{u(x)}\right)' = \left(e^{u}\right)' \cdot u'\left(x\right) = \left(e^{u}\right)' \cdot \left(rx\right)' = e^{u} \cdot r = r \cdot e^{rx} .$$

Tilsvarende får vi

$$\left(e^{rx}\right)'' = \left(r \cdot e^{rx}\right)' = r \cdot \left(e^{rx}\right)' = r \cdot r \cdot e^{rx} = r^2 e^{rx} .$$

Nå kan vi sette inn i ligningen

$$\left(e^{rx}\right)'' - 4\left(e^{rx}\right)' - 5e^{rx} = r^2 e^{rx} - 4re^{rx} - 5e^{rx} .$$

Ved å faktorisere ut e^{rx} får vi

$$r^2 e^{rx} - 4re^{rx} - 5e^{rx} = \left(r^2 - 4r - 5\right)e^{rx} .$$

Siden $\left(r^2 - 4r - 5\right) = 0$ må også $\left(r^2 - 4r - 5\right)e^{rx} = 0$ som betyr at e^{rx} er en løsning av ligningen.

Svar: $y = e^{rx}$ er en løsning.

b)

Bestem den generelle løsningen til differensialligningen.

Løsningsforslag b)

Siden $r^2 - 4r - 5 = 0$ er den karakteristiske likningen til differensiallikningen, vil vi finne for hvilken r denne likningen stemmer. Da kan vi bruke andregradsformelen

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

med $a = 1$, $b = -4$ og $c = -5$.

b)

Bestem den generelle løsningen til differensialligningen.

Løsningsforslag b)

Siden $r^2 - 4r - 5 = 0$ er den karakteristiske likningen til differensiallikningen, vil vi finne for hvilken r denne likningen stemmer. Da kan vi bruke andregradsformelen

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

med $a = 1$, $b = -4$ og $c = -5$.

Det gir

$$\begin{aligned} r &= \frac{-\left(-4\right) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 6}{2} \end{aligned}$$

$r_1 = 5$ og $r_2 = -1$

Den karakteristiske ligningen har to reelle røtter, så da er den generelle løsningen på formen

$$y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$$

Setter vi inn for r_1 og r_2 får vi

$$y = Ce^{5x} + De^{-x}$$

Svar: $\underline{\underline{y = Ce^{5x} + De^{-x}}}$

c)

Bestem den spesielle løsningen som tilfredsstiller betingelsene $y(0)=6$ og $y'(0)=0$.

Løsningsforslag c)

Den første betingelsen gir at $y(0)=6$. I deloppgave b) fant vi den generelle løsningen. Nå kan vi sette inn $x=0$

$$y\left(0\right)=Ce^{5(0)}+De^{-(0)}=C+D$$

Dersom den første betingelsen skal være tilfredstilg må $C+D=6$.

Den andre betingelse gir at $y'(0)=0$. Da må vi begynne med å finne hva $y'(x)$ er. Vi bruker kjerneregelen med $5x$ og $-x$ som kjerner, og da får vi

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(Ce^{5x}+De^{-x}\right)' \\ &= C\left(e^{5x}\right)'+D\left(e^{-x}\right)' \\ &= Ce^{5x}\cdot 5+D\left(e^{-x}\right)\cdot(-1) \\ &= 5Ce^{5x}-De^{-x} \end{aligned}$$

Videre kan vi sette inn for $x=0$ som gir

$$y'\left(0\right)=5Ce^{5(0)}-De^{-(0)}=5C-D$$

Skal den andre betingelsen være tilfredsstilt må vi ha at $5C-D=0$.

De to betingelsene gir ligningsettet

$$\begin{aligned} C+D&=6 \\ 5C-D&=0 \end{aligned}$$

Den andre ligningen gir $D=5C$.

Setter vi dette inn i den første ligningen får vi

$$C+5C=6\ \Rightarrow\ 6C=6\ \Rightarrow\ C=1$$

Det gir

$$D=5C=5\cdot 1=5$$

Nå har vi funnet ut hva C og D må være for at betingelsene skal holde, og da blir løsningen av ligningen

$$y=1e^{5x}+5e^{-x}$$

Svar: $\underline{\underline{y=e^{5x}+5e^{-x}}}$

Oppgave 6 (5 poeng) Nettkode: E-4PC8

Brøken B_n er definert ved at telleren er summen av de n første oddetallene, mens nevneren er summen av de n neste oddetallene.

a)

Regn ut $B_2 = \frac{1+3}{5+7}$, $B_3 = \frac{1+3+5}{7+9+11}$ og $B_4 = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15}$.

Forkort svarene.

Løsningsforslag a)

Vi skal regne ut B_2, B_3 og B_4. Da får vi

$$B_2 = \frac{1+3}{5+7} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$B_3 = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

$$B_4 = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$$

Svar: $\underline{\underline{B_2 = B_3 = B_4 = \frac{1}{3}}}$

b)

Vis at summen av de n første oddetallene kan skrives $S_n = n^2$.

Løsningsforslag b)

For å vise at $S_n = n^2$ kan vi bruke induksjon. Det første vi må vise er at formelen stemmer for $n = 1$. Da sier påstanden at

$$S_1 = 1 = 1^2$$

Formelen stemmer for $n = 1$.

Nå antar vi at påstanden stemmer for $n = k$. Vi kan skrive det k-te oddetallet som $2k - 1$.

Da er altså

$$S_k = 1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2$$

Videre må vi vise at formelen stemmer for $n = k + 1$, altså summen av de $(k + 1)$ minste oddetallene. Da må vi addere det neste oddetallet, $2k + 1$ til summen S_k.

$$S_{k+1} = S_k + (2k + 1)$$

Antagelsen vår sier at $S_k = k^2$, dermed blir summen

$$S_{k+1} = k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Summen av de (k+1) minste oddetallene er altså lik $(k + 1)^2$ og formelen stemmer for $n = k + 1$. Ved å anta at S_k stemmer følger det at S_{k+1} også stemmer. Da stemmer S_n for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.

Svar: Vi har ved induksjon vist at $S_n = n^2$ stemmer for alle $n \in \mathbb{N}$

c)

Forklar at $B_n = \frac{S_n}{S_{2n} - S_n}$. Regn ut denne brøken.

Løsningsforslag c)

I B_n er telleren summen av de n første oddetallene, mens nevneren er summen av de n neste oddetallene. I deloppgave b) skrev vi summen av de n første oddetallene som S_n, så telleren må være lik S_n. I nevneren vil vi ha de n neste oddetallene. Dersom vi tar summen S_{2n} vil vi få de $2n$ første oddetallene og trekker vi fra n første, S_n sitter vi igjen med de neste n oddetallene. Dermed kan B_n skrives som $\frac{S_n}{S_{2n} - S_n}$.
Vi skal nå regne ut denne brøken. Da kan vi bruke resultatet fra deloppgave b), at $S_n = n^2$. Setter vi inn for S_n i B_n får vi

$$B_n = \frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \frac{n^2}{(2n)^2 - n^2} = \frac{n^2}{4n^2 - n^2} = \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}$$

Dette stemmer også med svarene vi fikk i deloppgave a)

Svar: $B_n = \frac{1}{3}$

Oppgave 7 (7 poeng) Nettkode: E-4PCC

Ligningen til en kuleflate er gitt ved

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 6z = 14$$

a)

Vis at punktet $A(4, 3, 3)$ ligger på kuleflaten.

Løsningsforslag a)

I punktet $A(4, 3, 3)$ har vi koordinatene $x = 4$, $y = 3$ og $z = 3$. For å finne ut om punktet ligger på kuleflaten kan vi sette inn for x, y og z i ligningen for kuleflaten. Dersom likningen stemmer vil punktet ligge på kuleflaten.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 6z &= 4^2 - 2 \cdot 4 + 3^2 + 2 \cdot 3 + 3^2 - 6 \cdot 3 \\ &= 16 - 8 + 9 + 6 + 9 - 18 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Svar: Ligningen til kuleflaten stemmer for $A(4, 3, 3)$, så punktet ligger på kuleflaten.

b)

Vis at kulen har sentrum i $S(1, -1, 3)$. Bestem radien til kulen.

Løsningsforslag b)

Vi vil få ligningen på formen $(x - x_0) + (y - y_0) + (z - z_0) = r^2$, med $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ og $z_0 = 3$, altså på formen $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = r^2$. Da må vi lage fullstendige kvadrater. Vi kan begynne med å samle alle leddene med x til et fullstendig kvadrat

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 6z &= 14 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + z^2 - 6z &= 14 + 1 \\ (x - 1)^2 + y^2 + 2y + z^2 - 6z &= 15 \end{aligned}$$

Tilsvarende kan vi gjøre for alle leddene med y

$$
\begin{aligned}
(x-1)^2 + y^2 + 2y + z^2 - 6z &= 15 \\
(x-1)^2 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 6z &= 15 + 1 \\
(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 - 6z &= 16
\end{aligned}
$$

og til slutt også for alle leddene med z

$$
\begin{aligned}
(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 - 6z &= 16 \\
(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 - 6z + 9 &= 16 + 9 \\
(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 &= 25
\end{aligned}
$$

Vi ser at ligningen nå er på den ønskede formen, med sentrum i $S(1,-1,3)$ og radius $r = \sqrt{25} = 5$

Svar: Sentrum er i $S(1,-1,3)$ og radius, r, er 5.

c)

Bestem ligningen for tangentplanet α til kuleflaten i punktet A.

Løsningsforslag c)

Kulens sentrum er $S(1,-1,3)$ og $A(4,3,3)$ ligger på kuleflaten. Vektoren

$$
\vec{SA} = \vec{OA} - \vec{OS} = [4,3,3] - [1,-1,3] = [3,4,0]
$$

går gjennom sentrum i kulen og står normalt på kuleflaten i punktet A. Tangentplanet i punktet A består av alle punkter innholdt i en linje som tangerer kulen i punktet A, $\vec{SA}$ vil stå normalt på alle linjene i dette planet, og vil være en normalvektor. Det betyr at alle vektorer $\vec{v}$ mellom to punkter i planet må stå vinkelrett på $\vec{SA}$ og da må $\vec{v} \cdot \vec{SA} = 0$. Siden A ligger i tangentplanet må alle punkter $B(x,y,z)$ som også ligger i tangentplanet tilfredstille

$$
\vec{SA} \cdot \vec{AB} = 0
$$

Vi kan uttrykke

$$
\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [x,y,z] - [4,3,3] = [x-4, y-3, z-3] .
$$

Da får vi

$$\begin{aligned}\vec{SA}\cdot\vec{AB} &= [3,4,0]\cdot[x-4,y-3,z-3]\\ &= 3(x-4)+4(y-3)+0(z-3)\\ &= 3x-12+4y-12\\ &= 3x+4y-24\end{aligned}$$

Siden $\vec{SA}\cdot\vec{AB}=0$, så tilfredstiller alle punktene i tangentplanet i A likningen

$$3x+4y-24=0$$

som da er likningen til planet.

Svar: $\underline{\underline{3x+4y-24=0}}$

d)

Et annet plan β går gjennom S og $B(1,0,1)$ og står normalt på α.
Bestem ligningen til β.

Løsningsforslag d)

Siden normalvektorene $\vec{n_\alpha}$ og $\vec{n_\beta}$ vil står normalt på hverandre og vi vil ha $\vec{n_\alpha}\cdot\vec{n_\beta}=0$
Fra deloppgave c) vet vi at $\vec{n_\alpha}=\vec{SA}=\left[3,4,0\right]$. Vi kan uttrykke $\vec{n_\beta}=\left[a,b,c\right]$. Da kan vi regne

$\vec{n_\alpha}\cdot\vec{n_\beta}=\left[3,4,0\right]\cdot\left[a,b,c\right]=3a+4b+0c=0$.

Denne ligningen sier ingenting om c, så c kan være et vilkårlig tall. Planet β går gjennom $B(1,0,1)$, så ligningen til β kan uttrykkes

$$a(x-1)+by+c(z-1)=0$$

Siden punktet $S(1,-1,3)$ også ligger i planet må ligningen tilfredsstille

$a(1-1)+b(-1)+c(3-1)=-b+2c=0$

Nå har vi at

$$\begin{aligned}3a+4b&=0\\ -b+2c&=0\end{aligned}$$

Ingen av ligningene sier at $c=0$, og vi kan sette $c=-3$. Fra den nederste av de to ligningene får vi $b=-6$. Nå kan vi sette inn for b i den øverste, dette gir

$$3a+4(-6)=0 \;\Rightarrow\; 3a=24 \;\Rightarrow\; a=8$$

Sette vi inn i ligningen for β får vi

$$\begin{aligned}8(x-1)-6y-3(z-1) &= 8x-8-6y-3z+3\\ &= 8x-6y-3z-5\\ &= 0\end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{8x-6y-3z-5=0}}$

DEL 2 med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng) Nettkode: E-4PCH

Ved inngangen til 2015 var folketallet i Norge 5200000. I en modell for befolkningsveksten antar vi at

- netto innvandring per år vil være 44000

- antall som blir født per år, vil være $1,1\%$ av folketallet

- antall som dør per år, vil være $0,8\%$ av folketallet

Vi lar folketallet være $y(t)$, der t er antall år etter 2015.

a)

Forklar at vi kan skrive

$y' = 0,003y + 44000, y(0) = 5200000$

Løsningsforslag a)

Befolkningsveksten påvirkes av netto innvandring, og fødsler og død. Vi får oppgitt at antall som blir født hvert år er $1,1\%$ av folketallet, og antall som dør er $0,8\%$. I tillegg må vi også ta hensyn til netto innvandring som vil være på 44000.

$$\begin{aligned}
\text{Befolkningsvekst} &= \text{antall som blir født} - \text{antall som dør} + \text{innvandring} \\
y' &= 0,011y - 0,008y + 44000 \\
y' &= 0,003y + 44000
\end{aligned}$$

Befolkningsveksten vil da kunne uttrykkes ved

$$y' = 0,003y + 44000$$

Siden vi ser på $y(t)$, der t er antall år etter 2015, vil $y(0)$ være folketallet i 2015, altså 5200000.

b)

Løs differensialligningen.

Løsningsforslag b)

Vi kan enten løse likningen for hånd, eller ved hjelp av CAS. Løsningsforslag for å løse oppgaven for hånd ligger under Alternativ.

Vi kan bruke CAS til å løse differensialligningen ved å bruke kommandoen "LøsODE[<Likning>, <Punkt på f>]".

Ligningen vi vil løse er $y' - 0.003y = 44000$, og punktet $(0, 5200000)$ er for å bestemme konstanten.

Vi vet at $y(0) = 5200000$, så da er $(0, 5200000)$ et punkt på y.

Da skriver vi inn

```
LøsODE[y'-0.003y=44000, (0,5200000)].
```

1	LøsODE[y'-0.003y=44000, (0,5200000)] → $y = \frac{59600000}{3} e^{3 \cdot \frac{x}{1000}} - \frac{44000000}{3}$
2	$1 ≈ $y = 19866666.6667\, e^{0.003x} - 14666666.6667$

Her er både eksakt og avrundet løsning.

ALTERNATIV

Svar: $\underline{\underline{y(t) = \frac{1}{3}\left(59600000e^{0,003t} - 44000000\right)}}$

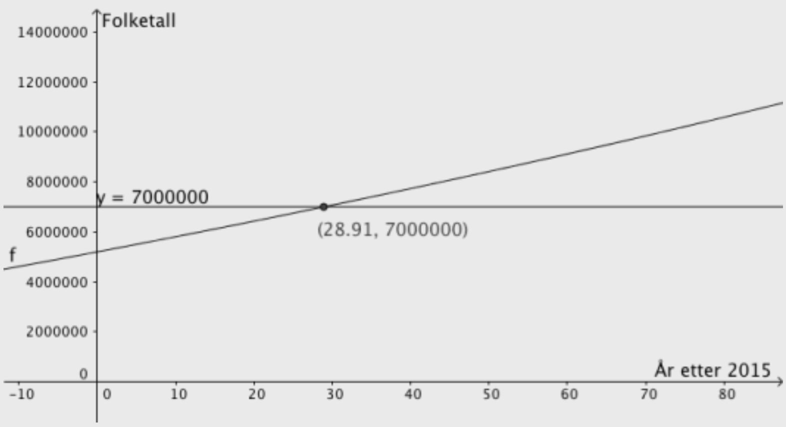
c)
Når vil folketallet passere 7 millioner ifølge denne modellen?
Hvor stor er vekstfarten i folketallet da?

Løsningsforslag c)

Denne oppgaven kan vi løse grafisk ved hjelp av GeoGebra. Vi kan tegne inn grafen til funksjonen ved å skrive inn

$f(t) = 1/3 * (59600000t\hat{}(0.003t) - 44000000)$,

og for å finne når folketallet passerer 7 millioner, kan vi finne ut når grafen til f krysser linja $y = 7000000$. Da må vi skrive inn $y = 7000000$, og finne skjæringspunkt mellom de to grafene.



Da får vi punktet $A = (28,91, 7000000)$, som forteller oss at folketallet passerer 7 millioner nesten 29 år etter 2015, i slutten av år 2043.

Befolkningsveksten kan vi da finne ved å sette inn $y = 7000000$ i likningen fra deloppgave a).

Det gir

$$y' = 0,003 \cdot 7000000 + 44000 = 65000$$

som forteller at befolkningsveksten vil være en økning på 65000 innbyggere i året.

ALTERNATIV

Svar: Mot slutten av 2043, og da vil befolkningsveksten være en økning på 65000 innbyggere i året.

Oppgave 2 (8 poeng) Nettkode: E-4PDI

Funksjonen f er gitt ved

$$f\left(x\right) = \sqrt{x^2 - x^4}$$

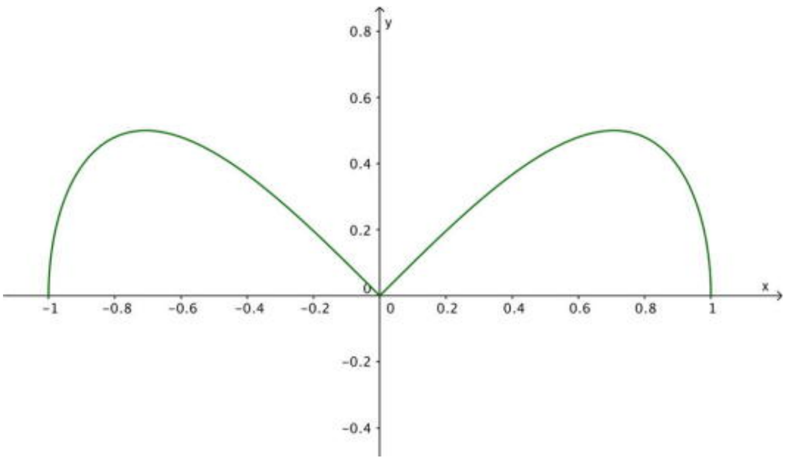
a)
Bruk graftegner til å tegne grafen til f.

Løsningsforslag a)

For å tegne grafen til funksjonen i GeoGebra skriver vi inn

$\mathtt{f}\left(\mathrm{x}\right) = \mathtt{sqrt}\left(x\text{^}2 - x\text{^}4\right)$

Svar:



b)
Bruk CAS til å bestemme de eksakte koordinatene til toppunktene på grafen til f.

Løsningsforslag b)

Vi begynner med å definere funksjonen i CAS. Da skriver vi inn

$\mathtt{f}\left(\mathrm{x}\right) := \mathtt{sqrt}\left(x\text{^}2 - x\text{^}4\right)$

For å finne $f'(x) = 0$ kan vi skrive

$$\text{Løs}[\mathtt{f}'(\mathrm{x}) = 0]$$

1	f(x) := sqrt(x^2-x^4)
	$\rightarrow$ $f(x) := \sqrt{-x^4 + x^2}$
2	Løs[f'(x) = 0]
	$\rightarrow$ $\left\{x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Da får vi at

$f'(x) = 0$ når

$$\mathrm{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{og} \quad \mathrm{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vi kan sjekke at dette er toppunkt ved å sjekke om

$f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$ og $f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$

Dersom det stemmer har vi et toppunkt. Da skriver vi inn $\mathtt{f}''(\mathtt{sqrt}(2)/2)$ og $\mathtt{f}''(-\mathtt{sqrt}(2)/2)$ i CAS.

3	f''(sqrt(2)/2)
	$\rightarrow$ -4
4	f''(-sqrt(2)/2)
	$\rightarrow$ -4

Da får vi

$$f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4$$

og

$$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4$$

Dette forteller oss at vi har toppunkt når $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Videre må vi finne verdien til f i toppunktene. Da skriver vi i CAS $\mathtt{f}(\mathtt{sqrt}(2)/2)$ og $\mathtt{f}(-\mathtt{sqrt}(2)/2)$, som gir $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ og $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

5	f(sqrt(2)/2)
	$\rightarrow$ $\frac{1}{2}$
6	f(-sqrt(2)/2)
	$\rightarrow$ $\frac{1}{2}$

Toppunktene til grafen er $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ og $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Svar: Toppunktene til grafen er $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ og $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

c)
Bestem det samlede arealet av områdene som er avgrenset av grafen til f og x-aksen.

Løsningsforslag c)

Først kan vi se at $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4} \geq 0$. På intervallet $[-1, 1]$ vil vi alltid ha $x^2 \geq x^4$, så vi får kvadratroten av et ikke-negativt tall. Når x er utenfor intervallet vil ikke funksjonen være definert.

Arealet under grafen til f er det samme som å finne integralet til f fra -1 til 1. Dersom vi bruker samme GeoGebravindu som i deloppgave a), er funksjonen f allerede definert, hvis ikke kan vi definere f ved å skrive $\mathtt{f}(\mathtt{x}) := \mathtt{sqrt}(\mathtt{x}\verb|^|2 - \mathtt{x}\verb|^|4)$.

Nå kan vi finne arealet ved å bruke kommandoen Integral i CAS og skrive $\mathtt{Integral}[\mathtt{f}, -1, 1]$.

1	f(x) := sqrt(x^2-x^4) → $f(x) := \sqrt{-x^4 + x^2}$
2	Integral[f, -1, 1] → $\frac{2}{3}$

Da får vi $a = \frac{2}{3}$.

ALTERNATIV

Svar: Arealet er $\frac{2}{3}$.

d)

Grafen til f roteres 360° om x-aksen. Bestem volumet av omdreiningslegemet som da framkommer.

Løsningsforslag d)

For å finne volumet til omdreningslegemet kan vi bruke formelen

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (f(x))^2 \, \mathrm{dx}$$

og CAS. I CAS skriver vi inn

Integral$\left[\pi \cdot f\left(x\right)\text{^}2 \, , -1, 1\right]$, der $f(x)$ er definert som i deloppgave b).

7	Integral[pi*f(x)^2, -1, 1]
	$\rightarrow \frac{4}{15}\pi$

ALTERNATIV

Svar: Volumet er $\underline{\underline{\frac{4\pi}{15}}}$

Oppgave 3 (7 poeng) Nettkode: E-4PDW

To plan α og β er gitt ved

$\alpha : x - y - 3 = 0$

$\beta : x + pz - 4 = 0,\ p \in \mathbb{R}$

a)
Vis at punktet $(4, 1, 0)$ ligger i begge planene.

Løsningsforslag a)

Dersom punktet $A(4, 1, 0)$ ligger i planene vil det tilfredstille likningen til hvert av planene. Med andre ord kan vi sette inn for $x = 4$, $y = 1$ og $z = 0$ i likningene og om likningen stemmer ligger punktet i planet.

$$\alpha : x - y - 3 = 4 - 1 - 3 = 0$$

og

$$\beta : x + pz - 4 = 4 - 0p - 4 = 0$$

Vi ser at likningen til begge planene stemmer når vi setter inn for koordinatene til A, altså ligger A i planene.

Svar: Punktet $A\,(4,1,0)$ ligger i begge planene

b)
Bestem p slik at vinkelen mellom α og β blir 60°.

Løsningsforslag b)

Normalvektoren, $\vec{n_\alpha}$, til $\alpha : x - y - 3 = 0$ vil være $\vec{n_\alpha} = [1, -1, 0]$ og normalvektoren, $\vec{n_\beta}$ til $\beta : x + pz - 40$ vil være $\vec{n_\beta} = [1, 0, p]$. For å finne vinkelen mellom normalvektorene kan vi bruke skalarproduktet. Når vinkelen mellom vektorene er 60° er skalarproduktet gitt ved

$$\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta} = |\vec{n_\alpha}| \cdot |\vec{n_\beta}| \cos 60^\circ$$

Nå kan vi regne ut

$\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot p = 1$

Vi vet at $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. og vi kan regne ut $|\vec{n_\alpha}|$ og $|\vec{n_\beta}|$

$$\left|\vec{n_\alpha}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\left|\vec{n_\beta}\right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + p^2} = \sqrt{1 + p^2}$$

Vi kan nå sette inn i skalarproduktet og løse ligningen med hensyn på p

$$\begin{aligned}
\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta} &= |\vec{n_\alpha}| \cdot |\vec{n_\beta}| \cos 60^\circ \\
1 &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + p^2} \cdot \tfrac{1}{2} \\
2 &= \sqrt{2\left(1 + p^2\right)} \\
4 &= 2\left(1 + p^2\right) \\
1 &= p^2 \\
p &= \pm 1
\end{aligned}$$

Svar: Vi må ha $p = \pm 1$ for at vinkelen mellom planene skal være 60°.

c)

Hvilken verdi for p vil gi den minste vinkelen mellom α og β? Hvor stor er vinkelen?

Løsningsforslag c)

I deloppgave b) brukte vi skalarproduktet

$$\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta} = |\vec{n_\alpha}| \cdot |\vec{n_\beta}| \cos v$$

mellom normalvektorene og vi fant at

$\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta} = 1$ og $\left|\vec{n_\alpha}\right| \cdot \left|\vec{n_\beta}\right| = \sqrt{2\left(1 + p^2\right)}$

Når vi setter inn dette får vi

$$1 = \sqrt{2\left(1 + p^2\right)} \cos v$$

som gir

$\cos v = \frac{1}{\sqrt{2\left(1+p^2\right)}}$

Vi kan finne maksimumsverdien for $\cos v$ ved hjelp av CAS. Da kan vi definere $\cos v = \frac{1}{\sqrt{2\left(1+p^2\right)}}$ som en funksjon, $f(p)$, slik at

$f(p) = \frac{1}{\sqrt{2(1+p^2)}}$

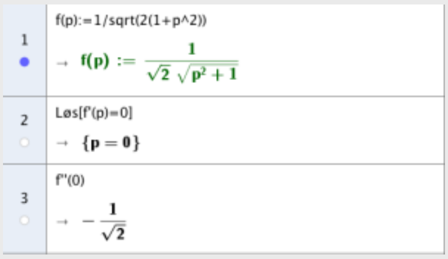
Denne definerer vi i CAS ved å skrive inn

$\texttt{f}(\texttt{p}) := 1/\texttt{sqrt}(2(1 + \texttt{p})^\wedge 2)$

For å finne ut når $f(p)$ har ekstremalpunkt må vi finne for hvilken p vi har $f'(p) = 0$. Dette kan vi finne ved å skrive `Løs[f'(p)]=0` i CAS. Da får vi at $p = 0$ gir et ekstremalpunkt for f.

Videre kan vi sjekke

$f''(0)$ for å se om $p = 0$ er maksimums- eller minimumspunkt. I CAS skriver vi `f"(0)`, og får $f''(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ som forteller oss at vi har et maksimumspunkt.



Vi har altså funnet ut for hvilken p som gir $f(p)$, og dermed også $\cos v$, størst verdi, og som gir at vinkelen v vil være minst mulig. Setter vi inn for $p = 0$ får vi at $\cos v = \frac{1}{\sqrt{2}}$, og vinkelen $v = 45^\circ$.

ALTERNATIV

Svar: $p = 0$ vil gi den minste vinkelen, og da er vinkelen 45°.

d)

De to planene skjærer hverandre langs en linje ℓ . Bestem en parameterframstilling for ℓ uttrykt ved p.

Løsningsforslag d)

Retningsvektoren til ℓ vil stå normalt på både n_α og n_β siden ℓ ligger i begge planene. Vi kan finne en vektor som står normalt på både n_α og n_β ved å finne kryssproduktet mellom dem.
For å finne kryssproduktet kan vi bruke CAS.

Først definerer vi normalvektorene ved å skrive $\mathtt{n}\_\alpha := (1,-1,0)$ og $\mathtt{n}\_\beta := (1,0,p)$. CAS bruker kommandoen `Vektorprodukt` for å finne kryssproduktet, så vi kan skrive $\mathtt{Vektorprodukt}[\mathtt{n}\_\alpha, \mathtt{n}\_\beta]$ .Da får vi vektoren $(-p,-p,1)$, som vil være retningsvektor til linjen ℓ.

1	n_α:=(1,-1,0) $\rightarrow\ n_\alpha := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
2	n_β:=(1,0,p) $\rightarrow\ n_\beta := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$
3	Vektorprodukt[n_α, n_β] $\rightarrow\ \begin{pmatrix} -p \\ -p \\ 1 \end{pmatrix}$
4	

For å finne parameterfremstillingen til ℓ trenger vi også et punkt på linjen. Fra a) vet vi at punktet $(4,1,0)$ ligger i begge planene, og må da også ligge på linjen. Nå har vi både retningsvektor og et punkt på linjen, og da kan vi finne parameterfremstillingen:

$$\ell : \quad \begin{cases} x = 4 - p \cdot t \\ y = 1 - p \cdot t \\ z = t \end{cases}$$

Svar: En parameterfremstilling er gitt ved $\ell : \begin{cases} x = 4 - p \cdot t \\ y = 1 - p \cdot t \\ z = t \end{cases}$

Oppgave 4 (4 poeng) Nettkode: E-4PE0

Om en uendelig geometrisk rekke vet vi at

- summen er 8

- summen av de tre første leddene er 7

a)
Sett opp et ligningssystem som uttrykker opplysningene ovenfor.

Løsningsforslag a)

Vi får oppgitt at summen av den geometrisk rekken er 8, altså konvergerer den. Siden summen, S, av en uendelig geometrisk rekke som konvergerer kan gis ved formelen

$$S = \frac{a_1}{1-k}$$

har vi at

$$8 = \frac{a_1}{1-k}$$

Det andre vi får oppgitt er at summen av de tre første leddene er 7, altså har vi at

$$a_1 + a_2 + a_3 = 7$$

Siden vi har en geometrisk rekke kan hvert av leddene uttrykkes ved det første, $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$. Da får vi at $a_2 = a_1 \cdot k$ og $a_3 = a_1 \cdot k^2$. Altså kan vi skrive

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 = a_1\left(1 + k + k^2\right) = 7$$

Nå har vi et ligningsett med to ligninger og to ukjente:
$\frac{a_1}{1-k} = 8$
$a_1\left(1 + k + k^2\right) = 7$

Svar: $\frac{a_1}{1-k} = 8$, $a_1\left(1 + k + k^2\right) = 7$

b)

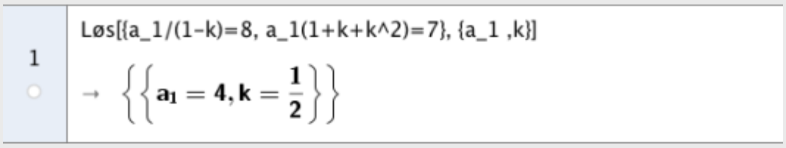
Bruk CAS til å bestemme kvotienten k og det første leddet a_1 i rekken.

Løsningsforslag b)

For å løse ligningssettet i CAS kan vi bruke kommandoen “Løs”. Da skriver vi

`Løs[{a_1/(1-k)=8, a_1(1+k+k^2)=7}, {a_1,k}]`

i CAS-vinduet. Da vil CAS løse ligningsettet fra deloppgave a) med hensyn på a_1 og k.



Utregningen fra CAS viser at $a_1 = 4$ og $k = \frac{1}{2}$

Svar: $a_1 = 4$ og $k = \frac{1}{2}$