REA3024 2014 Høst

Eksamenstid:
5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.:

- Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng) Nettkode: E-4DEQ

Deriver funksjonene

a)
$f\,(x) = 2\cos(3x)$

Løsningsforslag a)

Siden den deriverte av en konstant er lik 0 kan vi skrive

$$f'(x) = (2\cos(3x))\,' = 2\,(\cos(3x))\,'.$$

Videre kan vi bruke kjerneregelen for derivasjon, som sier at den deriverte av en sammensatt funksjon $f(u(x))$ er $u'(x)f'(u\,(x))$. Ved å sette $u(x) = 3x$ får vi altså

$$f'(x) = 2\,(\cos(3x))\,' = 2(3x)'\,(-\sin 3x)\,,$$

siden $(\cos x)\,' = -\sin x$ og siden $(3x)' = 3$ får vi

$$f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot (-\sin u) = -6\sin(3x).$$

Svar: $\underline{\underline{f'(x) = -6\sin(3x)}}$

b)
$g\,(x) = 5e^x \cdot \sin\,(2x)$

Løsningsforslag b)

Produktregelen konstanterer at hvis $u(x)$ og $v(x)$ er to funksjoner, må $(uv)' = u'v + uv'$. Hvis vi setter $u(x) = 5e^x$ og $v(x) = \sin(2x)$ ser vi at

$$g'(x) = (uv)\,' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Videre finner vi $u'(x)$ ved å derivere $5e^x$. Siden konstanter alltid kan tas utenfor derivasjonen og e^x er sin egen deriverte må

$$u'(x) = 5e^x.$$

Videre finner vi $v'(x)$ ved å derivere $\sin(2x)$. Kjerneregelen for derivasjon sier at hvis vi setter $k = 2x$ er

$$(\sin 2x)' = (2x)' \cos(2x) = 2 \cos 2x.$$

Altså

$$v'(x) = (\sin 2x)\,' = 2 \cos 2x.$$

Den deriverte av $g(x)$ blir altså

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (5e^x)\,(\sin 2x) + (5e^x)\,(2 \cos 2x) \\ &= 5e^x \sin 2x + 10e^x \cos 2x = 5e^x\,(\sin 2x + 2 \cos 2x)\,. \end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{g'(x) = 5e^x\,(\sin\,(2x) + 2 \cos\,(2x))}}$

Oppgave 2 (3 poeng) Nettkode: E-4DET

Bestem integralene

a)

$\int \left(x^3 - 2x\right) dx$

Løsningsforslag a)

Siden et integral av en sum er en sum av integraler kan vi skrive

$$\int \left(x^3 - 2x\right)\, dx = \int x^3\, dx + \int \left(-2x\right) dx$$

og siden $\int Cf\left(x\right) dx = C \int f\left(x\right) dx$ for alle konstanter C og integrerbare funksjoner $f(x)$ kan vi skrive

$$\int x^3\, dx + \int \left(-2x\right) dx = \int x^3\, dx - 2 \int x dx.$$

Videre vet vi at integralet av en funksjon x^n er $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ siden den deriverte av $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ er x^n. Altså har vi at

$\int x^3\, dx - 2 \int x dx = \frac{1}{4}x^4 + C_1 - 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C_2 = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + C$ der $C = C_1 + C_2$

Svar: $\int \left(x^3 - 2x\right) dx = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + C$

b)

$\int_1^e x \cdot \ln\ x\, dx$

Løsningsforslag b)

Delvis integrasjon sier at hvis $u(x)$ og $v(x)$ er to funksjoner, så er $\int u'v dx = uv - \int uv' dx$.

Ved å sette $u'(x) = x$ og $v(x) = \ln x$ får vi $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ og $v'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Altså har vi at

$$\int_1^e x \ln x dx = \int_1^e u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^e - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e.$$

Alt som gjenstår nå er å evaluere grensene

$$\left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^e - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e = \left(\frac{1}{2}e^2 \ln e - \frac{1}{2}1^2 \ln 1\right) - \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}1^2\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}e^2 \cdot 1 - 0\right) - \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right).$$

Vi har altså funnet at

$\int_1^e x \cdot \ln\ x\, dx = \frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right).$

Svar: $\int_1^e x \cdot \ln\ x\, dx = \frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right)$

Oppgave 3 (4 poeng) Nettkode: E-4DEW

a)

Løs differensiallikningen

$y' - 2y = 3$ når $y(0) = \frac{5}{2}$

Løsningsforslag a)

Vi kan løse differensiallikningen ved å benytte et lurt triks kjent som "integrerende faktor". Idéen er å multiplisere begge sider av likningen med en funksjon slik at vi kan kjenne igjen produktregelen for derivasjon. Hvis

$f(x)$ er en deriverbar funksjon kan vi skrive

$$(f(x)y)' = f(x)y' + f'(x)y,$$

og ved å kreve at dette skal være lik venstresiden i differensiallikningen multiplisert med $f(x)$ får vi

$$f(x)y' + f'(x)y = f(x)y' - 2f(x)y,$$

som betyr at vi må ha $f'(x) = -2f(x)$. En funksjon som tilfredsstiller dette er $f(x) = e^{-2x}$. Ved å multiplisere begge sider av differensiallikningen med e^{-2x} kan vi altså skrive

$$\left(e^{-2x}y\right)' = e^{-2x}y' - 2e^{-2x}y = 3e^{-2x}.$$

Hvis vi nå integrerer begge sider av likningen med hensyn på x finner vi at

$$\int \left(e^{-2x}y\right)' dx = e^{-2x}y(x) + C_1$$

for en konstant C_1 og

$$\int 3e^{-2x} dx = -\frac{3}{2}e^{-2x} + C_2$$

for en konstant C_2. Ved å kombinere de to konstantene til en felles konstant $C = C_2 - C_1$ kan vi altså skrive løsningen av differensiallikningen som

$$e^{-2x}y(x) = C - \frac{3}{2}e^{-2x}.$$

Ved å multiplisere begge sider av likningen med e^{2x} følger det at

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{3}{2},$$

og siden $y(0) = \frac{5}{2}$ må

$$y(0) = Ce^0 - \frac{3}{2} = C - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow C = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$$

Den spesielle løsningen av differensiallikningen er altså

$$y(x) = 4e^{2x} - \frac{3}{2}.$$

Svar: $y(x) = 4e^{2x} - \frac{3}{2}$.

b)

Bestem likningen til tangenten i punktet $\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$ på grafen til y.

Løsningsforslag b)

Siden tangenten på grafen til funksjonen $y(x)$ fra oppgave $a)$ i punktet $\left(0,\frac{5}{2}\right)$ er en rett linje kan den skrives som en lineær funksjon $t(x) = Ax + B$, der A er stigningstallet og B er konstantleddet til linjen. Siden $t(x)$ per definisjon deler stigningstall med y i punktet $\left(0,\frac{5}{2}\right)$ må $A = y'(0)$. Selv om det er helt uproblematisk å derivere $y(x)$ for deretter å sette inn punktet $x = 0$, er det enda lettere å huske at $y(x)$ tilfredsstiller likningen i **3a**. Altså er

$$A = y'\left(0\right) = 3 + 2y\left(0\right) = 3 + 2\frac{5}{2} = 8.$$

Konstantleddet, B, finner vi ved å se hvor $t(x)$ skjærer y-aksen. Vi vet imidlertid at t går gjennom punktet $\left(0,\frac{5}{2}\right)$, som ligger på y-aksen. Altså må konstantleddet være gitt som y-koordinaten $B = \frac{5}{2}$. Dette betyr at tangenten er gitt av funksjonsuttrykket

$$t\left(x\right) = 8x + \frac{5}{2}.$$

Svar: $\underline{\underline{t\left(x\right) = 8x + \frac{5}{2}}}$

Oppgave 4 (4 poeng) Nettkode: E-4DEZ

Punktene $A\,(0,\ 6,\ 6)$, $B\,(0,\ 0,\ 7)$ og $C\,(6,\ 0,\ 5)$ ligger i planet α.

a)
Bestem likningen til α.

Løsningsforslag a)

Vi begynner med å finne to vektorer mellom punkter i planet. Et naturlig valg er da vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ gitt ved

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left[0, -6, 7-6\right] = \left[0, -6, 1\right]\\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \left[6, -6, 5-6\right] = \left[6, -6, -1\right].\end{aligned}$$

Deretter beregner vi kryssproduktet $\vec{AB} \times \vec{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & -6 & 1 \\ 6 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_x - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} \vec{e}_z$$

$$= (6+6)\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 36\vec{e}_z = [12,6,36].$$

Det eneste viktige med denne vektoren er retningen. Det betyr at vi kan dividere vektorens lengde med 6 og heller velge $\vec{n} = \left[2, 1, 6\right]$ som normalvektor for planet. Alle vektorer $\vec{r} = \left[x, y, z\right]$ mellom punkter i planet må altså tilfredsstille

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 2x + y + 6z = 0.$$

Likningen for planet α er imidlertid en likning for alle punkter (x, y, z) – ikke alle vektorer! Dette kan vi ta høyde for ved å kreve at

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{r} - \overrightarrow{OP}\right) = 2x + y + 6z - 2x_P - y_P - 6z_P = 0,$$

der $P(x_P, y_P, z_P)$ er et eller annet punkt i planet α. Ved å velge $P = A$ får vi at

$$2x + y + 6z - 6 - 6 \cdot 6 = 2x + y + 6z - 42 = 0$$

er likningen for planet α.

ALTERNATIV LØSNING

Svar: $\underline{\underline{2x + y + 6z - 42 = 0}}$

b)

Et punkt P ligger på linjen gjennom punktene $O(0,\ 0,\ 0)$ og $A(0,\ 6,\ 6)$.

Bestem mulige koordinater til P slik at volumet av tetraederet $ABCP$ blir 42.

Løsningsforslag b)

At punktet P ligger mellom O og A betyr at vi kan uttrykke det ved $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA}$ der $t \in \mathbb{R}$. Volumet av et tetraeder utspent av tre vektorer $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$ er nøyaktig en sjettedel av volumet til parallellepipedet utspent av de samme vektorene. Siden volumet av parallellpipedet utspent av $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$ er $\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$ er altså volumet av tetraederet utspent av $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AP}$ gitt av

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AP}\right|$$

Vektorene $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AP}$ kan vi uttrykke

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [0, 0, 7] - [0, 6, 6] = [0, -6, 1]$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [6, 0, 5] - [0, 6, 6] = [6, -6, -1]$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = [0, 6t, 6t] - [0, 6, 6] = [0, 6(t-1), 6(t-1)].$$

I a) fant vi at kryssproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [12, 6, 36]$. Volumet av tetraederet er altså

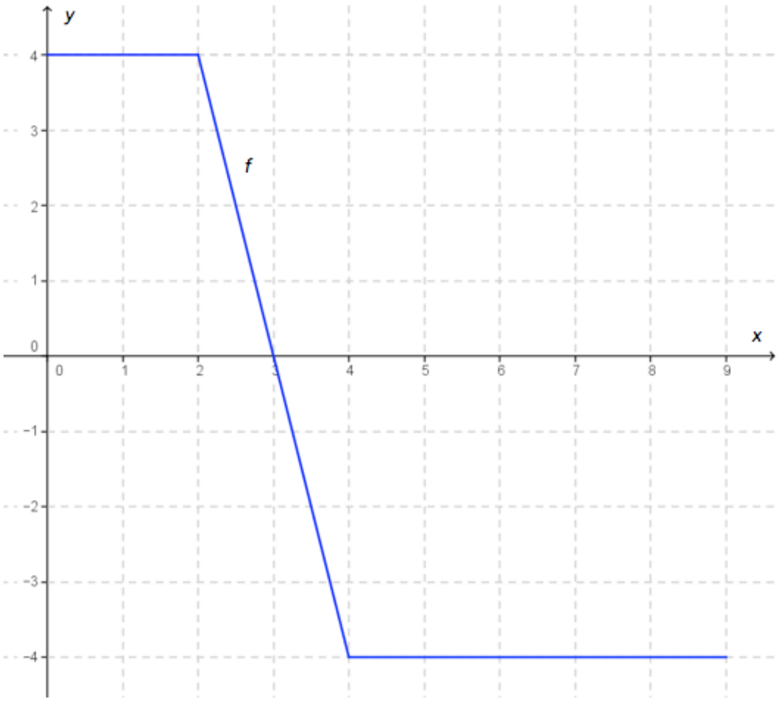
$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AO} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|[12, 6, 36] \cdot [0, 6(t-1), 6(t-1)]\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|6 \cdot 6(t-1) + 36 \cdot 6(t-1)\right| = \left|6(t-1) + 36(t-1)\right| = |42t - 42| = 42\,|t-1|$$

For at volumet skal være lik 42 må vi altså enten ha $t = 0$ eller $t = 2$. Det er med andre ord to mulige koordinater for P, nemlig $P(0,0,0)$ og $P(0, 12, 12)$.

Svar: $P(0,0,0)$ og $P(0,12,12)$

Oppgave 5 (4 poeng) Nettkode: E-4DF4



Figuren viser grafen til en funksjon $f(x)$, der $x \in [0, 9]$.

La $g(t) = \int_0^t f(x)dx$, der $t \in [0, 9]$

a)

Bestem $g(2)$. Forklar at den største verdien til $g(t)$ er 10.

Løsningsforslag a)

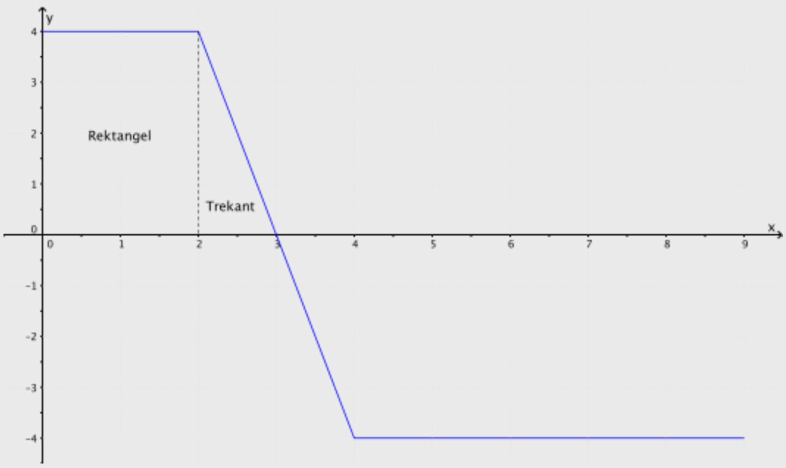
Siden $g(t)$ er arealet under grafen til $f(x)$ fra $x = 0$ til $x = t$, og $f(x)$ er konstant lik 4 på intervallet $[0, 2]$ må

$$g\left(2\right) = \int_0^2 f\left(x\right)dx = f\left(0\right) \cdot \Delta x = 4 \cdot 2 = 8.$$

Siden de eneste positive bidragene til $g(t)$ kommer fra punkter der $f(x) > 0$, og $f(x) > 0$ for $x \in [0, 3]$, kan $g(t)$ aldri ta større verdier enn $g(3)$. Vi kan dele opp arealet under $f(x)$ mellom $x = 0$ og $x = 3$ i den rektangulære biten $x \in [0, 2]$ og den triangulære biten $x \in [2, 3]$. Vi får da at

$$g\left(3\right) = rektangel + trekant = 8 + \frac{1}{2}4 \cdot 1 = 8 + 2 = 10.$$

Altså kan ikke $g(t)$ ta større verdier enn 10.



Svar: $\underline{\underline{g(2) = 8}}$

b)

Bestem nullpunktet til g. Avgjør hvilke verdier av t som gjør $g(t)$ negativ.

Løsningsforslag b)

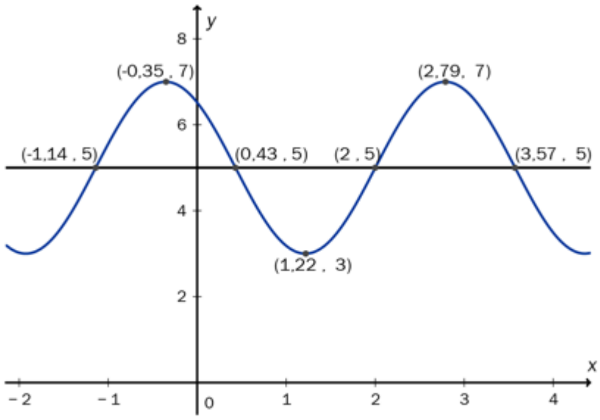
Arealet over x-aksen avgrenset av grafen til f og intervallet $[0, 3]$ er like stort som arealet under x-aksen avgrenset av f og intervallet $[3, 6]$.

Siden $f(x)$ er positiv for alle $x \in [0, 3)$ og negativ for alle $x \in (3, 6]$ betyr det at $g(6) = 0$. Dette betyr at $t = 6$ er et nullpunkt for $g(t)$ og at $g(t)$ er negativ for alle $t > 6$ siden f da er negativ. Merk imidlertid at $g(t)$ også forsvinner når $t = 0$ ettersom arealet under f mellom 0 og 0 nødvendigvis må være 0.

Altså er nullpunktene for $g(t)$ nøyaktig de to punktene $t = 0 \;\text{ og }\; t = 6$. Hvis $t > 6$ er altså arealet under x-aksen større enn arealet over x-aksen. Det betyr at $g(t) < 0 \;\text{ for }\; t \in (6, 9]$.

Svar: $\underline{\underline{t = 0 \;\text{ og }\; t = 6}}$

Oppgave 6 (4 poeng) Nettkode: E-4DF8



Ovenfor ser du grafen til en funksjon $f(x) = A\sin(cx + \varphi_1) + d$.

a)

Bestem A, c, d og φ_1 ved hjelp av grafen og de punktene som er markert på grafen.

Skriv opp funksjonsuttrykket til f (x).

Løsningsforslag a)

Vi begynner med å finne likevektslinjen d. Fra grafen ser vi at $f(x)$ maksimalt tar verdien $f(x) = 7$ og minimalt $f(x) = 3$. Disse toppene må komme fra sinusfunksjonen i $f(x)$ og siden sinus avviker like mye fra null i både positiv og negativ retning må likevektslinjen være verdien midt mellom maksimal- og minimalverdien til f. Altså må $d = \frac{1}{2}(7+3) = 5$. Det følger at forskjellen mellom likevektslinjen og maksimalverdien til $f(x)$ må være nøyaktig verdien av A. Altså har vi at $A = 7 - 5 = 2$.

For nå å finne c finner vi først avstanden Δx mellom to nærstående topper – altså perioden til funksjonen. Fra grafen finner vi at den er $\Delta x = 2.79 - (-0.35) = 3.14$ som er omtrent lik π. Avstanden mellom to topper på grafen til funksjonen $\sin(x + \phi_1)$ er 2π. Da må vi ha $2\pi = c\Delta x$, noe som betyr at $c = 2$. Vi har altså funnet at

$$f(x) \approx 2\sin(2x + \phi_1) + 5.$$

Ved å benytte omskrivingen $2x + \phi_1 = 2\left(x - \left(-\frac{1}{2}\phi_1\right)\right)$ ser vi at størrelsen $-\frac{1}{2}\phi_1$ må være grafens faseforskyvning, som vi ved å lese av ser at er omlag 2. Det betyr at

$$-\frac{1}{2}\phi_1 \approx 2 \Rightarrow \phi_1 \approx -4.$$

Altså har vi tilnærmet funksjonsuttrykket til å være

$$f(x) \approx 2\sin(2x - 4) + 5.$$

Svar:

$$f(x) \approx 2\sin(2x - 4) + 5.$$

Merk at vi alltid kan legge til, eller trekke fra, 2π fra vinkelen uten å endre verdien til uttrykket.

b)

Grafen ovenfor kan også være grafen til $g(x) = A\cos(cx + \varphi_1) + d$.

Skriv opp funksjonsuttrykket til $g(x)$.

Løsningsforslag b)

En cosinusfunksjon ligger alltid et kvart omløp foran en sinusfunksjon. Med andre ord er det ikke behov for å gjøre annet enn å forskyve vinkelen inne i sinusfunksjonen fra oppgave $6a$) slik at vinkelen alltid ligger $\frac{\pi}{2}$ bak. Med andre ord kan vi bruke at

$$2\sin(2x-4)+5 = 2\cos\left(2x-4-\frac{\pi}{2}\right)+5$$

til å finne følgende tilnærmede uttrykk for $g(x)$:

$$g\left(x\right) \approx 2\cos\left(2x-4-\frac{\pi}{2}\right)+5.$$

ALTERNATIV LØSNING

Svar:

$$g(x) \approx 2\cos(2x+0,7)+5.$$

Merk at vi alltid kan legge til, eller trekke fra, 2π fra vinkelen uten å endre uttrykket.

Oppgave 7 (2 poeng) Nettkode: E-4DFB

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}\quad , \quad n\in\mathbb{N}$$

Løsningsforslag

Vi skal vise at utsagnet

$$P(n): \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$$

er sant for alle naturlige tall n.

Med $n=1$ blir produktet på venstre side bestående av bare én faktor, nemlig $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Høyre side blir $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$. Dette viser at $P(1)$ er sann.

Anta at $P(k)$ er sann, altså at

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k+1}$$

Da må vi ha

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k+1}\cdot\left(1-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k+2-1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k+2}$$

$$=\frac{1}{(k+1)+1}$$

Dette er presis utsagnet $P(k+1)$, så vi har vist at $P(k)\Rightarrow P(k+1)$. Dermed er $P(n)$ sant.

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (8 poeng) Nettkode: E-4DFE

a)

Vi har en uendelig geometrisk rekke $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ som er konvergent.

Vis at summen S av rekken kan skrives

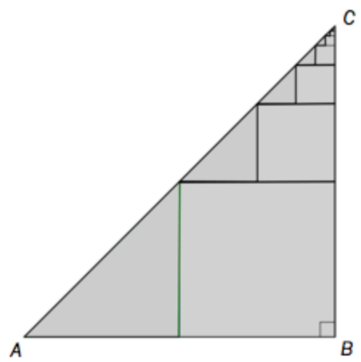
$$S = \frac{{a_1}^2}{a_1 - a_2}$$

Løsningsforslag a)

Siden rekken er geometrisk, er $a_2 = ka_1$, der $k = \frac{a_2}{a_1}$ er kvotienten til rekka. Summen er $S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{a_1^2}{a_1 - a_2}$.

b)

Figuren nedenfor viser en rettvinklet og likebeint ΔABC der katetene har lengde 12. Inne i trekanten har vi en rekke kvadrater (markert med blått på figuren). Det største kvadratet har side 6, det nest største har side 3, slik at sidene til kvadratene blir halvert i det uendelige.



Forklar at summen S av arealene til kvadratene kan skrives som en uendelig geometrisk rekke. Bruk formelen i oppgave a) til å bestemme S.

Løsningsforslag b)

Siden $\triangle ABC$ er likebeint og rettvinklet må det største kvadratet ha sidelengde $l_1 = \frac{1}{2}AB = 6$. Det neste kvadratets nedre, venstre hjørne må på tilsvarende måte dele l_1 i to like store segmenter. Det betyr at det neste kvadratets sidelengde er $l_2 = \frac{1}{2}l_1 = 3$. Ettersom dette mønsteret fortsetter på samme måte må $l_3 = \frac{1}{2}l_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 l_1$, $l_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 l_1$ og så videre. Summen S av arealene til kvadratene kan da uttrykkes ved

$$\begin{aligned} S &= l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + \ldots \\ &= l_1^2 + \left[\tfrac{1}{2} l_1\right]^2 + \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 l_1\right]^2 + \ldots \end{aligned}$$

og ved å ta i bruk formelen i oppgave a) finner vi

$$S = \frac{l_1^4}{l_1^2 - l_1^2\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{l_1^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4 l_1^2}{3} = \frac{4 \cdot 6^2}{3} = \frac{144}{3} = 48.$$

Svar: $\underline{\underline{S = 48}}$

c)
ΔABC inneholder også uendelig mange rettvinklete og likebeinte trekanter (markert med grønt på figuren) der sidene også halveres fra gang til gang. Skriv summen av arealene til disse trekantene som en uendelig geometrisk rekke. Bestem denne summen.

Løsningsforslag c)

Siden arealet av hver trekant er halvparten av kvadratet på dets høyre side og summen av arealene til kvadratene kan skrives

$$S_{kvadrat} = l_1^2 + \left[\tfrac{1}{2} l_1\right]^2 + \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 l_1\right]^2 + \ldots$$

følger det at summen $S_{trekant}$ av trekantene er gitt av den uendelige geometriske rekken

$$S_{trekant} = \tfrac{1}{2} l_1^2 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2} l_1\right]^2 + \tfrac{1}{2}\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 l_1\right]^2 + \ldots$$

Verdien av denne summen finner vi lettest ved å se at $S = \frac{1}{2} S_{kvadrat}$, slik at

$S_{trekant} = \frac{1}{2} \cdot 48 = 24$. Alternativt kunne vi brukt formelen fra a).

Svar: $\underline{\underline{S_{trekant} = 24}}$

d)

Forklar hvordan du kunne ha funnet de to summene i oppgave b) og oppgave c) ved hjelp av et geometrisk resonnement.

Løsningsforslag d)

Siden $\triangle ABC$ er en rettvinklet, likebeint trekant der lengden av katetene er 12, har $\triangle ABC$ areal $\frac{1}{2}12^2 = 72$. Videre vet vi at hvis $S_{kvadrat}$ er summen av arealene til kvadratene og $S_{trekant}$ er summen av arealene til trekantene, så må

$$S_{kvadrat} = 2S_{trekant}$$

fordi hver trekant utgjør nøyaktig halvparten av det tilsvarende kvadratet. Siden alle de små og trekantene og kvadratene fyller $\triangle ABC$ må vi også ha at $S_{kvadrat} + S_{trekant}$ er arealet av $\triangle ABC$, altså

$$S_{kvadrat} + S_{trekant} = 72.$$

Det betyr at vi har likningsettet

$$\begin{array}{llcll} \text{(I)} & S_{kadrat} & + & S_{trekat} & = & 72 \\ \text{(II)} & S_{kadrat} & & & = & 2S_{trekant}, \end{array}$$

som løses av $S_{kvadrat} = 48$ og $S_{trekant} = 24$.

Oppgave 2 (8 poeng) Nettkode: E-4DFJ

En differensiallikning er gitt ved

$$4y'' + 4y' + 5y = 0$$

a)

Sett opp den karakteristiske likningen, løs denne og bruk løsningen til å bestemme et generelt uttrykk for y.

Løsningsforslag a)

En andre ordens homogen differensiallikning har alltid to uavhengige løsninger. Dersom vi klarer å gjette oss frem til to forskjellige løsninger har vi altså løst likningen. Mennesker før oss har heldigvis funnet ut at det er lurt å gjette på løsninger på formen $y\left(x\right) = e^{\lambda x}$. Da er $y'\left(x\right) = \lambda e^{\lambda x}$ og $y''\left(x\right) = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Ved å sette dette inn i likningen over får vi

$$4\lambda^2 e^{\lambda x} + 4\lambda e^{\lambda x} + 5e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\left(4\lambda^2 + 4\lambda + 5\right) = 0,$$

og siden $e^{\lambda x}$ aldri blir null må dette være sant fordi

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$$

Dette er den karakteristiske likningen! Denne kan vi løse ved å bruke annengradsformelen

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{1-5}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i$$

der $i = \sqrt{-1}$. De to løsningene er altså

$$y_1(x) = e^{\left(-\frac{1}{2}+i\right)x} \qquad \text{og} \qquad y_2(x) = e^{\left(-\frac{1}{2}-i\right)x}$$

Ettersom y_1 og y_2 løser likning i oppgaveteksten, må nødvendigvis også $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ løse likningen for to konstanter A og B. Vi kan altså skrive den generelle løsningen på formen

$$y\left(x\right) = Ae^{\left(-\frac{1}{2}+i\right)x} + Be^{\left(-\frac{1}{2}-i\right)x}.$$

Dersom du kjenner til formelen $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ kan du bruke til å komme frem til, etter mye jobb, uttrykket

$$y\left(x\right) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C\cos x + D\sin x\right)$$

for noen andre konstanter C og D. Her er det imidlertid mye enklere å bruke kommandoen

```
SolveODE[4y”+4y’+5y=0]
```

som gir

$$y = C_1 \cos\left(x\right) e^{-\frac{x}{2}} + C_2 \sin\left(x\right) e^{-\frac{x}{2}}.$$

Numerisk løsning:

Skriv følgende kommando i CAS:
`LøsODE[4y”+4y’+5y=0]`
Det gir

$$y = C_1 \cos\left(x\right) e^{-\frac{x}{2}} + C_2 \sin\left(x\right) e^{-\frac{x}{2}}.$$

Svar: Karakteristisk likning:

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$$

Generell løsning:

$$\underline{\underline{y = C_1 \cos\left(x\right) e^{-\frac{x}{2}} + C_2 \sin\left(x\right) e^{-\frac{x}{2}}.}}$$

b)
Finn integrasjonskonstantene når du får vite at $y(0) = 3$ og $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$.

Løsningsforslag b)

Ved først å kreve at $y(0) = 3$ får vi

$$3 = C_1 \cos\left(0\right) e^{-0} + C_2 \sin\left(0\right) e^{-0} = C_1 \Rightarrow C_1 = 3.$$

Ved deretter å kreve at $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$ får vi

$$0 = 3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) e^{-\frac{3\pi}{8}} + C_2 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) e^{-\frac{3\pi}{8}} \Rightarrow C_2 = -\frac{3}{\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = -\frac{3}{-1} = 3.$$

Den spesielle løsningen er altså

$$y\left(x\right) = 3e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos x + \sin x\right)$$

Numerisk løsning:

Skriv følgende kommando i CAS:
`LøsODE[4y”+4y’+5y=0,{(0,3),(3 \pi /4,0)}]`
Resultatet er

$$y\left(x\right) = 3\cos\left(x\right) e^{-\frac{x}{2}} + 3e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(x\right).$$

Svar: $\underline{\underline{y\left(x\right) = 3e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\ x + \sin\ x\right)}}$

c)

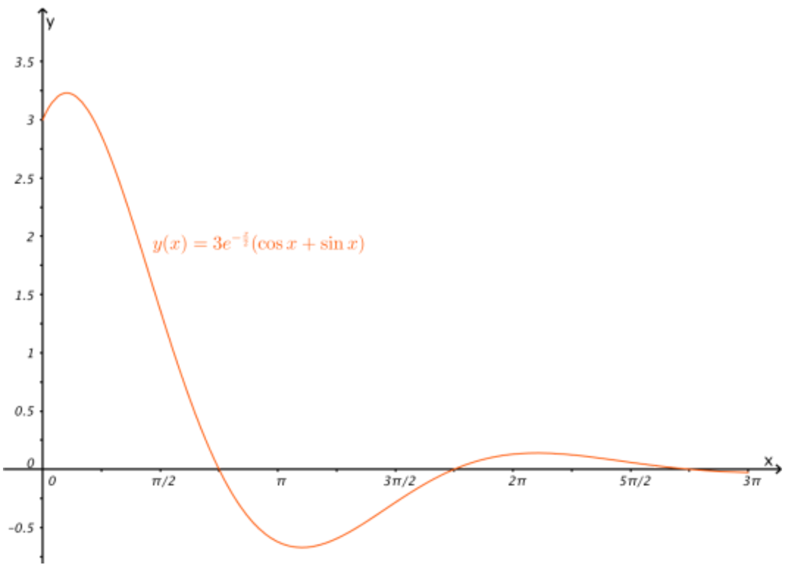
Tegn grafen til $y = f(x)$ for $x \in [0,\ 3\pi\rangle$.

Løsningsforslag c)

Vi bruker følgende kommando i GeoGebra for å definere den spesielle løsningen
`f(x)=3exp(-x/2)(cos(x)+sin(x))`

For å tegne denne på intervallet $[0, 3\pi)$ bruker vi deretter:
`y=Dersom[0 \leq x < 3\pi, f]`

Svar:



d)

Bestem eventuelle nullpunkter til f og koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f når $x \in [0,\ 3\pi\rangle$.

Løsningsforslag d)

Vi begynner med å finne nullpunktene ved å kreve at disse punktene tilfredsstiller $f(x) = 0$. Det gir

$$3e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos x+\sin x\right)=0,$$

og siden $3e^{-\frac{x}{2}}$ ikke kan ha skyld i at funksjonen er null, må

$$\cos x+\sin x=0.$$

Ved å dividere begge sider av likhetstegnet med $\cos x$ kan likningen omgjøres til kravet

$$\tan x=-1,$$

som betyr at

$x=\arctan\left(-1\right)+n\pi,\;\; n\;\in\;\mathbb{Z}$

$x=-\frac{\pi}{4}+n\pi,\, n\in\mathbb{Z}$

$x=n\pi+\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ for $n\in\mathbb{Z}$

(Hvis du ikke har sett funksjonen $\arctan(x)$ før er det antageligvis fordi du har lært å heller skrive $\tan^{-1}\left(x\right)$, som betyr det samme.)

Nullpunktene i intervallet $[0,3\pi)$ er altså

$$x\in\left\{\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{11\pi}{4}\right\}.$$

For å finne topp- og bunnpunkter deriverer vi først funksjonen

$$\begin{aligned}
f^{'}(x) &= \left(3e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\;x+\sin\;x\right)\right)^{'}\\
&= \left(3e^{-\frac{x}{2}}\right)^{'}\left(\cos\;x+\sin\;x\right)+3e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\;x+\sin\;x\right)^{'}\\
&= -\frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\;x+\sin\;x\right)+3e^{-\frac{x}{2}}\left(\left(\cos\;x\right)^{'}+\left(\sin\;x\right)^{'}\right)\\
&= -\frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\;x+\sin\;x\right)+3e^{-\frac{x}{2}}\left(-\sin\;x+\cos\;x\right)\\
&= \left(3-\frac{3}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\cos x+\left(-\frac{3}{2}-3\right)e^{-\frac{x}{2}}\sin x\\
&= \frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos x-3\sin x\right)
\end{aligned}$$

Deretter finner vi mulige ekstremalpunkter x ved å kreve at $f'(x)=0$. Det gir

$$\frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos x-3\sin x\right)=0,$$

og siden $\frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}$ aldri kan bli null må

$$\cos x-3\sin x=0.$$

Ved å dividere begge sider av likhetstegnet med $\cos x$ og løse for $\tan\left(x\right)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ kan vi skrive

$$\tan x = \frac{1}{3},$$

som løses av

$x = n\pi + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{for n} \in \mathbb{Z},$

der $\arctan\frac{1}{3} \approx 0,322$. Ved enten å sette inn vilkårlige verdier mellom nullpunktene, eller å se på grafen i oppgave $2c$, finner vi at funksjonen har toppunkter

$$x \in \{0.322, 6.605\}$$

og bunnpunkt i

$$x = 3,463.$$

Dette finner vi ved å se at $f'(x)$ veksler mellom å være positiv og negativ mellom hvert nullpunkt, og at den begynner som positiv. Nullpunktene til $f(x)$ er

$\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ og $\frac{11\pi}{4}$. Bunnpunktet er $(3.463, -0.672)$ og toppunktene er $(0.322, 3.231)$ og $(6.605, 0.140)$.

Numerisk løsning:

Bruk følgende kommandoer geoGebras grafdel:

```
f(x) = Dersom[0 \leq x < 3\pi, 3exp( -x/2 ) (cos(x) + sin(x))]

NP_1:=Nullpunkt[f, \pi/2,\pi]

NP_2:=Nullpunkt[f, 3\pi/2,2\pi]

NP_3:=Nullpunkt[f, 5\pi/2,3\pi]

BP_1:=Ekstremalpunkt[f, \pi, 2\pi]

TP_1:=Ekstremalpunkt[f, 0, \pi]

TP_2:=Ekstremalpunkt[f, 3\pi/2, 5\pi/2]
```

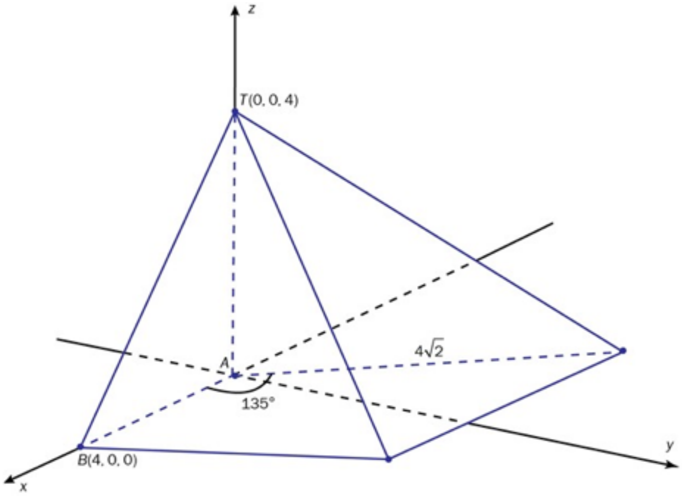
Resultatet er punktene

$$NP_1 = 2.36 \qquad NP_2 = 5.5 \qquad NP_3 = 8.64$$
$$BP_1 = (3.46, -0.67)$$
$$TP_1 = (0.32, 3.23)$$
$$TP_2 = (6.6, 0.14)$$

Svar: Tilnærmede, numeriske verdier er

$$NP_1 = 2.36 \qquad NP_2 = 5.5 \qquad NP_3 = 8.64$$
$$BP_1 = (3.46, -0.67)$$
$$TP_1 = (0.32, 3.23)$$
$$TP_2 = (6.6, 0.14)$$

Oppgave 3 (8 poeng) Nettkode: E-4DFP



En pyramide $ABCDT$ er gitt på figuren ovenfor. Pyramiden settes inn i et tredimensjonalt koordinatsystem slik at koordinatene til A, B og T er gitt ved $A\,(0,\,0,\,0)$, $B\,(4,\,0,\,0)$, $T\,(0,\,0,\,4)$. Punktene C og D ligger i xy-planet.

a)

Vi setter $\angle BAD = 135^\circ$ og $AD = 4\sqrt{2}$. Vis at D har koordinatene $(-4,\,4,\,0)$.

Løsningsforslag a)

Vi kan først merke oss at D ligger i xy-planet og at vi derfor må ha $z = 0$. Siden vinkelen mellom punktet x-aksen og AD er 135°, er vinkelen mellom y-aksen og AD lik 45°. Siden avstanden fra Origo, A, til D, som er $4\sqrt{2}$, er hypotenusen i en likebenet og rettvinklet trekant må katetene ha lik lengde, a. Denne lengden må ifølge Pythagoras læresetning tilfredsstille $a^2 + a^2 = 2a^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32$. Altså må kateten ha lengde $a = 4$. Siden den ene kateten ligger i positiv y-retning og den andre i negativ x-retning må koordinatene til D være $(-4, 4, 0)$.

ALTERNATIV LØSNING

Svar: Koordinatene til D er

$$(-4, 4, 0).$$

b)

Punktet C er slik at $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Vis at C har koordinatene $(2, 4, 0)$.

Løsningsforslag b)

Siden punktet C må tilfredsstille $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, og koordinatvektoren til C er

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

kan det være lettere å ta utgangspunkt i

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Siden A ligger i Origo har vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$ samme koordinater som punktene B og D. Det betyr at

$$\overrightarrow{AB} = [4, 0, 0]$$
$$\overrightarrow{AD} = [-4, 4, 0].$$

Koordinatvektoren til C er da gitt av

$$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\left[4, 0, 0\right] + \left[-4, 4, 0\right] = [\tfrac{3}{2} \cdot 4 - 4{,}4{,}0] = [2{,}4{,}0].$$

Altså kan vi skrive koordinatene til C som

$$(2, 4, 0)\,.$$

Svar: Koordinatene til C er

$$(2, 4, 0)\,.$$

c)

Punktene B, D og T ligger i et plan α.

Vis at likningen for α er $x+2y+z-4=0$

Løsningsforslag c)

Vi begynner med å finne uttrykk for $\overrightarrow{BD}$ og $\overrightarrow{BT}$, som er to vektorer mellom punkter i planet α. Disse er gitt ved

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \left[-4,4,0\right] - \left[4,0,0\right] = \left[-8,4,0\right]$$

$$\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AB} = \left[0,0,4\right] - \left[4,0,0\right] = \left[-4,0,4\right].$$

Deretter beregner vi kryssproduktet $\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BT}$ ved

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BT} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ -8 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \vec{e_x} - \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \vec{e_y} + \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \vec{e_z}$$

$$= 16\vec{e_x} - (-32)\vec{e_y} + 16\vec{e_z} = [16,32,16].$$

Siden vi bare er interessert i retningen til denne vektoren kan vi velge normalvektoren

$$\vec{n} = \tfrac{1}{16}\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{DT} = \left[1,2,1\right].$$

Hvis $\overrightarrow{AP}$ er koordinatvektoren til et punkt i planet α må alle punkter med koordinater (x,y,z) i planet α tilfredsstille likningen

$$\vec{n} \cdot \left(\left[x,y,z\right] - \overrightarrow{AP}\right) = 0.$$

Ved å velge $P = B$ får vi da at likningen for planet α er gitt av

$$\vec{n} \cdot \left(\left[x,y,z\right] - \left[4,0,0\right]\right) = \left[1,2,1\right] \cdot \left[x-4,y,z\right] = x+2y+z-4 = 0.$$

Altså er likningen for planet α

$$x+2y+z-4=0$$

Svar: $\underline{\underline{x+2y+z-4=0}}$

d)

Volumet av pyramiden $ABDT$ kalles V_1 og volumet av pyramiden $CBDT$ kalles V_2.

Bestem forholdet $\frac{V_1}{V_2}$.

Løsningsforslag d)

Siden begge pyramidene innholder punktene B,D og T kan vi bruke kryssproduktet vi beregnet i oppgave c): $\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BT} = [16,32,16]$. Ettersom en pyramide utspent av tre vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ har volum $V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$, kan vi uttrykke volumene V_1 og V_2 ved

$$V_1 = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BT}\right)\right| \text{ og } V_2 = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BC} \cdot \left(\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BT}\right)\right|$$

Alt vi trenger er altså å finne uttrykk for vektorene $\overrightarrow{BA}$ og $\overrightarrow{BC}$. Siden $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AB}$ er koordinatvektoren til B følger det at $\overrightarrow{BA} = \left[-4, 0, 0\right]$. Videre finner vi $\overrightarrow{BC}$ ved

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \left[2, 4, 0\right] - \left[4, 0, 0\right] = \left[-2, 4, 0\right].$$

Altså har vi

$$V_1 = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BT}\right)\right| = \frac{1}{6}\,|[-4,0,0] \cdot [16,32,16]|$$

$$= \frac{1}{6}\,|-4 \cdot 16 + 0 + 0| = \frac{64}{6}$$

og

$$V_2 = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BC} \cdot \left(\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BT}\right)\right| = \frac{1}{6}\,|[-2,4,0] \cdot [16,32,16]|$$

$$= \frac{1}{6}\,|-2 \cdot 16 + 4 \cdot 32 + 0| = \frac{96}{6}$$

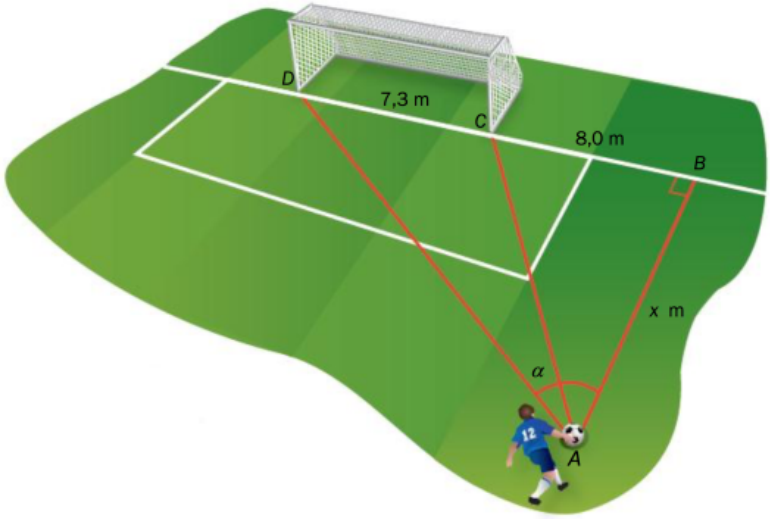
Det betyr at

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\left(\frac{64}{6}\right)}{\left(\frac{96}{6}\right)} = \frac{64}{96} = \frac{2}{3}.$$

Svar: $\underline{\underline{\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}}}$

Oppgave 4 (6 poeng) Nettkode: E-4DFV

Et fotballmål har lengde $CD = 7{,}3$ m. En fotballspiller løper med ballen langs linjestykket AB, slik figuren nedenfor viser. Punktet B ligger $8{,}0$ m fra punktet C. Han vil skyte på mål når $\angle\alpha = \angle DAC$ er størst mulig. $\angle\alpha$ avhenger av lengden $x = AB$.



Vi setter $\angle DAB = u$ og $\angle CAB = v$ og lar $f(x) = \tan(\alpha) = \tan(u - v)$

a)

Bruk formelen $\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v}$ til å vise at $f(x) = \frac{7{,}3x}{x^2 + 122{,}4}$

Løsningsforslag a)

Siden $\triangle\ CAB$ er rettvinklet må

$$\tan v = \tan \angle CAB = \frac{CB}{AB} = \frac{8}{x}.$$

Siden også $\triangle\ DAB$ er rettvinklet må vi ha

$$\tan\ u = \tan\ \angle DAB = \frac{DB}{AB} = \frac{DC + CB}{AB} = \frac{7{,}3\text{ m} + 8{,}0\text{ m}}{x\text{ m}} = \frac{15{,}3}{x}.$$

Fra formelen i oppgaveteksten følger det da at

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan\alpha = \tan\big(u - v\big) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v} \\ &= \frac{\frac{15{,}3}{x} - \frac{8}{x}}{1 + \frac{15{,}3}{x} \cdot \frac{8}{x}} = \frac{(15{,}3 - 8)x}{x^2 + 15{,}3 \cdot 8} = \frac{7{,}3x}{x^2 + 122{,}4}, \end{aligned}$$

som er det vi ønsket å vise.

b)

Bestem den største verdien for $f\,(x)$ og tilhørende verdi for x.

Løsningsforslag b)

For å finne den største verdien for $f(x)$ må vi først beregne $f'(x)$, for deretter å kreve at $f'(x)=0$ på en slik måte at $f'(x)$ går fra å være positiv til å være negativ i punktet x. Fra brøkregelen for derivasjon følger det at

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{7{,}3x}{x^2+122{,}4}\right)' = \frac{(7{,}3x)'\cdot(x^2+122{,}4)-7{,}3x\cdot(x^2+122{,}4)'}{(x^2+122{,}4)^2} \\ &= \frac{7{,}3\cdot(x^2+122{,}4)-7{,}3x\cdot 2x}{(x^2+122{,}4)^2} = \frac{893.52-7{,}3\cdot x^2}{(x^2+122{,}4)^2}. \end{aligned}$$

Siden nevneren aldri blir uendelig stor må $f'(x)=0$ bety at

$$893.52-7,3\cdot x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{893{,}52}{7{,}3}}=\pm\sqrt{122,4}\approx\pm 11,06.$$

Ettersom vi ikke er interessert i situasjonen der fotballspilleren har løpt langt forbi målet velger vi bare den positive løsningen, altså $x\approx 11,06$. Siden disse er de eneste nullpunktene til $f'(x)$, $f'(0)$ er positiv og $f'(100)$ er negativ må $x\approx 11,06$ være det eneste toppunktet til f. Verdien av $f(x)$ er da tilnærmet lik

$$f\left(11,06\right)=\frac{7{,}3\cdot 11{,}06}{(11{,}06)^2+122{,}4}\approx 0,330.$$

Svar: $\underline{\underline{f(11,06)\approx 0,330}}$

c)

Vi vet at α har sin største verdi når $\tan\alpha$ har sin største verdi.

Bestem α_{maks}.

Løsningsforslag c)

Siden α er maksimal når $\tan\alpha$ er maksimal holder det å finne x slik at $f(x)=\tan\alpha$ er maksimal. I oppgave $d)$ fant vi den største verdien for $f(x)$, og siden dette også gir maksimal α kan har vi allerede funnet at

$$\tan\alpha_{maks}\approx 0,330.$$

Det betyr at

$$\alpha_{maks}\approx\arctan\left(0,330\right)\approx 0,319=0.319\,\frac{180}{\pi}^{\circ}\approx 18,3^{\circ}.$$

Altså er den maksimale verdien av α lik $0,319$ radianer, eller $18,3$ grader.

Svar: $\underline{\underline{\alpha_{maks}\approx 0,319\text{ radianer}\approx 18,3^{\circ}.}}$

Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4DFZ

Et plan α er gitt ved likningen

$2x + y - 2z + 3 = 0$

a)
Bestem likningen for den kuleflaten som har sentrum i punktet $S(11,\, 2,\, -6)$ og som har α som tangentplan.

Løsningsforslag a)

Ifølge Pythagoras læresetning må punktene på en kuleflate med sentrum i punktet $S(11, 2, -6)$ og radius R tilfredsstille

$$(x-11)^2 + (y-2)^2 + (z+6)^2 - R^2 = 0.$$

Siden α er et tangentplan for kuleflaten må radien, R, være avstanden fra S til planet α. For å finne denne avstanden trenger vi først et punkt i α. Her kan vi for eksempel velge punktet $A(0, -3, 0)$. Vektoren fra dette punktet til kulens sentrum, S, er da gitt ved

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA} = [11, 2, -6] - [0, -3, 0] = [11, 5, -6].$$

Videre gir koeffisientene i likningen i oppgaveteksten at normalvektoren til planet α er $\vec{n} = [2, 1, -2]$. Avstanden mellom S og planet α er da gitt som

$$R = \left| \overrightarrow{AS} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| [11,5,-6] \cdot \frac{[2,1,-2]}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} \right| = \frac{|11\cdot 2+5\cdot 1+(-6)\cdot(-2)|}{\sqrt{9}}$$

$$= \frac{39}{3} = 13,$$

siden $\overrightarrow{AS} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ gir lengden av den komponenten vektoren $\overrightarrow{AS}$ har i retningen $\vec{n}$.
Likningen for kuleflaten er altså

$$(x-11)^2 + (y-2)^2 + (z+6)^2 - 13^2 = 0.$$

ALTERNATIV LØSNING

Svar: $\underline{\underline{(x-11)^2 + (y-2)^2 + (z+6)^2 - 13^2 = 0}}$

b)

Bestem koordinatene til tangeringspunktet mellom kuleflaten og planet α.

Løsningsforslag b)

Siden tangeringspunktet $P(x_P, y_P, z_P)$ er det punktet i α som er nærmest punktet S betyr det at $\overrightarrow{SP}$ må stå normalt på planet α. Altså må det finnes en konstant k slik at $\overrightarrow{SP} = k\vec{n}$, der $\vec{n} = [2, 1, -2]$ er normalvektoren til planet α. Vi har da at koordinatvektoren til punktet P er må tilfredsstille både

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + k\vec{n} = [11, 2, -6] + k[2, 1, -2] = [11 + 2k, 2 + k, -6 - 2k]$$

og

$$2x_P + y_P - 2z_P + 3 = 0.$$

Ved å sette koordinatene til P som funksjon av k inn i likningen for planet α finner vi

$$\begin{aligned} 2(11 + 2k) + (2 + k) - 2(-6 - 2k) + 3 &= 22 + 4k + 2 + k + 12 + 4k + 3 \\ &= 39 + 9k = 0 \\ &\Rightarrow k = -\frac{39}{9} = -\frac{13}{3}. \end{aligned}$$

Altså er koordinatene til tangeringspunktet

$$P = (11 + 2k, 2 + k, -6 - 2k) = \left(11 + 2 \cdot \left(-\frac{13}{3}\right), 2 - \frac{13}{3}, -6 - 2 \cdot \left(-\frac{13}{3}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

Svar: $\underline{\underline{P\left(\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)}}$

c)

Et plan β er gitt ved

$$2x + y - 2z = 0$$

Dette planet skjærer kuleflaten langs en sirkel.

Bestem radien i denne sirkelen.

Løsningsforslag c)

Som i oppgave $5a)$ finner vi avstanden mellom punktet S og planet β ved først å velge et punkt A i β for deretter å beregne

$$d = \left| \overrightarrow{SA} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right|.$$

Siden likningen for β ikke har noe konstantledd ligger $O(0,0,0)$ i β. Det betyr at

$$d = \left| \overrightarrow{SA} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| -\overrightarrow{OS} \cdot \frac{[2,1,-2]}{3} \right| = \left| -[11,2,-6] \cdot \frac{[2,1,-2]}{3} \right|$$

$$= \left| \frac{22+2+12}{3} \right| = \left| \frac{36}{3} \right| = 12$$

Hvis N er det punktet i planet β som er nærmest S og P er et annet punkt i β vil alltid $\triangle NSP$ være rettvinklet. Siden alle punkter på kuleflaten har avstand $R = 13$ fra S følger det fra pythagoras læresetning at radien r i sirkelen er

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5.$$

Svar: $\underline{\underline{r = 5}}$