REA3024 2015 Vår

Eksamenstid:
5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 3 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Del 1 har 9 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
- vurderer om svar er rimelige

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.:

- London Eye, en.wikipedia.org, www.saylor.org (01.12.2014)
- Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng) Nettkode: E-4DNB

Deriver funksjonene

a)
$f(x) = -3\cos x$

Løsningsforslag a)

Siden den deriverte av en konstant multiplisert med en funksjon, er den samme konstanten multiplisert med den deriverte av funksjonen holder det å huske at $(\cos x)' = -\sin x$. Den deriverte av $f(x)$ er altså

$$f'(x) = (-3\cos x)' = -3(\cos x)' = -3(-\sin x) = 3\sin x.$$

Svar:

$$\underline{\underline{f'(x) = 3\sin x}}$$

.

b)
$g(x) = \sin^2 x$

Løsningsforslag b)

Siden vi vet hvordan vi kan derivere $u(x) = \sin x$ og $h(u) = u^2$ begynner vi med å skrive $g(x) = \sin^2 x = u(x)^2 = h(u(x))$. Ved å benytte kjerneregelen for derivasjon, som sier at $(h(u(x)))' = h'(u(x)) \cdot u'(x)$, finner vi da at

$$g'(x) = u'(x)h'(u) = (\cos x) \cdot 2u(x)$$

$$= \cos x \cdot 2\sin x = \sin 2x$$

Svar: $\underline{\underline{g'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x}}$

c)

$h(x) = x^3 \cdot e^{-x}$

Løsningsforslag c)

Ved å sette $u(x) = x^3$ og $v(x) = e^{-x}$ kan vi bruke produktregelen for derivasjon, som sier at $(uv)' = u'v + vu'$, til å finne

$h'(x) = (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) =$

$= \left(3x^2\right)\left(e^{-x}\right) + \left(x^3\right)\left(\left(-x\right)'e^{-x}\right) = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x}$

somvi godt kan skrive

$$h'(x) = x^2e^{-x}(3 - x).$$

Svar: $\underline{\underline{h'(x) = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = x^2e^{-x}(3 - x)}}$

Oppgave 2 (5 poeng) Nettkode: E-4DNF

Regn ut integralene

a)

$\int_1^2 \left(x^2 + 2x - 3\right) \mathrm{dx}$

Løsningsforslag a)

Først bruker vi at integralet av en sum er en sum av integraler til å konstatere at

$$\int_1^2 \left(x^2 + 2x - 3\right) dx = \int_1^2 x^2 dx + 2\int_1^2 x dx - 3\int_1^2 dx.$$

Siden den deriverte av $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ er x^n følger det videre at $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$.
Altså kan vi skrive

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2 dx + 2\int_1^2 x dx - 3\int_1^2 dx &= \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_1^2 + 2\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2 - 3[x]_1^2 \\ &= \left(\tfrac{1}{3}2^3 - \tfrac{1}{3}1^3\right) + 2\left(\tfrac{1}{2}2^2 - \tfrac{1}{2}1^2\right) - 3(2-1) \\ &= \tfrac{7}{3} + 3 - 3 = \tfrac{7}{3}.\end{aligned}$$

Altså har vi funnet at

$$\int_1^2 \left(x^2 + 2x - 3\right) dx = \frac{7}{3}.$$

Svar: $\underline{\underline{\frac{7}{3}}}$.

b)

$\int \frac{3x}{x^2-x-2}\mathrm{dx}$

Løsningsforslag b)

Før vi kan bruke delbrøkoppspalting må vi faktorisere polynomet i nevneren – det gjør vi ved å finne nullpunktene til polynomet. Med andre ord må vi finne de x-verdiene som tilfredsstiller $x^2 - x - 2 = 0$. Annengradsformelen gir løsningene

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4\cdot(-2)} = \frac{1\pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases},$$

det betyr at nevneren kan faktoriseres $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. Altså kan det se ut som om delbrøkoppspalting er den beste metoden. Her kan du enten se at $3x = 2(x+1) + (x-2)$, eller sette opp kravet

$$\frac{3x}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Dette kan du skrive som $3x = A(x-2) + B(x+1)$. Siden denne likningen må være oppfylt for alle verdier av x må $3x = Ax + Bx$ og $0 = -2A + B$. Delbrøkoppspaltingen løses altså av $A = 1$ og $B = 2$. Integralet kan altså skrives på formen

$$\int \frac{3x}{x^2-x-2}dx = \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{2dx}{x-2}.$$

Disse integralene kan vi løse ved enten å bruke substitusjonen $u = x+1$ og $v = x-2$ slik at

$$\int \frac{3x}{x^2-x-2}dx = \int \frac{du}{u} + \int \frac{2dv}{v} = \ln|u| + 2\ln|v| + C = \ln|x+1| + 2\ln|x-2| + C,$$

eller ved å komme på at den deriverte til $\ln|x+a|$ er $\frac{1}{x+a}$.

Svar: $\underline{\underline{\ln|x+1| + 2\ln|x-2| + C.}}$

c)

$\int x \cdot \ln x\,\mathrm{dx}$

Løsningsforslag c)

Vi benytter delvis integrasjon, som sier at

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx,$$

ved å sette $u(x) = \ln x$ og $v'(x) = x$. Den deriverte av $\ln x$ er $\frac{1}{x}$, så $u'(x) = \frac{1}{x}$ og siden $v'(x) = x$ har vi $v(x) = \frac{1}{2}x^2$. Dette gir

$$\begin{aligned}\int x\ln x dx &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.\end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{\int x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C}}$

Oppgave 3 (4 poeng) Nettkode: E-4DNJ

a)

Bruk en integrasjonsmetode til å vise at $\int x \cdot e^{x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

Løsningsforslag a)

Vi bruker substitusjonen $u(x) = e^{x^2}$ og ser at vi da kan skrive

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int \tfrac{1}{2}u'(x)\,dx = \int \tfrac{1}{2}du = \tfrac{1}{2}u(x) + C = \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Svar: Substitusjon med $u(x) = e^{x^2}$.

b)

Løs differensiallikningen

$y' + 2xy = 4x \quad , \quad y(0) = 8$

Løsningsforslag b)

Vi kan løse differensiallikningen ved å benytte integrerende faktor. Siden koeffisienten til det lineære y-leddet er $2x$ og

$$\int 2xdx = x^2 + C,$$

kan vi multiplisere begge sider av differensiallikningen med e^{x^2}. Da får vi at

$$e^{x^2} y' + 2xe^{x^2} y = 4xe^{x^2}.$$

Her kan vi kjenne igjen produktregelen for derivasjon, og dermed skrive differensiallikningen på formen

$$\left(e^{x^2} y\right)' = 4xe^{x^2}.$$

Ved å integrere begge sider får vi da at

$$\int \left(e^{x^2} y\right)' dx = ye^{x^2} + C_1$$

og ifølge oppgave $3a)$ må

$$4 \int xe^{x^2} dx = 2e^{x^2} + C_2.$$

Det gir

$$ye^{x^2} = 2e^{x^2} + C$$

der $C = C_2 - C_1$. At $y(0) = 8$ gir oss kravet

$y(0)e^{0^2} = 2e^{0^2} + C \Rightarrow C = y(0) - 2 = 8 - 2 = 6$

Ved nå å multiplisere begge sider av likningen med e^{-x^2} ser vi at den spesielle løsningen kan skrives

$$y = 2 + 6e^{-x^2}.$$

Svar: $\underline{\underline{y = 2 + 6e^{-x^2}}}$

Oppgave 4 (3 poeng) Nettkode: E-4DNS

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$S(x) = 2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \ldots \quad , \quad x \neq 0$

a)
Bestem konvergensområdet til rekken.

Løsningsforslag a)

En uendelig geometrisk rekke

$$C + C\gamma + C\gamma^2 + C\gamma^3 + \ldots$$

konvergerer for alle γ slik at $|\gamma| < 1$. Vi må altså ha

$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} < 1.$$

Siden $|x|$ er positiv når $x \neq 0$ får vi $|x| > 1$ som betyr at konvergensområdet til den uendelige geometriske rekken er

$$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Svar:

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$

b)
Bestem x slik at $S(x) = 4$

Løsningsforslag b)

Hvis en uendelig geometrisk rekke $C + C\gamma + C\gamma^2 + C\gamma^3 + \ldots$ konvergerer, må den konvergere mot $C/(1-\gamma)$. Altså må vi ha

$$S\left(x\right) = 2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \ldots = \frac{2}{1-\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Kravet for at $S(x) = 4$ blir altså

$$\frac{2}{1-\left(\frac{1}{x}\right)} = 4.$$

Det kan vi skrive som $2 = 4 - \frac{4}{x}$, som videre gir $1 = \frac{2}{x}$. Altså er $S(x) = 4$ hvis $x = 2$.

Svar: $x = 2$.

Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4DO2

Punktene $A\,(3,\,0,\,0)$, $B\,(0,\,4,\,0)$ og $C\,(0,\,0,\,1)$ er gitt.

a)

Bestem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Bestem arealet av ΔABC.

Løsningsforslag a)

Vi finner først vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ ved
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \vec{B} - \vec{A} = \left[-3, 4, 0\right]\\ \overrightarrow{AC} &= \vec{C} - \vec{A} = \left[-3, 0, 1\right].\end{aligned}$$
Kryssproduktet blir da

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 4\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 12\,\vec{k} = [4,3,12]$$

Lengden av vektoren $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ er lik arealet av parallellogrammet utspent av vektorene $\vec{AB}$ og $\vec{AC}$. Ettersom $\triangle\, ABC$ utgjør halve parallellogrammet finner vi arealet av trekanten ved å beregne $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$. Da finner vi at

$$\begin{aligned}Areal \triangle\, ABC &= \tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \tfrac{1}{2}\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{16+9+144} = \tfrac{1}{2}\sqrt{169} = \tfrac{1}{2}\sqrt{13^2} = \tfrac{13}{2} = 6,5\end{aligned}$$

er arealet av trekanten $\triangle\, ABC$.

Svar:
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= [4, 3, 12]\\ Areal \triangle\, ABC &= \tfrac{13}{2}\end{aligned}$$

b)

Punktene A, B og C ligger i et plan α. Bestem likningen for planet α.

Løsningsforslag b)

Ved å velge vektoren $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left[4, 3, 12\right]$ som normalvektor for planet α kan vi sette opp planlikningen

$$4x + 3y + 12z + C = 0$$

for en eller annen konstant C. Alternativt kan vi skrive $\vec{n} \cdot \left(\vec{a} - \vec{p}\right) = 0$ for en kjent vektor $\vec{p}$ i α og for alle vektorer $\vec{a}$ i α. Konstanten C kan vi finne ved å kreve at punktet $C(0, 0, 1)$ må ligge i α. Vi får da

$$4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 12 \cdot 1 + C = 0 \Rightarrow C = -12.$$

Altså kan likningen for planet α skrives

$$4x + 3y + 12z - 12 = 0.$$

Svar: Likningen for planet α er

$$4x + 3y + 12z - 12 = 0.$$

c)
En partikkel starter i origo $O(0, 0, 0)$. Etter tiden t er partikkelen i et punkt P gitt ved

$$\overrightarrow{OP} = \left[t, \frac{t^2}{3}, -\frac{t}{4}\right] \quad , \quad t \geq 0$$

Hvor lang tid tar det før partikkelen treffer planet α? Bestem koordinatene til punktet der partikkelen treffer α.

Løsningsforslag c)

Partikkelen treffer planet når $\overrightarrow{OP}$ tilfredsstiller planlikningen for α. Altså må

$$4P_x + 3P_y + 12P_z - 12 = 4t + 3\tfrac{1}{3}t^2 - 12\tfrac{1}{4}t - 12 = t^2 + t - 12 = 0.$$

Ved å benytte annengradslikningen for å finne tiden t som tilfredsstiller dette får vi

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}.$$

Dette betyr at partikkelen har truffet planet α før, nemlig da $t = -4$, og at den kommer til å treffe planet α når $t = 3$. Siden vi ikke liker å arbeide med negativ tid anser vi $t_\alpha = 3$ for å være det eneste interessante tidspunktet. Koordinatene til punktet der partikkelen treffer α er da gitt av

$$\overrightarrow{OP} = \left[t_\alpha, \tfrac{1}{3}t_\alpha^2, -\tfrac{1}{4}t_\alpha\right] = \left[3, \tfrac{1}{3} \cdot 3^2, -\tfrac{1}{4} \cdot 3\right] = \left[3, 3, -\tfrac{3}{4}\right]$$

eller $P(3, 3, -3/4)$.

Svar: Partikkelen treffer planet α i punktet $P(3, 3, -3/4)$ ved tiden $t = 3$.

Oppgave 6 (2 poeng) Nettkode: E-4DO7

En tallfølge $\{a_n\}$ er gitt ved at $a_1 = -1$ og $a_{n+1} = a_n + n - 1$

Bruk induksjon til å bevise at $a_n = \frac{n(n-3)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$

Løsningsforslag

Påstanden stemmer for $n = 1$ siden $\frac{1}{2}n(n-3) = \frac{1}{2}1(1-3) = -1 = a_1$. La oss nå anta at påstanden stemmer for $n = k$. Betyr dette at påstanden også må stemme for $n = k + 1$? Følgen er definert ved $a_{k+1} = a_k + k - 1$, og siden påstanden stemmer for $n = k$ må vi ha

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + k - 1 = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2-3k+2k-2}{2} \\ &= \frac{k^2-k-2}{2}. \end{aligned}$$

Siden

$$\frac{(k+1)(k+1-3)}{2} = \frac{k^2-k-2}{2}$$

har vi altså vist at hvis $a_k = \frac{1}{2}k(k-3)$ så må

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}(k+1)(k+1-3).$$

Det er alt vi trenger for å konkludere med at $a_n = \frac{n(n-3)}{2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.

Oppgave 7 (6 poeng) Nettkode: E-4DRB

Funksjonen f er gitt ved

$f(x) = 3 - 3\cos\left(1 - x^2\right) \quad , \qquad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

a)

Bestem nullpunktene til f ved regning.

Løsningsforslag a)

Vi finner alle punkter x som oppfyller $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 3 - 3\cos\left(1 - x^2\right) &= 0 \\ \Rightarrow \qquad \cos\left(1 - x^2\right) &= 1 \\ \Rightarrow \qquad 1 - x^2 &= \quad 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Videre gir dette

$$x = \pm\sqrt{1 - 2\pi n}.$$

Siden $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ må $n = 0$. Nullpunktene til f er altså $x = -1 \quad \text{og} \quad x = 1$.

Svar: Nullpunkter for f er $x = -1 \quad \text{og} \quad x = 1$

b)

Bruk $f'(x)$ til å bestemme x-verdien til eventuelle topp- eller bunnpunkter på grafen til f.

Løsningsforslag b)

Den deriverte av $f(x)$ er

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(3 - 3\cos\left(1 - x^2\right)\right)' = \left(-3\left(\cos\left(1 - x^2\right)\right)\right)' = 3\left(1 - x^2\right)'\sin\left(1 - x^2\right) \\ &= 3\left(-2x\right)\sin\left(1 - x^2\right) = -6x\sin\left(1 - x^2\right). \end{aligned}$$

Vi finner nå alle verdier for x som tilfredsstiller $f'(x) = 0$. Hvis

$$f'(x) = -6x\sin\left(1 - x^2\right) = 0$$

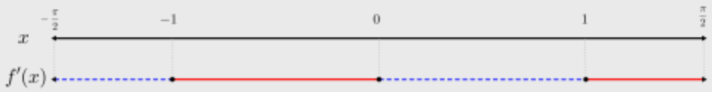
må enten $6x = 0$ eller $\sin\left(1 - x^2\right) = 0$. Det betyr at $x = 0$ eller

$1 - x^2 = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Da er

$$x = \pm\sqrt{1 - n\pi}$$

og siden $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ må $n = 0$. Altså er $f'(x) = 0$ i punktene $x = -1$,$x = 0$ og $x = 1$. Ved å velge tilfeldige punkter i de fire intervallene $\langle -\pi/2, -1 \rangle$,$\langle -1, 0 \rangle$,$\langle 0, 1 \rangle$ og $\langle 1, \pi/2 \rangle$ kan vi konstruere følgende fortegnslinje



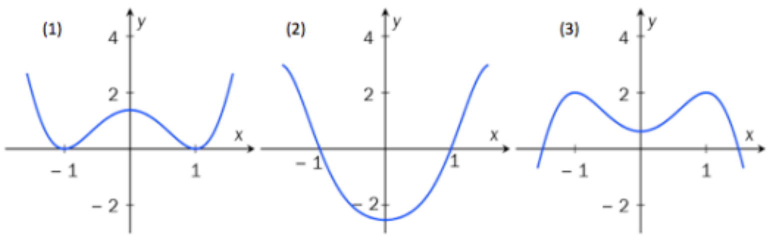
som betyr at $f(x)$ har bunnpunkter i $x = -1$ og $x = 1$, og et toppunkt i $x = 0$.

Svar: $f(x)$ har bunnpunkter i $x = -1$ og $x = 1$, og toppunkt i $x = 0$.

c)

Nedenfor er det tegnet tre grafer. Én av dem er grafen til f. Avgjør hvilken.

Begrunn svaret.



Løsningsforslag c)

Den eneste grafen med nullpunkter i $x = \pm 1$, bunnpunkter i $x = \pm 1$ og toppunkt i $x = 0$ er (1). Derfor må dette være grafen til f.

Svar: Graf (1) er grafen til f.

Oppgave 8 (4 poeng) Nettkode: E-4DRF

En trigonometrisk formel er gitt ved

$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$

a)
Bruk formelen til å bestemme et uttrykk for $\cos(2x)$.

Løsningsforslag a)

Siden likningen i opppgaveteksten holder for alle verdier av u og v, må den også holde for $x = u = v$. Da sier formelen at

$$\cos(2x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

som betyr at vi har funnet et uttrykk for $\cos(2x)$.

Svar: $\underline{\underline{\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.}}$

b)
Skriv uttrykket $\cos^4 x - \sin^4 x$ så enkelt som mulig.

Løsningsforslag b)

Ifølge konjugatsetningen er $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Hvis $a = \cos^2 x$ og $b = \sin^2 x$ er da

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x).$$

Ved å benytte den trigonometriske identiteten som sier at $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ for alle x og resultatet fra deloppgave a), er

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x).$$

Svar: $\underline{\underline{\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)}}$

Oppgave 9 (2 poeng) Nettkode: E-4DRI

Løs likningen

$\sin x + \cos x = 1 \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$

Løsningsforslag

Likningen blir mye lettere å løse dersom vi klarer å finne to konstanter d og ϕ slik at $\sin x + \cos x = d\cos(x+\phi)$. Her har vi to muligheter. Vi kan enten gjenkjenne definisjonen av skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b} = \| \vec{a} \| \cdot \| \vec{b} \| \cos\theta$ fra omskrivningen $\sin x + \cos x = [1,1] \cdot [\cos x, \sin x] = \| [1,1] \| \cdot \| [\cos x, \sin x] \| \cos\theta$ og se at siden $\| [\cos x, \sin x] \| = 1$ må $d = \| \left[1, 1,\right] \| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Vi husker at formelen $a\sin(cx) + b\cos(cx) = d\cos(cx+\phi)$ alltid tilfredsstiller $d = \sqrt{a^2 + b^2}$. Det giri $d = \sqrt{2}$. Vi har altså at $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x+\phi\right)$. Siden ϕ er en konstant uavhengig av verdien av x kan vi velge $x = 0$ og se at

$\sin 0 + \cos 0 = \sqrt{2}\cos\left(0+\phi\right) \Leftrightarrow \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4},$

Hvis vi velger ϕ i første omløp, gjenstår det å løse likningen

$$\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad \text{og} \quad x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}$

som gir

$x = 2\pi n \quad \text{og} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}$

Siden $x \in [0, 2\pi]$ har likningen altså de tre løsningene $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ og $x = 2\pi$. Dette kan vi skrive

$$x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\right\}$$

Svar: $\underline{\underline{x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\right\}}}$.

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng) Nettkode: E-4DRK

Roger planlegger en sykkeltur. Han regner med å kunne starte med farten 26 km/h. Etter hvert vil farten avta etter formelen

$v(t) = 26 - 0{,}08 \cdot s(t)$

- $v(t)$ og $s(t)$ er begge funksjoner som er avhengige av tiden t målt i timer
- $v(t)$ er farten målt i kilometer per time
- $s(t)$ er den tilbakelagte veilengden målt i kilometer

a)
Bestem farten etter 125 km.

Løsningsforslag a)

Etter 125 km er $s(t) = 125$ og derfor

$$v(t) = 26 - 0{,}08s(t) = 26 - 0{,}08 \cdot 125 = 16,$$

som betyr at Roger sykler med en fart på 16 kilometer per time etter han har syklet 125 kilometer.

Svar: Farten etter 125 km er 16 kilometer per time.

b)
Formelen ovenfor kan vi skrive som differensiallikningen

$s'(t) = 26 - 0{,}08 \cdot s(t)$

Bestem $s(t)$ når $s(0) = 0$.

Løsningsforslag b)

Vi skal løse differensiallikningen

$s'(t) = 26 - 0{,}08s$

Først ordner vi likningen slik:

$s' + 0{,}08s = 26$

Likningen er lineær første ordens med integrerende faktor $e^{0,08t}$. Vi multipliserer med integrerende faktor og får

$s'e^{0,08t} + 0,08e^{0,08t}s = 26e^{0,08t}$

Venstresiden er $\left(se^{0,08t}\right)'$ så vi kan integrere begge sider og få

$se^{0,08t} = \frac{26}{0,08}e^{0,08t} + C$

Etter multiplikasjon med $e^{-0,08t}$ får vi

$s = 325 + Ce^{-0,08t}$

Opplysningen $s(0) = 0$ gir

$s(0) = 325 + Ce^{-0,08\cdot 0} = 325 + C = 0$

Det følger at $C = -325$ Løsningen på initialverdiproblemet er derfor

$$s\left(t\right) = 325 - 325e^{-0,08t}.$$

ALTERNATIV LØSNING (NUMERISK)

Svar: $s\left(t\right) = 325 - 325e^{-0,08t}$.

c)

Hvor langt sykler Roger den første timen? Hvor lang tid bruker han på 125 km?

Løsningsforslag c)

Etter én time har Roger syklet en lengde gitt av

$$s\left(1\right) = 325 - 325e^{-0,08} \approx 24,99.$$

Altså har Roger syklet omlag $24,99$ kilometer i løpet av det første timen. For å finne tiden Roger bruker på å sykle 125 kilometer må vi løse

$$325 - 325e^{-0,08t} = 125 \Rightarrow e^{-0.08t} = \frac{200}{325} \Rightarrow t = -\frac{1}{0.08}\ln\frac{200}{325} \approx 6.07$$

Altså tar det Roger litt over seks timer å sykle 125 kilometer.

ALTERNATIV LØSNING (NUMERISK)

Svar: Roger har syklet omlag $24,99$ kilometer i løpet av det første timen. Etter rundt 6.07 timer har Roger syklet 125 kilometer.

Oppgave 2 (6 poeng) Nettkode: E-4DRO

Hjørnene i en pyramide $ABCP$ er $A(0,\,0,\,0)$, $B(1,\,0,\,-1)$, $C(1,\,1,\,0)$ og $P\left(t,\,2t+1,\,t^2+2\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

a)
Bestem et uttrykk for volumet $V(t)$ av pyramiden.

Løsningsforslag a)

Først finner vi tre vektorer som utspenner pyramiden. Ved å ta utgangspunkt i A ser vi at pyramiden utspennes av

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= [1,0,-1]\\ \overrightarrow{AC} &= [1,1,0]\\ \overrightarrow{AP} &= \left[t,2t+1,t^2+2\right].\end{aligned}$$

Deretter beregner vi kryssproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ved

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = [1,\,-1,1]$$

Volumet blir altså

$$V(t) = \tfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{AP} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right)\right| = \tfrac{1}{6}\left|\left[t,2t+1,t^2+2\right] \cdot [1,\,-1,1]\right|$$

$$= \tfrac{1}{6}\left|t-2t-1+t^2+2\right| = \tfrac{1}{6}\left|t^2-t+1\right|$$

og siden t^2-t+1 alltid er positiv kan vi skrive

$$V(t) = \tfrac{1}{6}\left(t^2-t+1\right).$$

Svar:

$$V(t) = \tfrac{1}{6}\left(t^2-t+1\right).$$

b)

Bestem koordinatene til P slik at $V(t) = \frac{7}{2}$.

Løsningsforslag b)

At $V(t) = \frac{7}{2}$ betyr at

$$V(t) = \frac{1}{6}\left(t^2 - t + 1\right) = \frac{7}{2} \Rightarrow t^2 - t - 20 = 0.$$

Ifølge annengradsformelen skjer dette når $t = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot 20}}{2} = \frac{1\pm 9}{2} \in \left\{-4, 5\right\}$. Altså er koordinatene til P slik at $V(t) = \frac{7}{2}$ gitt av

$P\left(-4,\ 2(-4)+1,\ (-4)^2+2\right) = P(-4,\ -7{,}18)$

eller

$P\left(5,\ 2\cdot 5+1,\ 5^2+2\right) = P(5,\ 11\ {,}27).$

Svar: $\underline{\underline{P(-4,\ -7{,}18) \quad \text{eller} \quad P(5{,}11{,}27)}}$

c)

Bestem koordinatene til P slik at volumet $V(t)$ blir minst mulig.

Løsningsforslag c)

Vi finner først $V'(t)$ på følgende måte

$$V'(t) = \left(\frac{1}{6}\left(t^2 - t + 1\right)\right)' = \frac{1}{6}\left(2t - 1\right).$$

Deretter krever vi $V'(t) = 0$, som gir

$$V'(t) = \frac{1}{6}\left(2t - 1\right) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Til slutt bruker vi denne verdien, $t = \frac{1}{2}$, til å finne koordinatene til punktet P slik at volumet $V(t)$ blir minst mulig ved innsetting

$$P\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2} + 1, \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\right) = P\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{4}\right).$$

Svar: Koordinatene til P slik at volumet $V(t)$ blir minst mulig er

$$\underline{\underline{P\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{4}\right).}}$$

Oppgave 3 (6 poeng) Nettkode: E-4DRT

London Eye er et pariserhjul med diameter lik 135 m. En runde tar 30 min. Passasjerene går ombord i pariserhjulet fra en plattform som ligger 2 m over bakkenivå.

Etter t min fra ombordstigning er en passasjer $h(t)$ m over bakkenivå. Det kan vises at

$$h(t) = -67{,}5\cos\left(\frac{\pi}{15}t\right) + 69{,}5$$

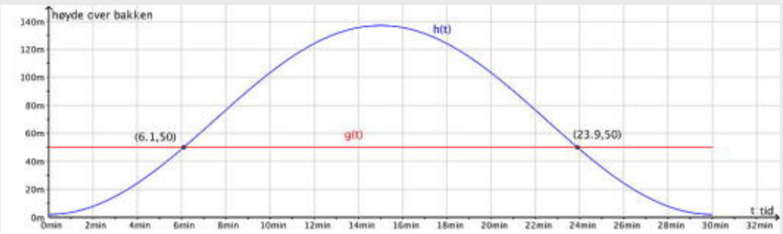
a)

Bruk graftegner til å tegne grafen til h for $t \in [0,\ 30]$. Bestem grafisk når passasjeren er 50 m over bakkenivå.

Løsningsforslag a)

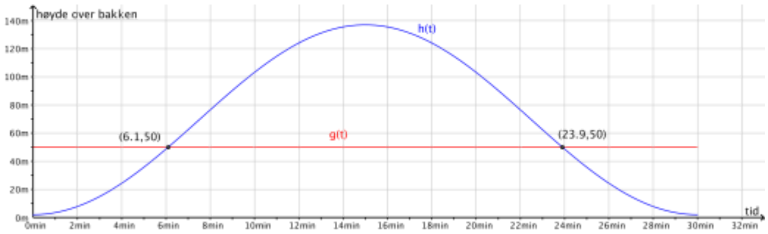
Vi bruker geoGebra med kommandoene

```
f(t) := -67.5\cos(\pi t/ 15) + 69.5
g(t) := Funksjon[50,0,30]
h(t) := Funksjon[f(t),0,3]
Skjæring[h, g, 0, 30]
```



Ifølge figuren skjærer grafen til $g(t) = 50$ grafen til $h(t)$ altså ved tidspunktene $t = 6,1$ og $t = 23,9$. Passasjeren er med andre ord 50 m over bekknivå etter $6,1$ minutter og etter $23,9$ minutter.

Svar:



Passasjeren er 50 m over bekknivå etter $6,1$ minutter og etter $23,9$ minutter.

b)

Bestem vendepunktene på grafen til h.

Forklar hvilken praktisk informasjon verdiene av $h'(7{,}5)$ og $h'(22{,}5)$ gir.

Løsningsforslag b)

Først finner vi et uttrykk for den andrederiverte av høyden $h(t)$. Den første deriverte er gitt av

$$\begin{aligned} h'(t) &= \left(-67,5\cos\left(\tfrac{\pi}{15}t\right)+69,5\right)' = -67,5\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{15}t\right)\right)' \\ &= 67,5\left(\tfrac{\pi}{15}t\right)'\sin\left(\tfrac{\pi}{15}t\right) = 67,5\tfrac{\pi}{15}\sin\left(\tfrac{\pi}{15}t\right) = 4,5\pi\sin\left(\tfrac{\pi}{15}t\right), \end{aligned}$$

ved å bruke kjerneregelen med kjernen $\frac{\pi}{15}t$ og at den deriverte av $\cos t$ er $-\sin t$. Videre finner vi at den andrederiverte er gitt av

$$h''(t) = \left(4{,}5\pi\sin\left(\tfrac{\pi}{15}t\right)\right)' = 4{,}5\pi\left(\tfrac{\pi}{15t}\right)'\cos\left(\tfrac{\pi}{15}t\right)$$

$$= 4{,}5\pi\tfrac{\pi}{15}\cos\left(\tfrac{\pi}{15}t\right) = 0{,}3\pi^2\cos\left(\tfrac{\pi}{15}t\right)$$

ved å bruke kjerneregelen med kjernen $\frac{\pi}{15}t$ og at den deriverte av $\sin t$ er $\cos t$. Vendepunktene er nøyaktig de verdiene for t som tilfredsstiller likningen $h''(t) = 0$. Altså

$$0{,}3\pi^2\cos\left(\tfrac{\pi}{15}t\right) = 0 \Rightarrow \tfrac{\pi}{15}t = \tfrac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}$$

som har løsningene

$$t = 7{,}5 + 15n \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}$$

I tidsintervallet $[0, 30]$ har pariserhjulet altså to vendepunkter, nemlig

$$t = 7{,}5 \quad \text{og} \quad t = 22{,}5.$$

Siden h er en harmonisk funksjon, vil h'' være harmonisk med likevektslinje $y = 0$. Det medfører at h'' bytter fortegn i nullpunktene sine. Den momentane vekstfarten i disse punktene, $h'(7,5)$ og $h'(22,5)$, beskriver henholdsvis den maksimale stigningen og den maksimale nedstigningen. Med andre ord vil verdien av $h'(7,5)$ gi oss den

største farten en passasjer vil bevege seg med oppover, mens $h'(22,5)$ vil være den største farten en passasjer vil bevege seg med nedover.

ALTERNATIV LØSNING

Svar: Grafen til h har vendepunkter ved tidspunktene
$t = 7{,}5 \quad \text{og} \quad t = 22{,}5.$ $h'(7,5)$ og $h'(22,5)$ er henholdsvis maksimal fart oppover og maksimal fart nedover.

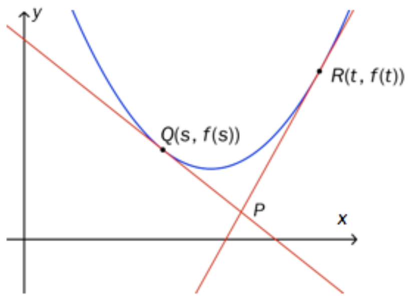
Oppgave 4 (6 poeng) Nettkode: E-4DS9

Funksjonen f er gitt ved

$f(x) = x^2 + ax + b \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$

Tangentene i punktene $Q(s, f(s))$ og $R(t, f(t))$ skjærer hverandre i et punkt P.

Se skisse 1.



Skisse 1

a)
Vis at likningene for de to tangentene er

$g(x) = (a + 2s)x + b - s^2$ og $h(x) = (a + 2t)x + b - t^2$

Løsningsforslag a)

For å finne stigningstallet til tangentene til $f(x)$ i punktene Q og R må vi først komme frem til et uttrykk for $f'(x)$. Siden den deriverte av en sum er summen av de deriverte har vi

$$f'(x) = \left(x^2 + ax + b\right)' = 2x + a.$$

Stigningstallet i Q er altså $f'(s) = 2s + a$ og stigningstallet i R er $f'(t) = 2t + a$. Siden $g(x)$ er en rett linje kan den skrives på formen $g(x) = Ax + B$ der A er stigningstallet og B er en konstant. Siden vi har funnet stigningstallet kan vi skrive

$$g(x) = (a + 2s)x + B$$

og siden $g(x)$ må gå gjennom punktet $Q(s, f(s))$ må vi ha

$$g(s) = f(s) = (a + 2s)s + B.$$

Ved å bruke uttrykket for $f(x)$ kan vi skrive dette som

$$s^2 + as + b = \left(a + 2s\right)s + B,$$

som betyr at $B = b - s^2$ og derfor

$$g(x) = \left(a + 2s\right)x + b - s^2.$$

For å finne $h(x)$ bruker vi samme fremgangsmåte. Siden $h(x)$ er en rett linje med stigningstall $a + 2t$ kan vi skrive $h(x) = (a + 2t)x + B$ der B er en konstant vi kan bestemme ved å kreve at

$$f(t) = (a + 2t)t + B,$$

siden $h(x)$ må gå gjennom punktet R. Dette gir at

$$t^2 + at + b = (a + 2t)t + B \Rightarrow B = b - t^2,$$

og derfor

$$h(x) = (a + 2t)t + b - t^2.$$

b)

Bruk CAS til å vise at x-koordinaten til punktet P er gitt ved $x_P = \frac{s+t}{2}$.

Løsningsforslag b)

Først definerer vi funksjonen $f(x)$ med kommandoen
`f(x):=x^2+a*x+b`

Deretter definerer vi de to tangentene $g(x)$ og $h(x)$ ved hjelp av `Tangent`-funksjonen
`g(x):=Tangent[s, f(x) ]`
`h(x):=Tangent[t, f(x) ]`

Deretter finner vi skjæringspunktet mellom g og h ved å bruker `Skjæring-funksjonen`-funksjonen
`L:=Skjæring[g, h]`

og siden denne alltid gir en liste av skjæringspunkter bruker vi kommandoen
`P:=Element[L, 1]`

til å plukke ut det første, og eneste, elementet i listen og kaller dette for P. x-koordinaten til punktet P finner vi ved å bruke funksjonen `x(P)`
`x_P:=x(P)`

Resultatet blir da $x_p = \frac{1}{2}(s + t)$, som er det vi ønsket å vise.

Svar:

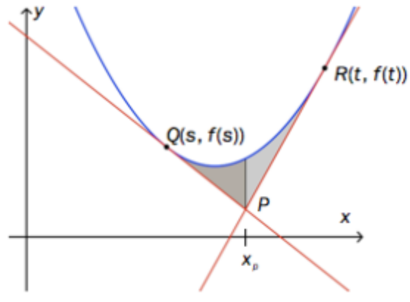
```
f(x):=x^2+a*x+b
g(x):=Tangent[s, f(x) ]
h(x):=Tangent[t, f(x) ]
L:=Skjæring[g, h]
P:=Element[L, 1]
x_P:=x(P)
```

c)

Den vertikale linjen $x = x_P$ deler området mellom grafen og tangentene i to områder.

Se skisse 2.

Bruk CAS til å vise at arealene av de to områdene er like store for alle verdier av a og b.



Skisse 2

Løsningsforslag c)

Vi begynner med å gi de to arealene navn. Arealet mellom avgrenset av grafene f og g og punktene $x = s$ og $x = x_P$ kaller vi A_1. Siden $f(x)$ er en parabel med positiv koeffisient foran x^2 er alltid $f(x) \geq g(x)$. Vi kan altså finne ved å evaulere integralet

$$A_1 = \int_s^{x_P} [f(x) - g(x)]\, dx.$$

I CAS kan vi beregne dette ved kommandoen
`A_1:=IntegralMellom[f, g, s, x_P]`

Helt tilsvarende kan vi definere det andre arealet ved

$$A_2 = \int_{x_P}^{t} [f(x) - h(x)]\, dx,$$

som betyr at vi kan bruke kommandoen
`A_2:=IntegralMellom[f, h, x_P, t]`

for å finne et uttrykk for det andre arealet. For å undersøke om arealene er like, altså om $A_1 = A_2$, holder det å skrive
A_1==A_2

Ettersom resultatet da blir "true" har vi løst oppgaven.

Svar:

```
A_1:=IntegralMellom[f, g, s, x_P]
A_2:=IntegralMellom[f, h, x_P, t]
A_1==A_2
```