



www.matematikk.org

Eksamensoppgavesettet er utarbeidet av Utdanningsdirektoratet. Avvik fra det originale eksamenssettet er eventuelle spesifiseringer og illustrasjoner. Løsningsforslagene i sin helhet er utarbeidet av matematikk.org.

Nettkoden som står til høyre for oppgavetittelen brukes i søkefeltet på www.matematikk.org for å åpne oppgaven og se utfyllende løsningsforslag.

Våre samarbeidspartnere:



REA3024 2015 Høst



Eksamenstid:

5 timer:

Del 1 skal leveres inn etter 3 timer.

Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:

Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:

Del 1 har 9 oppgaver. Del 2 har 5 oppgaver.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.

Veiledning om vurderingen:

Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
- vurderer om svar er rimelige

Andre opplysninger:

Kilder for bilder, tegninger osv.:

- Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet



DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng) [Nettkode: E-4DHY](#)

Deriver funksjonene

a)

$$f(x) = 5 \cdot \cos(2x)$$

b)

$$g(x) = x \cdot \sin x$$

c)

$$h(x) = 5e^{-x} \cdot \sin(2x)$$

Oppgave 2 (4 poeng) [Nettkode: E-4DIW](#)

Bestem integralene

a)

$$\int_0^2 (x^2 - 2x + 1) dx$$

b)

$$\int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx$$

Oppgave 3 (3 poeng) [Nettkode: E-4DJV](#)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}, \quad x \in [0, \ln 3]$$

Vi roterer grafen til f 360° om x -aksen.

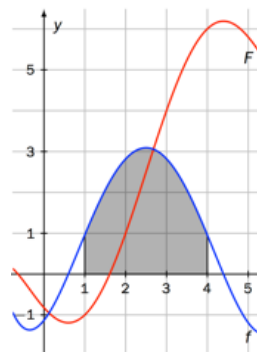
Vis at volumet V av omdreiningslegemet blir $V = \frac{8}{3}\pi$



Oppgave 4 (4 poeng) Nettkode: E-4DK5

Figuren viser grafene til funksjonene F og f .

Det er gitt at $F'(x) = f(x)$



a)

Bruk figuren til å bestemme $F'(4)$.

b)

Bruk figuren til å bestemme arealet av det markerte flatestykket.

Oppgave 5 (5 poeng) Nettkode: E-4DK8

En kuleflate er gitt ved likningen

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 - 4z - 11 = 0$$

a)

Vis at punktet $P(4, 1, 2)$ ligger på kuleflaten.

b)

Bestem sentrum og radius til kulen.

c)

Bestem en likning for tangentplanet til kulen i punktet P .

Oppgave 6 (4 poeng) Nettkode: E-4DKI

Følgende formler er gitt:

$$\sin(u + v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

a)

Bruk formlene ovenfor til å uttrykke $\sin(2x)$ og $\cos(2x)$ ved $\sin x$ og $\cos x$.

b)

Vis at $\sin(3x) = 3 \sin x - 4(\sin x)^3$



Oppgave 7 (6 poeng) [Nettkode: E-4DKL](#)

Punktene $A(1, 2, -2)$, $B(2, -3, 4)$ og $C(-2, 3, 1)$ er gitt.

a)

Bestem ved regning vektorproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

b)

Forklar at C ikke ligger på linjen gjennom A og B .

c)

Bestem en likning for planet α gjennom A , B og C .

d)

Avgjør om punktet $D(2, 2, 3)$ ligger i α .

Oppgave 8 (3 poeng) [Nettkode: E-4DKQ](#)

Løs differensiallikningen

$$y^2 \cdot y' = x, \quad y(0) = 2$$

Oppgave 9 (3 poeng) [Nettkode: E-4DKS](#)

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad n \in \mathbb{N}$$



DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng) [Nettkode: E-4DKU](#)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = 5e^{-\frac{x}{3}} \cdot \sin(2x) \quad , \quad x \in [0, \infty)$$

a)

Bruk graftegner til å tegne grafen til f for $x \in [0, 3\pi]$.

b)

Bestem nullpunktene til f i intervallet $[0, 3\pi]$.

c)

Bestem topp- og bunnpunktene på grafen til f i intervallet $\langle 0, 3\pi \rangle$.

d)

Bestem arealet begrenset av grafen til f og x -aksen mellom $x = 0$ og $x = \frac{\pi}{2}$.

Oppgave 2 (3 poeng) [Nettkode: E-4DKZ](#)

Vis at $y = 5e^{-\frac{x}{3}} \cdot \sin(2x)$ er en løsning av differensiallikningen

$$9y'' + 6y' + 37y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad \text{og} \quad y'(0) = 10$$

Oppgave 3 (6 poeng) [Nettkode: E-4DLA](#)

Vi skal i denne oppgaven studere nærmere $f(x)$ som er gitt i oppgave 1 i Del 2.

a)

Vis at nullpunktene til f i oppgave 1 danner en aritmetisk tallfølge $a_1, a_2, a_3, \dots$. Bestem a_{20} .

b)

Vis at maksimalverdiene til f i oppgave 1 danner en geometrisk tallfølge $b_1, b_2, b_3, \dots$. Bestem b_5 .

c)

Begrunn at den uendelige rekken $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$ konvergerer. Bestem summen av rekken.



Oppgave 4 (3 poeng) [Nettkode: E-4DLV](#)

En kule K har sentrum i $S(-1, 0, 1)$ og radius $\sqrt{21}$.

En linje l går gjennom punktene $A(7, -2, 5)$ og $B(15, -4, 9)$.

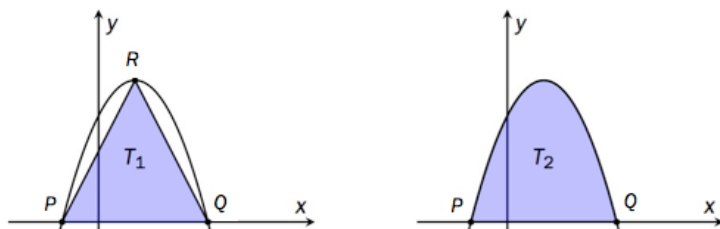
Bestem skjæringspunktene mellom linjen l og kulen K .

Oppgave 5 (6 poeng) [Nettkode: E-4DN3](#)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a < 0 \quad \text{og} \quad c > 0$$

Grafen har toppunkt i R . Se skissen nedenfor.



a)

Forklar at grafen til f skjærer x -aksen i punktene

$$P\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right) \quad \text{og} \quad Q\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right)$$

der P ligger til venstre for Q .

b)

Bruk CAS til å vise at arealet T_1 til $\triangle PQR$ er gitt ved

$$T_1 = \frac{(b^2-4ac) \cdot \sqrt{b^2-4ac}}{8a^2}$$

c)

Bestem arealet T_2 mellom grafen til f og x -aksen.

d)

Bestem forholdet $\frac{T_1}{T_2}$.

