REA3024 2015 Høst

Eksamenstid:
5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 3 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Del 1 har 9 oppgaver. Del 2 har 5 oppgaver.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- kriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
- vurderer om svar er rimelige

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.:

- Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng) Nettkode: E-4DHY

Deriver funksjonene

a)
$f\,(x) = 5 \cdot \cos\,(2x)$

Løsningsforslag a)

Ved å sette $h(x) = 2x$ og huske at den deriverte av $\cos x$ er $-\sin x$, kan vi finne

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5\cos\,(2x))' = 5\,(\cos\,(2x))' \\ &= 5 \cdot 2 \cdot (-\sin\,(2x)) \end{aligned}$$

$$f'(x) = -10\sin(2x).$$

Svar: $\underline{\underline{f'(x) = -10\sin(2x).}}$

b)
$g\,(x) = x \cdot \sin x$

Løsningsforslag b)

Produktregelen for derivasjon sier at

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Det betyr at hvis vi setter $u = x$ og $v = \sin x$ så må

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x\sin x)\,' = (x)\,'\sin x + x\,(\sin x)\,' \\ &= (1)\sin x + x\,(\cos x) = \sin x + x\cos x. \end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{g'(x) = \sin\ x + x\cos\ x}}$

c)

$h\left(x\right) = 5e^{-x} \cdot \sin\left(2x\right)$

Løsningsforslag c)

Ifølge produktregelen, som sier at $(uv)' = u'v + uv'$, finner vi

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(5e^{-x}\sin\left(2x\right)\right)' \\ &= \left(5e^{-x}\right)'\sin\left(2x\right) + 5e^{-x}\left(\sin(2x)\right)'. \end{aligned}$$

Ved å benytte kjerneregelen med kjerne $u = -x$ kan vi videre skrive

$$\left(5e^{-x}\right)' = 5\left(-x\right)'e^{-x} = -5e^{-x}.$$

Hvis vi nå bruker kjerneregelen med kjernen $u = 2x$ finner vi

$$\left(\sin(2x)\right)' = (2x)'\cos(2x) = 2\cos(2x).$$

Dette betyr at

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(5e^{-x}\right)'\sin\left(2x\right) + 5e^{-x}\left(\sin(2x)\right)' \\ &= \left(-5e^{-x}\right)\sin\left(2x\right) + 5e^{-x}\left(2\cos(2x)\right) \\ &= 5e^{-x}\left(2\cos(2x) - \sin(2x)\right) \end{aligned}$$

$$h'\left(x\right) = 5e^{-x}\left(2\cos(2x) - \sin(2x)\right).$$

Svar:

$$\underline{\underline{h'\left(x\right) = 5e^{-x}\left(2\cos(2x) - \sin(2x)\right).}}$$

Oppgave 2 (4 poeng) Nettkode: E-4DIW

Bestem integralene

a)

$\int_0^2 \left(x^2 - 2x + 1\right) \mathrm{dx}$

Løsningsforslag a)

Siden integralet av en sum er lik summen av integralene kan vi skrive $\int_0^2 \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 2x dx + \int_0^2 dx$. Siden den deriverte av $\frac{1}{3}x^3$ er x^2, av x^2 er $2x$ og av x er 1 må vi ha

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 2x dx + \int_0^2 dx &= \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^2 - \left[x^2\right]_0^2 + [x]_0^2 \\
&= \left[\tfrac{1}{3} \cdot 2^3 - \tfrac{1}{3} \cdot 0\right] - \left[2^2 - 0\right] + [2 - 0] \\
&= \tfrac{8}{3} - 4 + 2 \\
&= \tfrac{8-6}{3} \\
&= \tfrac{2}{3}.
\end{aligned}$$

ALTERNATIV LØSNING

Svar: $\int_0^2 \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \frac{2}{3}.$

b)

$\int \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \mathrm{dx}$

Løsningsforslag b)

Ved å benytte metoden for integrasjon ved substitusjon, med substitusjonen $u(x) = e^x + 1$, kan vi skrive

$$\int \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)^2} dx = \int \frac{du}{u^2}.$$

Siden den deriverte av $\frac{-1}{u}$ er $\frac{1}{u^2}$ finner vi $\int \frac{du}{u^2} = \frac{-1}{u} + C$. Ved nå å sette inn for $u = e^x + 1$ får vi

$$\frac{-1}{u} + C = \frac{-1}{e^x+1} + C.$$

Vi har altså funnet at $$\int \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx = \frac{-1}{e^x+1} + C.$$

Svar: $\int \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx = \frac{-1}{e^x+1} + C.$

Oppgave 3 (3 poeng) Nettkode: E-4DJV

Funksjonen f er gitt ved

$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}$, $x \in [0, \ \ln 3]$

Vi roterer grafen til f 360° om x-aksen.

Vis at volumet V av omdreiningslegemet blir $V = \frac{8}{3}\pi$

Løsningsforslag

Ved å dele opp omdreiningslegemet til f i uendelig mange, uendelig tynne sylindere med med radius $f(x)$ og tykkelse dx, og derfor volum $dV = \pi f(x)^2 dx$, kan vi skrive volumet V av omdreiningslegemet som integralet

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\ln 3} \pi f\left(x\right)^2 dx = \pi \int_0^{\ln 3} \left(2e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\ln 3} 4e^{-2\cdot\frac{1}{2}x} dx = 4\pi \int_0^{\ln 3} e^{-x} dx \end{aligned}$$

Siden den deriverte av $-e^{-x}$ er e^{-x} finner vi at

$$\begin{aligned} V &= 4\pi \int_0^{\ln 3} e^{-x} dx = 4\pi \left[-e^{-x}\right]_0^{\ln 3} \\ &= 4\pi \left[-e^{-\ln 3} - \left(-e^{-0}\right)\right] \\ &= 4\pi \left[-\frac{1}{e^{\ln 3}} + 1\right] = 4\pi \left[-\frac{1}{3} + 1\right] \\ &= 4\pi \frac{2}{3} = \frac{8}{3}\pi, \end{aligned}$$

som er det vi ønsket å vise.

Oppgave 4 (4 poeng) Nettkode: E-4DK5

Figuren viser grafene til funksjonene F og f.

Det er gitt at $F'(x) = f(x)$

a)
Bruk figuren til å bestemme $F'(4)$.

Løsningsforslag a)

På figuren ser det ut til at grafen til f har en høyde på omlag 1 når $x = 4$. Det betyr at

$$F'(4) = f(4) \approx 1.$$

$$F'(4) \approx 1.$$

Svar: $\underline{\underline{F'(4) \approx 1.}}$

b)
Bruk figuren til å bestemme arealet av det markerte flatestykket.

Løsningsforslag b)

Siden $F'(x) = f(x)$ betyr at

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = F(x) + C$$

må arealet A avgrenset av f, x-aksen og x-verdiene $x = 1$ og $x = 4$ være gitt som

$$A = \int_1^4 f(x)dx = [F(x) + C]_1^4 = F(4) - F(1).$$

På figuren ser F ut til å ta verdien -1 i $x = 1$ og 6 i $x = 4$. Det betyr at

$$A = F(4) - F(1) \approx 6 - (-1) = 7.$$

Svar: $\underline{\underline{7}}$

Oppgave 5 (5 poeng) Nettkode: E-4DK8

En kuleflate er gitt ved likningen

$x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 - 4z - 11 = 0$

a)

Vis at punktet $P(4,\ 1,\ 2)$ ligger på kuleflaten.

Løsningsforslag a)

Punktet $P(4,1,2)$ ligger på kuleflaten hvis likningen

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 - 4z - 11 = 0$$

stemmer for $(x, y, z) = (4, 1, 2)$. Siden

$$\begin{aligned} &4^2 - 2 \cdot 4 + 1^2 + 6 \cdot 1 + 2^2 - 4 \cdot 2 - 11 \\ &= 16 - 8 + 1 + 6 + 4 - 8 - 11 = 16 - 16 = 0 \end{aligned}$$

ligger altså P på kuleflaten.

Svar: P ligger på kuleflaten.

b)

Bestem sentrum og radius til kulen.

Løsningsforslag b)

Ved å samle alle leddene som inneholder x i likningen for kuleflaten til et fullstendig kvadrat kan vi skrive

$$\begin{aligned} &x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 - 4z - 11 \\ &= (x-1)^2 - 1 + y^2 + 6y + z^2 - 4z - 11 \\ &= (x-1)^2 + y^2 + 6y + z^2 - 4z - 12 \end{aligned}$$

Det tilsvarende kan gjøres for y og z slik at vi får

$$\begin{aligned} &(x-1)^2 + y^2 + 6y + z^2 - 4z - 12 \\ &= (x-1)^2 + (y+3)^2 - 9 + (z-2)^2 - 4 - 12 \\ &= (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 - 25. \end{aligned}$$

Siden dette skal være lik null, og $5^2 = 25$, kan vi altså skrive likningen for planet på formen

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 5^2.$$

Det betyr at kulen har radius $R = 5$ og sentrum i $S(1, -3, 2)$.

Svar:

$$\begin{aligned} \mathit{Radius} &= 5 \\ \mathit{Sentrum} &= (1, -3, 2) \end{aligned}$$

c)

Bestem en likning for tangentplanet til kulen i punktet P.

Løsningsforslag c)

Hvis S er kulens sentrum og P er et punkt på kuleflaten må vektoren

$$\vec{SP} = \vec{OP} - \vec{OS} = [4, 1, 2] - [1, -3, 2] = [3, 4, 0]$$

gå gjennom sentrum i kulen og derfor stå normalt på kuleflaten. Tangentplanet i punktet P, som består av alle punkter inneholdt i en linje som tangerer kulen i punktet P, må derfor ha vektoren $\vec{SP}$ som normalvektor. Det betyr at alle vektorer $\vec{v}$ mellom to punkter i tangentplanet må stå vinkelrett på $\vec{SP}$ og derfor tilfredsstille $\vec{v} \cdot \vec{SP} = 0$. Siden P ligger i tangentplanet må alle punkter $Q(x, y, z)$ som ligger i tangentplanet altså tilfredsstille likningen

$$\vec{SP} \cdot \vec{PQ} = 0.$$

Siden

$$\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SP} \cdot \left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right) = [3,4,0] \cdot ([x,y,z] - [4,1,2])$$

$$= [3,4,0] \cdot [x-4, y-1, z-2] = 3\,(x-4) + 4\,(y-1) + 0\,(z-2) = 3x + 4y - 16$$

kan likningen for tangentplanet i P altså skrives

$$3x + 4y - 16 = 0.$$

Svar: $3x + 4y - 16 = 0.$

Oppgave 6 (4 poeng) Nettkode: E-4DKI

Følgende formler er gitt:

$\sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$

$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$

a)
Bruk formlene ovenfor til å uttrykke $\sin(2x)$ og $\cos(2x)$ ved $\sin x$ og $\cos x$.

Løsningsforslag a)

Ved å sette de to vinkelene like hverandre og gi dem navnet x, det vil si $x = u = v$, kan vi skrive

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x = 2\sin x \cos x$$

og

$$\cos\left(2x\right) = \cos\left(x+x\right) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Dersom det skulle være ønskelig kan man bruke identiteten $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ til å skrive sistnevnte på formen

$$\cos\left(2x\right) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1.$$

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin x \cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1. \end{aligned}$$

Svar:

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin x \cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1. \end{aligned}$$

b)

Vis at $\sin(3x) = 3\sin x - 4(\sin x)^3$

Løsningsforslag b)

Ved å sette

$$x = v = \frac{1}{2}u$$

kan vi skrive den oppgitte formelen for sinus til en sum av to vinkler som

$$\sin(u+v) = \sin(2x+x) = \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x.$$

Med andre ord har vi at

$$\sin(3x) = \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x.$$

Ved å benytte resultatet fra oppgave $a)$ kan vi skrive

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x \\ &= (2\sin x \cos x) \cdot \cos x + \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \cdot \sin x \\ &= 2\sin x \cos^2 x + \cos^2 x \sin x - \sin^3 x.\end{aligned}$$

Ved å benytte identiteten $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ til å uttrykke $\cos^2 x$ som $1 - \sin^2 x$ følger det at

$$\begin{aligned}&2\sin x \cos^2 x + \cos^2 x \sin x - \sin^3 x \\ &= 2\sin x\left(1 - \sin^2 x\right) + \left(1 - \sin^2 x\right)\sin x - \sin^3 x \\ &= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - \sin^3 x - \sin^3 x \\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x,\end{aligned}$$

som er det vi ønsket å vise.

Oppgave 7 (6 poeng) Nettkode: E-4DKL

Punktene $A(1,\ 2,\ -2)$, $B(2,\ -3,\ 4)$ og $C(-2,\ 3,\ 1)$ er gitt.

a)

Bestem ved regning vektorproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Løsningsforslag a)

Med punktene $A(1,2,-2)$, $B(2,-3,4)$ og $C(-2,3,1)$ kan vi konstruere vektorene

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left[2,-3,4\right] - \left[1,2,-2\right] = \left[1,-5,6\right]\\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \left[-2,3,1\right] - \left[1,2,-2\right] = \left[-3,1,3\right].\end{aligned}$$

Vektorproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ blir da

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & -5 & 6 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{e}_x - \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}\vec{e}_y + \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\vec{e}_z$$

$$= (-5 \cdot 3 - 1 \cdot 6)\vec{e}_x - (1 \cdot 3 - 6 \cdot (-3))\vec{e}_y + (1 - (-5)(-3))\vec{e}_z = -21\vec{e}_x - 21\vec{e}_y - 14\vec{e}_z$$

Svar: $\underline{\underline{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left[-21,-21,-14\right].}}$

b)

Forklar at C <u>ikke</u> ligger på linjen gjennom A og B.

Løsningsforslag b)

Siden linjen gjennom A og B kan parametriseres ved

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} &= [1,2,-2] + \lambda\\ &= [1,2,-2] + \lambda\\ &= [1,2,-2] + \lambda[1,-5,6]\\ &= [1+\lambda, 2-5\lambda, -2+6\lambda].\end{aligned}$$

ligger punktet C på linjen hvis, og bare hvis, det finnes en λ slik at

$$\overrightarrow{OC} = \left[-2,3,1\right] = \left[1+\lambda, 2-5\lambda, 6\lambda-2\right].$$

Ved å sette hver av koordinatene lik hverandre og løse for λ finner vi imidlertid at

$$x: \quad -2 = 1 + \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -3$$
$$y: \quad 3 = 2 - 5\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\tfrac{1}{5}$$
$$z: \quad 1 = 6\lambda - 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \tfrac{1}{2}$$

Siden ikke alle verdiene for λ er like kan vi ikke konkludere med noe annet enn at punktet C ikke ligger på linjen gjennom A og B.

ALTERNATIV LØSNING

Svar: C ligger ikke på linjen gjennom A og B.

c)

Bestem en likning for planet α gjennom A, B og C.

Løsningsforslag c)

I oppgave a) fant vi at

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left[-21, -21, -14\right]$$

som kan skrives

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -7\left[3, 3, 2\right].$$

Siden denne vektoren står normalt på alle vektorer mellom punkter i planet α bør vi velge normalvektoren til α slik at den er parallell med $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Siden lengden ikke har noe å si kan vi altså velge normalvektoren

$$\vec{n} = -\tfrac{1}{7}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left[3, 3, 2\right].$$

Siden $A(1, 2, -2)$ ligger i α må alle punkter $Q(x, y, z)$ i α altså tilfredsstille $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0.$

Ettersom

$$\begin{aligned}
\vec{n} \cdot \overrightarrow{AQ} &= [3, 3, 2] \cdot ([x, y, z] - [1, 2, -2]) \\
&= [3,3,2] \cdot [x-1, y-2, z+2] \\
&= 3(x-1) + 3(y-2) + 2(z+2) \\
&= 3x - 3 + 3y - 6 + 2z + 4 \\
&= 3x + 3y + 2z - 5
\end{aligned}$$

kan vi skrive likningen for planet α som

$$3x + 3y + 2z - 5 = 0.$$

Svar: $3x + 3y + 2z - 5 = 0.$

d)

Avgjør om punktet $D\,(2,\ 2,\ 3)$ ligger i α.

Løsningsforslag d)

For å sjekke om punktet $D(2, 2, 3)$ ligger i planet α setter vi inn koordinatene i likningen for planet og ser om likningen er sann. Dette gir

$$3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 5 = 18 - 5 = 13 \neq 0.$$

Altså ligger punktet D ikke i planet α.

Svar: D ligger ikke i α.

Oppgave 8 (3 poeng) Nettkode: E-4DKQ

Løs differensiallikningen

$y^2 \cdot y' = x \qquad , \qquad y(0) = 2$

Løsningsforslag

Ved å integrere begge sider av differensiallikningen

$$y^2 y' = x$$

med hensyn på x og gjenkjenne substitusjonsmetoden med substitusjonen $y = y(x)$ finner vi

$$\int y(x)^2 y'(x)\,dx = \int y^2\,dy = \int x\,dx.$$

Siden den deriverte av $\frac{1}{2}x^2$ er x finner vi videre at

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

der C_1 er en konstant. Vi må legge til C_1 fordi uansett hvilken verdi konstanten C_1 har, er den deriverte av $\frac{1}{2}x^2 + C_1$ lik x. Vi har altså funnet at y må tilfredsstille

$$\frac{1}{2}x^2 + C_1 = \int y^2\,dy.$$

Siden den deriverte av $\frac{1}{3}y^3 + C_2$ er y^2 uansett verdien av konstanten C_2 finner vi videre at

$$\frac{1}{2}x^2 + C_1 = \frac{1}{3}y^3 + C_2.$$

Ved å samle de to konstantene til én konstant $C = C_1 - C_2$ kan får vi

$$\frac{1}{2}x^2 + C = \frac{1}{3}y^3,$$

Siden $y(0) = 2$ må vi ha

$\frac{1}{2} \cdot 0 + C = \frac{1}{3} \cdot 2^3 \Rightarrow C = \frac{8}{3}$

Vi har altså funnet løsningen

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{3} = \frac{1}{3}y^3,$$

som kan skrives

$$y = \left(\frac{3}{2}x^2 + 8\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Svar: $\underline{\underline{y = \left(\frac{3}{2}x^2 + 8\right)^{\frac{1}{3}}.}}$

Oppgave 9 (3 poeng) Nettkode: E-4DKS

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Løsningsforslag

Vi begynner med å sette inn for $n = 1$. Da sier påstanden at

$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}.$$

Altså er $P(1)$ sann. Vi antar deretter at påstanden stemmer for $P(k)$. Det vil si at

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

Betyr dette nødvendigvis at $P(k+1)$ er sann? Påstanden $P(k+1)$ sier

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots k^3 + \left(k+1\right)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

og siden vi har antatt at $P(k)$ stemmer kan vi skrive dette som

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + \left(k+1\right)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Ved å trekke fra $\frac{k^2(k+1)^2}{4}$ på begge sider følger det at

$$\begin{aligned}
(k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} - \frac{k^2(k+1)^2}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2 - k^2(k+1)^2}{4} \\
&= \frac{\left(k+1\right)^2\left((k+2)^2 - k^2\right)}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4-k^2)}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(4k+4)}{4} \\
&= (k+1)^2(k+1) = (k+1)^3,
\end{aligned}$$

som betyr at $P(k+1)$ er sann så lenge $P(k)$ er sann. Fra disse to resulatene følger det at $P(n)$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng) Nettkode: E-4DKU

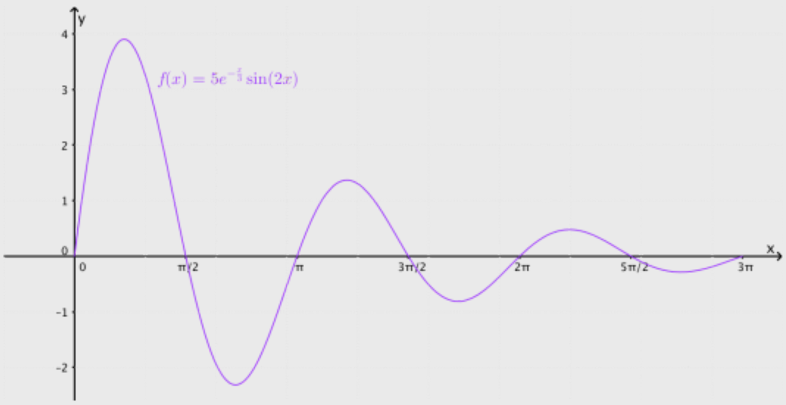
En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = 5e^{-\frac{x}{3}} \cdot \sin(2x) \quad , \quad x \in [0, \rightarrow\rangle$$

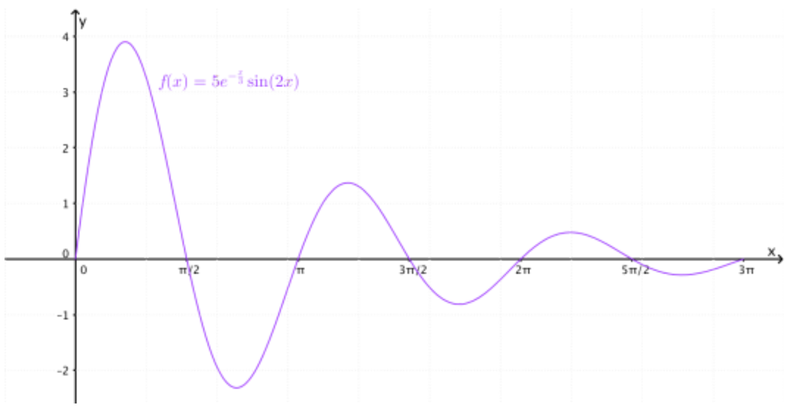
a)
Bruk graftegner til å tegne grafen til f for $x \in [0, 3\pi]$.

Løsningsforslag a)

Ved å skrive kommandoen
`f(x):=Dersom[0<=x<= 3*pi, 5exp(-x/3)sin(2x)]`
i geoGebras grafdel får vi følgende figur:



Svar:



b)

Bestem nullpunktene til f i intervallet $[0,\ 3\pi]$.

Løsningsforslag b)

Nullpunktene er de verdiene for x som tilfredsstiller likningen

$$f\left(x\right) = 5e^{-\frac{x}{3}}\sin\left(2x\right) = 0.$$

Siden $5e^{-\frac{x}{3}}$ aldri blir null må dette bety at

$$\sin(2x) = 0.$$

Ved å huske på enhetssirkelen, der $\sin\theta$ er y-verdiene til punktene på sirkelen, følger det at

$2x = n\pi \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}$

og derfor

$x = \frac{n\pi}{2} \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}$

Nullpunktene i intervallet $[0, 3\pi]$ er altså

$$x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi\right\}.$$

Dette passer godt overens med grafen i oppgave a).

Svar:

$$\underline{\underline{x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi\right\}.}}$$

c)

Bestem topp- og bunnpunktene på grafen til f i intervallet $\langle 0,\ 3\pi\rangle$.

Løsningsforslag c)

Vi finner først et uttrykk for den deriverte av funksjonen $f(x)$ ved

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(5e^{-\frac{x}{3}}\sin\left(2x\right)\right)' \\
&= 5\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)'\sin\left(2x\right) + 5e^{-\frac{x}{3}}\left(\sin(2x)\right)' \\
&= 5\left(-\frac{x}{3}\right)'e^{-\frac{x}{3}}\sin\left(2x\right) + 5e^{-\frac{x}{3}}(2x)'\cos\left(2x\right) \\
&= -\frac{5}{3}e^{-\frac{x}{3}}\sin\left(2x\right) + 10e^{-\frac{x}{3}}\cos\left(2x\right) \\
&= \frac{5}{3}e^{-\frac{x}{3}}\left(6\cos(2x) - \sin(2x)\right).
\end{aligned}$$

Siden alle topp- og bunnpunkter x må være slik at $f'(x)$ skifter fortegn i x kan vi kreve $f'(x) = 0$, som betyr at

$$\frac{5}{3}e^{-\frac{x}{3}}\,(6\cos(2x)-\sin(2x))=0.$$

Ettersom $\frac{5}{3}e^{-\frac{x}{3}}$ aldri blir lik 0 må da

$$\begin{aligned} & 6\cos(2x)-\sin(2x)=0 \\ \implies & 6\cos(2x)=\sin(2x) \\ \implies & \tan(2x)=6. \end{aligned}$$

Dette skjer når

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\,(n\pi+\arctan(6)) \quad \text{for } n \in \mathbb{Z} \\ &\approx \tfrac{1}{2}\,(n\pi+1{,}4056) \quad \text{for } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

De forskjellige topp- og bunnpunktene på intervallet $[0,3\pi]$ er dermed tilnærmet lik

$$x \in \{0.703, 2.274, 3.844, 5.415, 6.986, 8.557\}\,.$$

Ved enten å referere til figuren i oppgave $a)$ eller å se at $6\cos(2x)-\sin(2x)$ veksler mellom å være positiv og negativ, og at den begynner som positiv i $x=0$, må annen hver av punktene vi fant ovenfor være toppunkt og bunnpunkt. Det betyr at vi har funnet punktene

$$\begin{aligned} Toppunkt_1 &= (0.703, f(0.703)) \approx (0.703, 3.902) \\ Toppunkt_2 &= (3.844, f(3.844)) \approx (3.844, 1.369) \\ Toppunkt_3 &= (6.986, f(6.986)) \approx (6.986, 0.480) \\ Bunnpunkt_1 &= (2.274, f(2.274)) \approx (2.274, -2.311) \\ Bunnpunkt_2 &= (5.415, f(5.415)) \approx (5.415, -0.811) \\ Bunnpunkt_3 &= (8.557, f(8.557)) \approx (8.557, -0.285) \end{aligned}$$

ALTERNATIV LØSNING

Svar:

$$\begin{aligned} Toppunkt_1 &\approx (0.703, 3.902) \\ Toppunkt_2 &\approx (3.844, 1.369) \\ Toppunkt_3 &\approx (6.986, 0.480) \\ Bunnpunkt_1 &\approx (2.274, -2.311) \\ Bunnpunkt_2 &\approx (5.415, -0.811) \\ Bunnpunkt_3 &\approx (8.557, -0.285) \end{aligned}$$

d)

Bestem arealet begrenset av grafen til f og x-aksen mellom $x = 0$ og $x = \frac{\pi}{2}$.

Løsningsforslag d)

Arealet, A, begrenset av grafen til f og x-aksen mellom $x = 0$ og $x = \frac{\pi}{2}$ er gitt som integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx = 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{3}} \sin\left(2x\right)dx.$$

Dette integralet ser så vanskelig ut at vi bør gi det et navn. La derfor

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{3}} \sin\left(2x\right)dx$$

slik at $A = 5I$. Vi utfører nå delvis integrasjon ved å integrere $e^{-\frac{x}{3}}$ og derivere $\sin 2x$. Det gir

$$\begin{aligned} I &= \left[-3e^{-\frac{x}{3}} \sin\left(2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{3}} \cos\left(2x\right)dx \\ &= [0-0] + 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{3}} \cos\left(2x\right)dx \\ &= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{3}} \cos\left(2x\right)dx. \end{aligned}$$

Siden dette ikke hjalp forsøker å med nok en delvis integrasjon der vi fortsatt integrerer $e^{-\frac{x}{3}}$, men deriverer $\cos(2x)$. Det gir

$$\begin{aligned} I &= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{3}} \cos\left(2x\right) \mathrm{dx} \\ &= 6\left[-3e^{-\frac{x}{3}} \cos\left(2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 36\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{3}} \sin\left(2x\right) \mathrm{dx} \\ &= \left[-18e^{-\frac{\pi}{6}} \cos\left(\pi\right) + 18e^0 \cos\left(0\right)\right] - 36\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{3}} \sin\left(2x\right) \mathrm{dx} \\ &= 18e^{-\frac{\pi}{6}} + 18 - 36\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{3}} \sin\left(2x\right) \mathrm{dx}. \end{aligned}$$

Vi har altså fått tilbake det integralet vi begynte med. Ved å bytte ut dette med navnet vi ga integralet, som var I, og løse for I følger det at

$$I = 18e^{-\frac{\pi}{6}} + 18 - 36I \Rightarrow I = \frac{18}{37}\left(e^{-\frac{\pi}{6}} + 1\right).$$

Arealet A begrenset av grafen til f og x-aksen mellom $x = 0$ og $x = \frac{\pi}{2}$ er altså

$$A = 5I = 5 \cdot \frac{18}{37}\left(e^{-\frac{\pi}{6}} + 1\right) \approx 3,8734.$$

ALTERNATIV LØSNING

Svar: $\underline{\underline{3,8734.}}$

Oppgave 2 (3 poeng) Nettkode: E-4DKZ

Vis at $y = 5e^{-\frac{x}{3}} \cdot \sin(2x)$ er en løsning av differensiallikningen

$9y'' + 6y' + 37y = 0 \quad , \quad y(0) = 0$ og $y'(0) = 10$

Løsningsforslag

La $f(x) = 5e^{-\frac{x}{3}} \cdot \sin(2x)$. For å vise at funksjonen $f(x)$ er en løsning av differensiallikningen holder det å beregne de deriverte til $y = f(x)$ og se om de tilfredsstiller likningen

$$9y'' + 6y' + 37y = 0 \quad \text{med} \quad y(0) = 0 \quad \text{og} \quad y'(0) = 10$$

Den førstederiverte av

$f(x)$, altså $y' = f'(x)$, er

$$\begin{aligned}
y' &= f'\left(x\right) = \left(5e^{-\frac{x}{3}}\sin\left(2x\right)\right)' \\
&= 5\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)'\sin\left(2x\right) + 5e^{-\frac{x}{3}}(\sin(2x))' \\
&= 5\left(-\tfrac{x}{3}\right)'e^{-\frac{x}{3}}\sin\left(2x\right) + 5e^{-\frac{x}{3}}(2x)'\cos\left(2x\right) \\
&= 5\left(-\tfrac{1}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}}\sin\left(2x\right) + 5e^{-\frac{x}{3}}(2)\cos\left(2x\right) \\
&= \tfrac{5}{3}e^{-\frac{x}{3}}(6\cos(2x) - \sin(2x)).
\end{aligned}$$

Det betyr at vi kan finne den andrederiverte, altså $y'' = f''(x)$, ved

$$\begin{aligned}
y'' &= \left(\tfrac{5}{3}e^{-\frac{x}{3}}(6\cos(2x) - \sin(2x))\right)' \\
&= \tfrac{5}{3}\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)'(6\cos(2x) - \sin(2x)) + \tfrac{5}{3}e^{-\frac{x}{3}}(6\cos(2x) - \sin(2x))' \\
&= \tfrac{5}{3}\left(-\tfrac{1}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}}(6\cos(2x) - \sin(2x)) + \tfrac{5}{3}e^{-\frac{x}{3}}(-12\sin(2x) - 2\cos(2x)) \\
&= -\tfrac{5}{9}e^{-\frac{x}{3}}(6\cos(2x) - \sin(2x) + 36\sin(2x) + 6\cos(2x)) \\
&= -\tfrac{5}{9}e^{-\frac{x}{3}}(12\cos(2x) + 35\sin(2x)).
\end{aligned}$$

Hvis $y = f(x)$ skal tilfredsstille differensiallikningen må altså

$$9y'' + 6y' + 37y = 0.$$

Det kan vi skrive som

$$9\left[-\tfrac{5}{9}e^{-\frac{x}{3}}(12\cos(2x) + 35\sin(2x))\right] + 6\left[\tfrac{5}{3}e^{-\frac{x}{3}}(6\cos(2x) - \sin(2x))\right]$$
$$+37\left[5e^{-\frac{x}{3}}\sin\left(2x\right)\right] = 0.$$

Ved å multiplisere begge sider av likningen med $e^{\frac{x}{3}}$ kan vi skrive dette som

$$-5\cdot 12\cos(2x) - 5\cdot 35\sin(2x) + 10\cdot 6\cos(2x) - 10\cdot \sin(2x) + 37\cdot 5\sin(2x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos(2x)\left(-5\cdot 12 - 10\cdot 6\right) + \sin(2x)\left(37\cdot 5 - 5\cdot 35 - 10\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos(2x)\cdot 0 + \sin(2x)\cdot 0 = 0.$$

Altså tilfredsstiller $f(x)$ differensiallikningen. Da gjenstår det bare å undersøke om

$y(0) = 0 \quad \text{og} \quad y'(0) = 10$

Ved å sette inn for $x = 0$ i $y' = f'(x)$ finner vi at

$$\begin{aligned} y'(0) &= f'\left(0\right) = \frac{5}{3}e^{-\frac{0}{3}}\left(6\cos(0) - \sin(0)\right) \\ &= \frac{5}{3}6 = 10, \end{aligned}$$

og ved å sette inn for $x = 0$ i $y = f(x)$ finner vi

$$y(0) = f\left(0\right) = 5e^{-\frac{0}{3}}\sin\left(0\right) = 5e^{0}\cdot 0 = 0.$$

Altså tilfredsstiller funksjonen $f\left(x\right) = 5e^{-\frac{x}{3}}\sin\left(2x\right)$ differensiallikningen

$9y'' + 6y' + 37y = 0 \quad \text{med} \quad y(0) = 0 \quad \text{og} \quad y'(0) = 10$

Oppgave 3 (6 poeng) Nettkode: E-4DLA

Vi skal i denne oppgaven studere nærmere $f(x)$ som er gitt i oppgave 1 i Del 2.

a)
Vis at nullpunktene til f i oppgave 1 danner en aritmetisk tallfølge $a_1, a_2, a_3, \ldots$
Bestem a_{20}.

Løsningsforslag a)

Nullpunktene til funksjonen $f\left(x\right) = 5e^{-\frac{x}{3}} \sin\left(2x\right)$ er nøyaktig de verdiene for x som tilfredsstiller likningen

$$5e^{-\frac{x}{3}} \sin\left(2x\right) = 0.$$

Siden $5e^{-\frac{x}{3}}$ aldri kan bli null betyr dette at

$$\sin(2x) = 0.$$

Altså er de x-verdiene som tilfredsstiller $f(x) = 0$ gitt ved

$x = \frac{n\pi}{2} \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}.$

Siden f bare er definert på intervallet $[0, \infty)$ er nullpunktene gitt ved

$x = \frac{n\pi}{2} \quad \text{for } n \in \{0,1,2,3,\ldots\}.$

Hvis vi nå navngir nullpunktene ved

$$a_n = \frac{n\pi}{2},$$

får vi en følge av tall. Denne følgen er en aritmetisk følge siden

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)\pi}{2} - \frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

er en konstant uavhengig av n. Det 20ende tallet i denne følgen er
$a_{20} = a_1 + 19 \cdot \frac{\pi 2}{} = 0 + \frac{19\pi}{2} = \frac{19\pi}{2}.$

Svar: $\underline{\underline{a_{20} = \frac{19\pi}{2}}}$.

b)

Vis at maksimalverdiene til f i oppgave 1 danner en geometrisk tallfølge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ Bestem b_5.

Løsningsforslag b)

I oppgave $1c$ fant vi at ekstremalverdiene til $f(x)$ var gitt ved

$$x = \frac{1}{2}(n\pi + \arctan(6)) \quad \text{for } n \in \{0,1,2,\ldots\}.$$

Vi fant også at det første punktet, og deretter annen hver, av disse punktene var et toppunkt. Med andre ord er toppunktene til funksjonen $f(x)$ gitt ved x-verdiene

$$x_n = \frac{1}{2}(2n\pi + \arctan(6)) = n\pi + \frac{1}{2}\arctan(6) \quad \text{for } n \in \{0,1,2,\ldots\}.$$

Maksimalverdiene for f er altså gitt ved tallfølgen

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 5e^{-\frac{n\pi + \frac{1}{2}\arctan 6}{3}} \sin(2n\pi + \arctan 6) \\ &= 5e^{-\frac{n\pi}{3}} e^{-\frac{1}{6}\arctan 6} \sin(\arctan 6). \end{aligned}$$

Siden

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} &= \frac{5e^{-\frac{(n+1)\pi}{3}} e^{-\frac{1}{6}\arctan 6} \sin(\arctan 6)}{5e^{-\frac{n\pi}{3}} e^{-\frac{1}{6}\arctan 6} \sin(\arctan 6)} \\ &= \frac{e^{-\frac{(n+1)\pi}{3}}}{e^{-\frac{n\pi}{3}}} = e^{-\frac{(n+1)\pi}{3}} e^{\frac{n\pi}{3}} = e^{-\frac{(n+1)\pi}{3} + \frac{n\pi}{3}} = e^{-\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

er en konstant som er uavhengig av n er denne tallfølgen en geometrisk tallfølge. Verdien av det femte tallet i denne tallfølgen er

$$b_5 = 5e^{-\frac{4\pi}{3}} e^{-\frac{1}{6}\arctan 6} \sin(\arctan 6) \approx 0,0592.$$

Svar: $\underline{\underline{b_5 \approx 0,0592.}}$

c)

Begrunn at den uendelige rekken $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ konvergerer. Bestem summen av rekken.

Løsningsforslag c)

Rekken $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ har første ledd $b_1 = 5e^{-\frac{1}{6}\arctan 6} \sin(\arctan 6)$ og kvotient $k = e^{-\frac{\pi}{3}} \approx 0{,}35 < 1$. Siden , er rekka konvergent med sum

$$\frac{b_1}{1-k} = \frac{5e^{-\frac{1}{6}\arctan 6} \sin(\arctan 6)}{1-e^{-\frac{\pi}{3}}} \approx 6{,}0114.$$

Svar: $\underline{\underline{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots \approx 6{,}0114.}}$

Oppgave 4 (3 poeng) Nettkode: E-4DLV

En kule K har sentrum i $S(-1, 0, 1)$ og radius $\sqrt{21}$.

En linje l går gjennom punktene $A(7, -2, 5)$ og $B(15, -4, 9)$.

Bestem skjæringspunktene mellom linjen l og kulen K.

Løsningsforslag

Likningen for en kuleflate med radius R og sentrum i $S(x_0, y_0, z_0)$ er

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 + \left(z - z_0\right)^2 = R^2.$$

Altså må likningen for kuleflaten K være gitt som

$$\left(x + 1\right)^2 + y^2 + \left(z - 1\right)^2 = 21.$$

Videre vet vi at siden den rette linjen ℓ går gjennom punktene $A(7, -2, 5)$ og $B(15, -4, 9)$ kan den parametriseres ved

$$\begin{aligned} \ell: \qquad \vec{OA} + \lambda\vec{AB} &= \left[7, -2, 5\right] + \lambda\left([15, -4, 9] - [7, -2, 5]\right) \\ &= [7, -2, 5] + \lambda[8, -2, 4] = [7 + 8\lambda, -2 - 2\lambda, 5 + 4\lambda]. \end{aligned}$$

Ved å sette inn koordinatene for linjen ℓ i likningen for kuleflaten K kan vi nå bestemme skjæringspunktene mellom ℓ og K. Det gir

$$\left(7 + 8\lambda + 1\right)^2 + \left(-2 - 2\lambda\right)^2 + \left(5 + 4\lambda - 1\right)^2 = 21.$$

Siden vi kan skrive venstresiden av likningen

$$\begin{aligned} & (7 + 8\lambda + 1)^2 + (-2 - 2\lambda)^2 + (4 + 4\lambda)^2 \\ = \; & 8^2\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right) + 2^2\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right) + 4^2\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right) \\ = \; & \left(64 + 4 + 16\right)\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right) \\ = \; & 84(\lambda + 1)^2 \end{aligned}$$

følger det at skjæringspunktene er gitt ved

$$84(\lambda + 1)^2 = 21$$

$$(\lambda + 1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\lambda + 1 = \pm\frac{1}{2}$$

$$\lambda = \pm\frac{1}{2} - 1 = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Skjæringspunktene er gitt ved

$$\begin{aligned} P_1 &\approx \left(7+8\left(-\tfrac{1}{2}\right), -2-2\left(-\tfrac{1}{2}\right), 5+4\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) = \left(3, -1, 3\right) \\ P_2 &\approx \left(7+8\left(-\tfrac{3}{2}\right), -2-2\left(-\tfrac{3}{2}\right), 5+4\left(-\tfrac{3}{2}\right)\right) = \left(-5, 1, -1\right). \end{aligned}$$

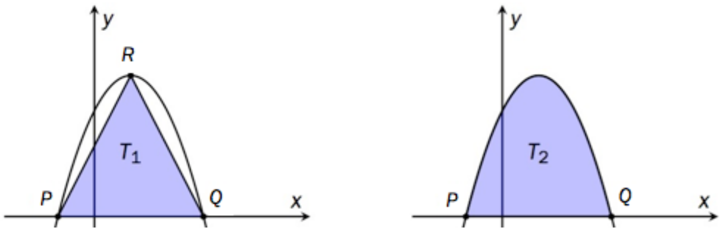
Svar: De to skjæringspunktene er altså gitt ved $\begin{aligned} P_1 &\approx (3, -1, 3) \\ P_2 &\approx (-5, 1, -1). \end{aligned}$

Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4DN3

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad a < 0 \quad \text{og} \quad c > 0$$

Grafen har toppunkt i R. Se skissen nedenfor.



a)
Forklar at grafen til f skjærer x-aksen i punktene

$$P\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right) \text{ og } Q\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right)$$

der P ligger til venstre for Q.

Løsningsforslag a)

Grafen til f skjærer x-aksen når $f(x) = 0$. Det betyr at

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0.$$

Ved å huske annengradsformelen kan vi bruke at x-verdiene som løser denne likningen er nøyaktig de to punktene gitt av

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Disse er faktiske, reelle punkter ettersom $a < 0$ og $c > 0$ betyr at $b^2 - 4ac > 0$. Siden $a < 0$ må

$$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} < 0,$$

som betyr at P må ha lavere x-verdi enn Q og derfor ligge til venstre for Q.

b)

Bruk CAS til å vise at arealet T_1 til ΔPQR er gitt ved

$$T_1 = \frac{(b^2-4ac)\cdot\sqrt{b^2-4ac}}{8a^2}$$

Løsningsforslag b)

Vi begynner med å definere punktene P og Q ved å bruke kommandoene

```
P := ( (-b+sqrt(b^2-4ac) )/(2a),0 )
Q := ( (-b-sqrt(b^2-4ac) )/(2a),0 )
```

Deretter definerer vi funksjonen $f(x)$ ved

```
f(x):=a x^2+b x+c
```

og løser likningen $f'(x) = 0$ for å finne x-koordinaten til R

```
Løs[Derivert[ f(x) ]=0]
```

Siden resultatet er $-\frac{b}{2a}$ definerer vi høyden til punktet R som $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

```
H:=f( -b/(2a) )
```

Siden bredden av $\triangle PQR$ er differansen $x_Q - x_P$ følger det at arealet T_1 er gitt som

```
H*( x(Q)-x(P) )/2
```

$$T_1 = \frac{(b^2-4ac)\sqrt{b^2-4ac}}{8a^2}.$$

Svar: Resultatet er $T_1 = \frac{(b^2-4ac)\sqrt{b^2-4ac}}{8a^2}$.

c)

Bestem arealet T_2 mellom grafen til f og x-aksen.

Løsningsforslag c)

Vi begynner ved å definere x-koordinatene til P og Q i CAS ved kommandoene

```
x_Q :=(-b-sqrt(b^2-4ac))/(2a)
x_P :=(-b+sqrt(b^2-4ac))/(2a)
```

Deretter finner vi T_2 ved å beregne integralet $\int_{x_P}^{x_Q} f\left(x\right) dx$. Det gjør vi ved å bruke kommandoen

```
Integral[a x^2+b x + c, x_P , x_Q]
```

Resultatet blir da $T_2 = \left(\frac{b^2-4ac}{6a^2}\right)\sqrt{b^2 - 4ac}$

ALTERNATIV LØSNING

Svar: $T_2 = \left(\frac{b^2-4ac}{6a^2}\right)\sqrt{b^2 - 4ac}.$

d)

Bestem forholdet $\frac{T_1}{T_2}$.

Løsningsforslag d)

Siden $T_1 = \frac{\left(b^2-4ac\right)\sqrt{b^2-4ac}}{8a^2}$ og $T_2 = \frac{\left(b^2-4ac\right)\sqrt{b^2-4ac}}{6a^2}$ følger det at

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\left(\frac{\left(b^2-4ac\right)\sqrt{b^2-4ac}}{8a^2}\right)}{\left(\frac{\left(b^2-4ac\right)\sqrt{b^2-4ac}}{6a^2}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{3}{4}.$$

Svar: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{4}.$