



www.matematikk.org

Eksamensoppgavesettet er utarbeidet av Utdanningsdirektoratet. Avvik fra det originale eksamenssettet er eventuelle spesifiseringer og illustrasjoner. Løsningsforslagene i sin helhet er utarbeidet av matematikk.org.

Nettkoden som står til høyre for oppgavetittelen brukes i søkefeltet på www.matematikk.org for å åpne oppgaven og se utfyllende løsningsforslag.

Våre samarbeidspartnere:



REA3024 2014 Vår



Eksamenstid:

5 timer:

Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.

Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:

Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler

Del 2:

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:

Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.

Veiledning om vurderingen:

Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger:

Kilder for bilder, tegninger osv.

- Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet
- CSI, sodahead.com (28.02.2014)



DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng) [Nettkode: E-4DG6](#)

Deriver funksjonene

a)

$$f(x) = \sin(3x)$$

Løsningsforslag a)

Kjerneregelen konstaterer at $(h(g(x)))' = g'(x)h'(g(x))$. Ved å sette $g(x) = 3x$, og merke oss at vi da må ha $h(g) = \sin g$ og derfor $h'(g) = (\sin g)' = \cos g$ og $g'(x) = 3$, finner vi

$$f'(x) = g'(x)h'(g(x)) = 3 \cos(g(x)).$$

Nå har funksjonen $g(x) = 3x$ utspilt sin rolle som hjelpefunksjon i derivasjonen. Derfor vil det se bedre ut dersom vi skriver

$$f'(x) = 3 \cos 3x.$$

Svar: $f'(x) = 3 \cos(3x)$.

b)

$$g(x) = e^{2x} \cdot \cos x$$

Løsningsforslag b)

Produktregelen for derivasjon sier at hvis u og v er to deriverbare funksjoner, så er $(uv)' = u'v + uv'$. Vi kan altså sette $u(x) = e^{2x}$ og $v(x) = \cos x$. Vi trenger uttrykk for de deriverte $u'(x)$ og $v'(x)$. Ved å velge $2x$ som kjerne ser vi at

$$u'(x) = (e^{2x})' = (2x)'e^{2x} = 2e^{2x}.$$

Det eneste som gjenstår nå er å minne om at $v'(x) = (\cos x)' = -\sin x$ og sette alt inn i produktregelen

$$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2e^{2x} \cos x + e^{2x}(-\sin x) = e^{2x}(2 \cos x - \sin x).$$

Svar: $g'(x) = e^{2x}(2 \cos(x) - \sin(x))$.



Oppgave 2 (4 poeng) Nettkode: E-4DG9

Regn ut integralene

a)

$$\int 2x \cdot \sin(x^2) dx$$

Løsningsforslag a)

Ved å bruke substitusjonsmetoden, som sier at $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$, med substitusjonen $u(x) = x^2$ finner vi at siden $u'(x) = 2x$ så kan vi skrive

$$\int 2x \cdot \sin(x^2) dx = \int u'(x) \cdot \sin u(x) dx = \int \sin u du.$$

Siden den deriverte av $-\cos x$ er $\sin x$ finner vi videre at

$$\int \sin u du = -\cos u + C,$$

der C er en konstant som tar høyde for at konstantledd uansett bortfaller under derivasjonen. Til slutt kan vi uttrykke løsningen ved hjelp av x , slik at vi ikke lenger trenger å huske på definisjonen $u(x) = x^2$. Da får vi

$$\int 2x \cdot \sin(x^2) dx = -\cos x^2 + C.$$

Svar: $\int 2x \cdot \sin(x^2) dx = -\cos(x^2) + C.$

b)

$$\int_1^e x \cdot \ln x dx$$

Løsningsforslag b)

Metoden for delvis integrasjon sier at $\int u'v dx = uv - \int uv' dx$. Hvis vi setter $u'(x) = x$ og $v(x) = \ln x$ finner vi $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ siden $(\frac{1}{2}x^2)' = x$ og $v'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Altså er

$$\begin{aligned} \int_1^e x \cdot \ln x dx &= \int_1^e u' v dx = [uv]_1^e - \int_1^e uv' dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^e - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e \\ &= \left(\frac{1}{2}e^2 \ln e - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \ln 1\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2\right) \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1). \end{aligned}$$

Svar: $\int_1^e x \cdot \ln(x) dx = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$



Oppgave 3 (2 poeng) Nettkode: E-4DGC

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = e^{2x} - 4e^x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Bestem koordinatene til eventuelle vendepunkter på grafen til f .

Løsningsforslag

Vi begynner med å finne et uttrykk for den dobbelderiverte til f . Ved å bruke kjerneregelen med kjerne $2x$, at e^x er uendret under derivasjon og at den deriverte av en sum er en sum av deriverte finner vi

$$f'(x) = (2x)'e^{2x} - 4e^x = 2e^{2x} - 4e^x.$$

Helt tilsvarende finner vi

$$f''(x) = 4e^{2x} - 4e^x.$$

Et vendepunkt x må tilfredsstille $f''(x) = 0$, som betyr at

$$4e^{2x} - 4e^x = 0 \Rightarrow e^x(e^x - 1) = 0.$$

Siden e^x aldri kan bli null må $e^x - 1 = 0$. Det betyr at $e^x = 1$ som tilfredsstilles av $x = 0$. For å være sikker på at $x = 0$ faktisk er et vendepunkt er vi nødt til å undersøke om $f''(x)$ bytter fortegn i $x = 0$. For $x < 0$ blir $e^x - 1$ negativ, og derfor $f''(x)$ negativ, mens for $x > 0$ blir $e^x - 1$ positiv, og derfor $f''(x)$ positiv.

Altså bytter $f''(x)$ fortegn i $x = 0$. Det betyr at vi har funnet vendepunktets x -koordinat. Siden vendepunktet ligger på grafen til f betyr det at y -koordinaten til vendepunktet er gitt av $f(0) = e^0 - 4e^0 = 1 - 4 = -3$. Altså er koordinatene til vendepunktet på grafen til f

$$(0, -3).$$

Svar: $(0, -3)$.



Oppgave 4 (4 poeng) Nettkode: E-4DGE

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$s(x) = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \dots$$

a)

Bestem konvergensområdet til rekken.

Løsningsforslag a)

Siden en endelig geometrisk rekke $S_n = a + ak + ak^2 + ak^3 + \dots + ak^n$ tilfredsstiller $S_n - kS_n = S_n(1-k) = a - ak^{n+1}$ må

$$S_n = a \frac{1-k^{n+1}}{1-k}.$$

Hvis vi nå lar rekken bli uendelig stor ser vi at den konvergerer hvis, og bare hvis, $|k| < 1$. I vår uendelige, geometriske rekke er $a = 1$ og $k = (1-x)$. Det betyr at rekken konvergerer for $|1-x| < 1$. Med andre ord må $-1 < 1-x < 1$ som betyr at $-2 < -x < 0$. Multiplikasjon med -1 gir da $0 < x < 2$ som konvergensområde.

Svar: $0 < x < 2$.

b)

Løs likningene

$$s(x) = 3 \quad \text{og} \quad s(x) = \frac{1}{3}$$

Løsningsforslag b)

Ved enten å huske at en uendelig, konvergent geometrisk rekke $a + ak + ak^2 + ak^3 + \dots$ konvergerer mot $\frac{a}{1-k}$, eller å følge argumentasjonen i oppgave 4a) og se at hvis $|k| < 1$ må k^{n+1} gå mot null og derfor $a + ak + ak^2 + ak^3 + \dots = \frac{a}{1-k}$, finner vi

$$s(x) = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}.$$

Likningen $s(x) = 3$ er altså ekvivalent med likningen $\frac{1}{x} = 3$, som løses av $x = \frac{1}{3}$ som er i definisjonsmengden til s . Helt tilsvarende løses likningen $s(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ av $x = 3$ som ikke er i definisjonsmengden til s . Likningen har da ingen løsning.

Svar: $s\left(\frac{1}{3}\right) = 3$ og $s(3) = \frac{1}{3}$



Oppgave 5 (5 poeng) Nettkode: E-4DGH

Planet α er gitt ved

$$\alpha : 2x + y - 2z + 3 = 0$$

a)

Vis at punktet $P(3, 4, 2)$ ikke ligger i planet α .

Løsningsforslag a)

Dersom koordinatene til P , når de settes inn i likningen til planet, ikke respekterer likhetstegnet kan ikke punktet P ligge i planet α . Vi har

$$2x_P + y_P - 2z_P + 3 = 2 \cdot 3 + 4 - 2 \cdot 2 + 3 = 6 + 4 - 4 + 3 = 9 \neq 0, \text{ som altså betyr at } P \text{ ikke ligger i planet } \alpha.$$

b)

En linje l går gjennom P slik at $l \perp \alpha$.

Bestem en parameterframstilling for l .

Løsningsforslag b)

At likningen for planet α er $2x + y - 2z + 3 = 0$, kan vi tenke på som kravet om at enhver vektor mellom to punkter i α må stå orthogonalt på en såkalt normalvektor, $\vec{n} = [2, 1, -2]$. Fra konstantleddet kan vi lese av avstanden, $d = \frac{3}{|\vec{n}|}$, planet har fra

Origo. Siden normalvektoren $\vec{n}$ står vinkelrett på planet α må $\vec{n}$ være parallell med ℓ . Det betyr at for alle $t \in \mathbb{R}$ må $\overrightarrow{OP} + t\vec{n}$ ligge i α . Parameterframstillingen for linjen ℓ er altså

$$\overrightarrow{OP} + t\vec{n} = [3, 4, 2] + t[2, 1, -2] = [3 + 2t, 4 + t, 2 - 2t], \text{ eller}$$

$$\ell : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Svar:

$$l : (3 + t, 4 + t, 2 - 2t) \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R}$$

eller

$$\ell : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$



c)

Bestem koordinatene til skjæringspunktet mellom l og α .

Løsningsforslag c)

Ved å sette inn koordinatene fra parameterfremstillingen av linjen ℓ inn i likningen til planet kan vi bestemme parameteren t . Det kan vi bruke til å uttrykke koordinatene til skjæringspunktet. Et punkt på linjen ℓ kan skrives $Q(3 + 2t, 4 + t, 2 - 2t)$ er en parameter $t \in \mathbb{R}$. Dette punktet ligger i planet α når

$$\begin{aligned} 2x_Q + y_Q - 2z_Q + 3 &= 2(3 + 2t) + (4 + t) - 2(2 - 2t) + 3 \\ &= 6 + 4t + 4 + t - 4 + 4t + 3 = 9t + 9 = 0. \end{aligned}$$

Altså ligger Q i planet α hvis $t = -\frac{9}{9} = -1$. Det betyr at skjæringspunktet mellom ℓ og α har koordinatene

$$Q = (3 + 2(-1), 4 + (-1), 2 - 2(-1)) = (1, 3, 4)$$

Svar: (1, 3, 4)

d)

Bestem avstanden fra P til α .

Løsningsforslag d)

Avstandsformelen konstaterer at avstanden fra et plan α , gitt ved likningen $Ax + By + Cz + D = 0$, til et punkt $P(x_P, y_P, z_P)$ er

$$D = \frac{|Ax_P + By_P + Cz_P + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Det betyr at avstanden fra P til α er gitt som

$$D = \frac{|2x_P + y_P - 2z_P + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 4 - 2 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{9}} = \frac{|9|}{3} = 3.$$

ALTERNATIVE LØSNINGER

Svar: Avstanden fra P til α lik 3.



Oppgave 6 (4 poeng) Nettkode: E-4DGM

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = a \sin(cx + \phi) + d$$

Grafen til funksjonen har et toppunkt i $(0, 7)$. Det nærmeste bunnpunktet til høyre for dette toppunktet er $(2, 3)$.

a)

Forklar at funksjonsuttrykket kan skrives

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) + 5$$

Løsningsforslag a)

Siden gjennomsnittet av topp- og bunnpunktens y -verdier i en sinusfunksjon er null, må et eventuelt avvik i den samme verdien for $f(x)$ skyldes konstanten d . Vi må med andre ord ha

$$d = \frac{y_{\text{topp}} + y_{\text{bunn}}}{2} = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Siden en sinusfunksjon aldri kan bli større enn én må forskjellen mellom likevektslinjen $y = 5$ og toppunktets y -verdi $y = 7$ gi amplituden til $f(x)$. Altså må

$$a = y_{\text{topp}} - y_{\text{likevekt}} = 7 - 5 = 2.$$

Videre har vi at vinkelforskjellen mellom topp- og bunnpunkt i en sinusfunksjon er π . Det betyr at vinkelendringen $c\Delta x = c(x_{\text{bunn}} - x_{\text{topp}})$ å være π . Altså

$$c = \frac{\pi}{x_{\text{bunn}} - x_{\text{topp}}} = \frac{\pi}{2}.$$

Til slutt må vi finne verdien av konstanten ϕ , som er skyld i at funksjonen $f(x)$ ikke begynner lik null slik sinus gjør. Siden $cx + \phi = c\left(x - \left(\frac{-\phi}{c}\right)\right)$ må $\frac{-\phi}{c}$ være faseforskyvningen til $f(x)$. Siden $f(x)$ er faseforskjøvet $\frac{1}{2}(0 + 2) = 1$ til venstre følger det at

$$\frac{-\phi}{c} = -1 \Rightarrow \phi = c = \frac{\pi}{2}.$$

Altså er

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) + 5.$$



b)

Lag en skisse av grafen til f for $x \in [0, 12]$.

Løsningsforslag b)

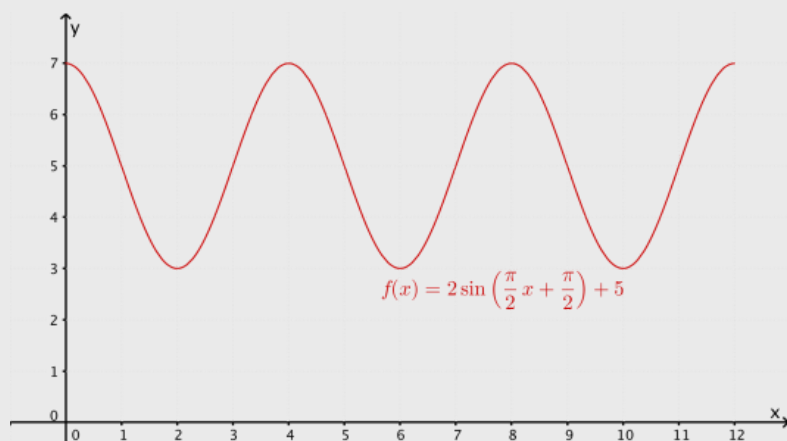
Ettersom én periode har lengde 4 må grafen vise tre hele svingninger. Siden $(0, 7)$ er et toppunkt må vi videre ha bunnpunkt i $(2, 3)$, toppunkt i $(4, 7)$, bunnpunkt i $(6, 3)$, toppunkt i $(8, 7)$, og så videre. Vi kan altså merke av skjæringspunktene med likevektslinjen $y = 5$ og ekstremalpunktene

$$\text{Likevektslinjen} = \{(1, 5), (3, 5), (5, 5), (7, 5), (9, 5), (11, 5)\}$$

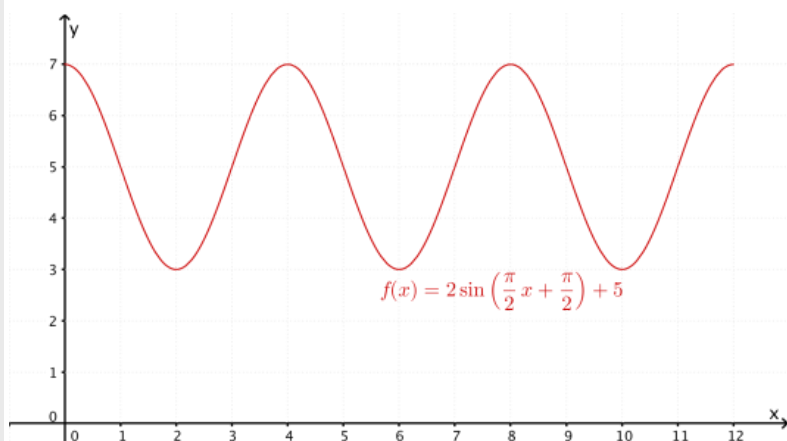
$$\text{Toppunkter} = \{(0, 7), (4, 7), (8, 7), (12, 7)\}$$

$$\text{Bunnpunkter} = \{(2, 3), (6, 3), (10, 3)\}.$$

Resultatet blir da som følger



Svar:



Oppgave 7 (2 poeng) Nettkode: E-4DGP

Løs differensiallikningen

$$y' - 3y = 2 \quad \text{når} \quad y(0) = \frac{1}{3}$$

Løsningsforslag

For å løse likningen $y' - 3y = 2$ kan det være lurt å gjennomføre omskrivingen $y' = 2 + 3y$ som videre kan omformuleres til

$$\frac{y'}{2+3y} = 1.$$

Denne omformingen gjelder så lenge vi ikke får 0 i nevner på venstre side, altså så lenge y ikke er den konstante funksjonen $y(x) = -\frac{2}{3}$. Ved innsetting ser vi at $y = -\frac{2}{3}$ gir funksjonen som er konstant lik 0 på begge sider av den opprinnelige likningen, så dette er en løsning.

Ved å integrere med hensyn på x på begge sider av likhetstegnet sitter vi da igjen med

$$\int \frac{y'(x)dx}{2+3y(x)} = \int \frac{dy}{2+3y} = \int dx$$

ifølge substitusjonsmetoden for integrasjon med substitusjonen $y = y(x)$. Integralet på høyresiden, $\int dx$, tar formen $x + C_1$ der C_1 er en vilkårlig konstant siden den deriverte av $x + C_1$ er én. Ved å bruke substitusjonen $u(y) = 2 + 3y$, med $u'(y) = 3$, kan vi videre skrive

$$\int \frac{dy}{2+3y} = \int \frac{\frac{1}{3}u'(y)dy}{u(y)} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln |u| + C_2$$

der C_2 er en vilkårlig konstant. Ved å sette inn for u sitter vi da igjen med at

$$\frac{1}{3} \ln |u| + C_2 = \frac{1}{3} \ln |(2 + 3y)| + C_2.$$

Siden både C_1 og C_2 er vilkårlige konstanter kan vi like gjerne velge en vilkårlig konstant $C = 3(C_1 - C_2)$ og se at

$$\frac{1}{3} \ln |(2 + 3y)| + C_2 = x + C_1 \Rightarrow \ln |(2 + 3y)| = 3x + C.$$

Ved å bruke eksponentialfunksjonen på begge sider, får vi

$$\Rightarrow |2 + 3y| = e^{3x+C}$$

$$\Rightarrow 2 + 3y = \pm e^C e^{3x}$$

$$\Rightarrow y = De^{3x} - \frac{2}{3}$$

der $D = \pm e^C$ er en vilkårlig konstant ulik . Vi kan også ta med $D = 0$, siden det gir oss løsningen vi observerte i starten. Med kravet om at grafen skal gå gjennom $(0, \frac{1}{3})$, må vi ha



$$y(0) = De^0 - \frac{2}{3} = D - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Dette vi . Altså må vi ha

$$y(x) = e^{3x} - \frac{2}{3}.$$

Svar: $y(x) = e^{3x} - \frac{2}{3}.$



DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng) Nettkode: E-4DGT

Punktene $A(4, 3, 1)$, $B(2, 2, 0)$ og $C(1, 2, -2)$ er gitt.

En setning i geometrien sier:

Et plan er entydig bestemt av tre punkter dersom disse punktene ikke ligger på en rett linje.

a)

Bruk denne setningen til å vise at punktene A , B og C bestemmer et plan α entydig.

Løsningsforslag a)

Ved å finne en parametrisering av linjen AB kan vi undersøke om punktet C ligger på denne linjen. Hvis C viser seg ikke å ligge på linjen AB bestemmer A , B og C et plan α entydig. Vi observerer først at linjen AB kan parametriseres ved

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{OB} + t(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = [2, 2, 0] + t([4, 3, 1] - [2, 2, 0]) \quad \text{der } t \in \mathbb{R}. \\ &= [2, 2, 0] + [2t, t, t] = [2 + 2t, 2 + t, t],\end{aligned}$$

Dersom C ligger på linjen AB må det finnes en verdi for t slik at

$$[2 + 2t, 2 + t, t] = \overrightarrow{OC} = [1, 2, -2].$$

Ved å sette x -verdiene like får vi $2 + 2t = 1$ som betyr at $t = -\frac{1}{2}$, og ved å sette z -verdiene like får vi $2 + t = 2$, som betyr at $t = 0$. Dette er en selvmotsigelse ettersom t ikke kan være både $-\frac{1}{2}$ og 0 ! Altså finnes det ikke en verdi for t som gjør at vi kan uttrykke koordinatene til C ved hjelp av den parameteriserte linjen AB . Med andre ord ligger ikke A , B og C på en rett linje. Dette betyr ifølge setningen at A , B og C bestemmer et plan α entydig.



b)

Bestem en likning til planet α .

Løsningsforslag b)

Ettersom vektoren $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ står vinkelrett på både $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ må $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ stå vinkelrett på planet α . Siden

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [2, 2, 0] - [4, 3, 1] = [-2, -1, -1]$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [1, 2, -2] - [4, 3, 1] = [-3, -1, -3]$$

finder vi at

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \vec{e}_x - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_z \\ &= 2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + (-1)\vec{e}_z = [2, -3, -1].\end{aligned}$$

Det betyr at vi kan velge normalvektoren $\vec{n} = [-2, 3, 1]$. Siden A ligger i planet α kan vi nå formulere likningen for planet ved at alle punkter $P(x, y, z)$ som ligger i α må tilfredsstille

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} \Rightarrow \vec{n} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = 0 \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} - \vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = 0.$$

Siden

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = [2, -3, -1] \cdot [4, 3, 1] = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 8 - 9 - 1 = -2$$

har vi altså at

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} + 2 = [2, -3, -1] \cdot [x, y, z] + 2 = 2x - 3y - z + 2 = 0$$

er likningen for planet α .

Svar: $2x - 3y - z + 2 = 0$.



c)

Et punkt T har koordinatene $(2, 5, 4t + 1)$.

Bestem t slik at volumet av pyramiden $ABCT$ blir 3.

Løsningsforslag c)

Pyramiden $ABCT$ er utspent av vektorene $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AT}$ og har derfor volum

$$V = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{AT} \right|$$

Heldigvis har vi allerede beregnet kryssproduktet

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [2, -3, -1]$ i oppgave 1b). Siden vektoren $\overrightarrow{AT}$ kan uttrykkes

$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA} = [2, 5, 4t + 1] - [4, 3, 1] = [-2, 2, 4t]$$

kan volumet til pyramiden altså skrives

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{AT} \right| = \frac{1}{6} |[2, -3, -1] \cdot [-2, 2, 4t]| = \frac{1}{6} |-4 - 6 - 4t| \\ &= \frac{1}{6} |-2(5 + 2t)| = \left| \frac{5}{3} + \frac{2}{3}t \right| \end{aligned}$$

For at volumet av pyramiden skal være 3 må altså t tilfredsstille $\left| \frac{5}{3} + \frac{2}{3}t \right| = 3$. Det er altså to verdier for t som gjør at pyramidens volum er 3. Disse er gitt ved

$$\frac{5}{3} + \frac{2}{3}t = \pm 3 \Rightarrow \frac{2}{3}t = \frac{-5 \pm 9}{3} \Rightarrow t = \frac{3}{2} \cdot \frac{-5 \pm 9}{3} = \frac{-5 \pm 9}{2}.$$

Med andre ord er t -verdiene som gjør at pyramiden $ABCT$ har volum lik 3

$$t = -7 \quad \text{og} \quad t = 2$$

Svar: $t = -7$ og $t = 2$.



Oppgave 2 (5 poeng) Nettkode: E-4DGY

En kuleflate er gitt ved likningen

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 2 = 0$$

a)

Vis at punktet $P(2, 3, 5)$ ligger på kuleflaten.

Løsningsforslag a)

Ved å sette inn koordinatene til P i likningen for kuleflaten finner vi

$$2^2 + 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 6 \cdot 5 + 2 = 0,$$

og siden

$$\begin{aligned} 2^2 + 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 6 \cdot 5 + 2 &= 4 + 9 + 25 - 4 - 6 - 30 + 2 \\ &= 38 - 40 + 2 = 0 \end{aligned}$$

er punktet P blant de punktene som tilfredsstiller likningen for kuleflaten. Med andre ord ligger P på kuleflaten.

b)

Bestem sentrum og radius til kulen.

Løsningsforslag b)

Ved å benytte omskrivingen

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 2 \\ &= x^2 - 2 \cdot x + y^2 - 2 \cdot y + z^2 - 2 \cdot 3z + 2 \\ &= (x - 1)^2 - 1 + (y - 1)^2 - 1 + (z - 3)^2 - 9 + 2 \\ &= (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 - 3^2 \end{aligned}$$

kan likningen for kuleflaten omformuleres til

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 3^2.$$

Fra Pythagoras læresetning kan vi konkludere med at de punktene (x, y, z) som tilfredsstiller likningen for kuleflaten er nøyaktig de punktene som har avstand 3 fra punktet $(1, 1, 3)$. Dette betyr at kulen har sentrum i $S(1, 1, 3)$ og radius 3.

Svar: Kulen har sentrum i $S(1, 1, 3)$ og radius 3.



c)

Bestem likningen til planet som tangerer kuleflaten i punktet P .

Løsningsforslag c)

Siden enhver linje fra sentrum i kulen til kuleflaten står vinkelrett på kuleflaten kan vi velge vektoren $\overrightarrow{SP}$ fra sentrum S i kulen til punktet P som normalvektor til tangentplanet i P . Siden P ligger i planet må alle punkter $Q(x, y, z)$ som ligger i planet tilfredsstille

$$\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0.$$

Siden

$$\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OS} = [2, 3, 5] - [1, 1, 3] = [1, 2, 2]$$

og

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [x, y, z] - [2, 3, 5] = [x - 2, y - 3, z - 5]$$

må altså

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{PQ} &= [1, 2, 2] \cdot [x - 2, y - 3, z - 5] = x - 2 + 2(y - 3) + 2(z - 5) \\ &= x + 2y + 2z - 2 - 6 - 10 = x + 2y + 2z - 18 = 0.\end{aligned}$$

Med andre ord er likningen til planet som tangerer kuleflaten i P

$$x + 2y + 2z - 18 = 0.$$

Svar: $x + 2y + 2z - 18 = 0$



Oppgave 3 (7 poeng) Nettkode: E-4DH7



I en kriminalserie på TV ble et drapsoffer funnet kl. 11.00. Kropstemperaturen ble da målt til 30°C . Rommet der den drepte ble funnet, hadde hatt en konstant temperatur på 22°C siden mordet skjedde.

Vi lar kroppstemperaturen være $y(t)$ grader Celsius t timer etter at den døde ble funnet.

a)

Ifølge Newtons avkjølingslov er temperaturendringen per time proporsjonal med differansen mellom kroppstemperaturen og romtemperaturen. Forklar at dette gir differensiallikningen

$$y' = -k(y - 22) \quad \text{der } k > 0$$

Løsningsforslag a)

Newtons avkjølingslov sier at temperaturendringen per time, $y'(t)$, er proporsjonal med differansen mellom kroppstemperaturen $y(t)$ og romtemperaturen 22°C . Med andre ord er den tidsderivate av kroppstemperaturen, $y'(t)$, proporsjonal med $(y(t) - 22)$. At to størrelser A og B er proporsjonale betyr at det finnes en konstant γ slik at $A = \gamma B$. Vi kan altså konstatere Newtons avkjølingslov ved

$$y'(t) = \gamma(y(t) - 22).$$

Vi kan faktisk si litt mer om situasjonen. Vi vet nemlig at kroppstemperaturen, som begynte lik 30°C , vil nærme seg rommets temperatur. Med andre ord må $y'(t)$ være negativ. Siden $y(t) - 22$ alltid er positiv må γ alltid være negativ. Det betyr at vi kan skrive $\gamma = -k$, for en positiv konstant k . Vi kan oppsummere situasjonen i differensiallikningen

$$y' = -k(y - 22) \quad \text{for } k > 0$$



b)

Forklar at $y(0) = 30$, og løs differensiallikningen ved regning.

Løsningsforslag b)

Ifølge definisjonen av $y(t)$, skal $y(0)$ være kroppstemperaturen målt i grader celsius 0 timer etter at den døde ble funnet. Det tilsvarer funntidspunktet, og da var temperaturen 30 grader celsius. Dermed må $y(0) = 30$.

Vi skal løse differensiallikningen

$$y' = -k(y - 22).$$

Først omformer vi den slik at vi kan finne den integrerende faktoren.

$$y' + ky = 22k.$$

Den integrerende faktoren blir e^{kt} , så vi multipliserer med den på begge sider. Det gir

$$y' e^{kt} + k e^{kt} y = 22k e^{kt}.$$

Venstre side er den deriverte til produktet $y e^{kt}$. Derfor er

$$(y e^{kt})' = 22k e^{kt}$$

Nå integrerer vi begge sider med hensyn på t og kombinerer de to integrasjonskonstantene til én konstant på høyre side.

$$y e^{kt} = 22 e^{kt} + C$$

$$y = 22 + C e^{-kt}$$

Vi vet at $y(0) = 30$ så

$$y(0) = 22 + C e^0 = 22 + C = 30$$

Dette gir $C = 8$. Dermed er løsningen på initialverdiproblemet

$$y(t) = 8 e^{-kt} + 22$$

$$\textbf{Svar: } y(t) = 8 e^{-kt} + 22$$



c)

En time etter at den døde ble funnet, ble kroppstemperaturen målt til 28°C . Bruk dette til å bestemme konstanten k .

Løsningsforslag c)

Siden kroppstemperaturen til den døde var 28°C ved tiden $t = 1$ må $y(1) = 28$. Denne oppførselen kan vi kreve av funksjonen fra oppgave 3b) ved

$$28 = y(1) = 8e^{-k} + 22.$$

Dette kan omformuleres ved

$$\begin{aligned} 28 &= 8e^{-k} + 22 \Rightarrow \frac{3}{4} = e^{-k} \\ \Rightarrow -k &= \ln \frac{3}{4} \Rightarrow k = -\ln \frac{3}{4} = \ln \frac{4}{3} \approx 0,288. \end{aligned}$$

Dette betyr at k er omtrent lik 0,288 per time.

Svar: $k \approx 0,288$ per time

d)

Vi antar at drapsofferet hadde en kroppstemperatur på 37°C like etter at døden inntraff.

Bruk $y(t)$ til å anslå når drapet ble utført.

Løsningsforslag d)

Siden drapsofferet hadde en kroppstemperatur på 37°C like etter at døden inntraff må tidpunktet, t , døden inntraff tilfredsstillende likningen $y(t) = 37$. Det betyr at

$$\begin{aligned} y(t) &= 8e^{-kt} + 22 = 37 \Rightarrow e^{-kt} = \frac{15}{8} \\ \Rightarrow -kt &= \ln \frac{15}{8} \Rightarrow t = -\frac{1}{k} \ln \frac{15}{8}, \end{aligned}$$

og siden $k \approx 0,288$ følger det at

$$t \approx -\frac{1}{0,288} \ln \frac{15}{8} \approx -2,183.$$

Det betyr at døden inntraff 2,183 timer før offeret ble funnet. Offeret ble funnet klokken **11:00**, og siden 0,183 timer tilsvarer $0,183 \cdot 60 = 10,98$ minutter, må drapet ha blitt utført klokken 08 : 49.

Svar: Drapet ble utført klokken 08 : 49.



Oppgave 4 (7 poeng) Nettkode: E-4DHC

En uendelig rekke er gitt ved

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

a)

Vis at $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$, når $x \in \langle -1, 1 \rangle$

Det kan vises at

$$(1)' + (x)' + (x^2)' + (x^3)' + \dots = \left(\frac{1}{1-x}\right)', \text{ når } x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Løsningsforslag a)

Siden en endelig geometrisk rekke

$$G_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

tilfredsstiller

$$\begin{aligned} xG_n &= x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + x^{n+1} \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + x^{n+1} - 1 \\ &= G_n + x^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

kan vi skrive

$$xG_n - G_n = x^{n+1} - 1,$$

eller helt tilsvarende

$$G_n(1 - x) = 1 - x^{n+1}.$$

Verdien av en endelig geometrisk rekke er altså

$$G_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

En uendelig geometrisk rekke oppstår når n går mot uendelig. Hvis $x \in (-1, 1)$ må da x^{n+1} gå mot 0 og dermed også

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$



b)

Vis at

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}, \text{ når } x \in (-1, 1)$$

Løsningsforslag b)

Siden

$$(1)' + (x)' + (x^2)' + (x^3)' + \dots = \left(\frac{1}{1-x}\right)' \text{ når } x \in (-1, 1)$$

og $(x^n)' = nx^{n-1}$ for alle heltall n , kan vi skrive

$$0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \left(\frac{1}{1-x}\right)' \text{ når } x \in (-1, 1),$$

Fra kjerneregelen med kjerne $g(x) = (1-x)$ følger det videre at

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-x}\right)' &= \left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= -\frac{1}{(g(x))^2} \cdot g'(x) \\ &= -\frac{1}{(1-x)^2} \cdot (-1) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Vi sitter altså igjen med følgende likhet

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ når } x \in (-1, 1),$$

som er det vi ønsket å vise.

c)

Bruk resultatet i oppgave b) til å vise at

$$1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots = 4$$

Løsningsforslag c)

Siden $\frac{1}{2} \in (-1, 1)$ og

$$4 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2},$$

følger det fra resultatet i oppgave b) at

$$1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots = 4.$$

Dette kan omskrives til

$$1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots = 4,$$

som er det vi ønsket å vise.



d)

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n) : 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Løsningsforslag d)

For $n = 1$ sier påstanden at

$$P(1) : 1 = 4 - \frac{1+2}{2^{1-1}} \Leftrightarrow 1 = 4 - 3,$$

som er sant. Altså gjenstår det bare å undersøke om $P(k+1)$ nødvendigvis må være sann hvis $P(k)$ er sann. Vi antar altså at

$$P(k) : 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^{k-1}} = 4 - \frac{k+2}{2^{k-1}}$$

og bruker dette til å undersøke om

$$P(k+1) : 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{k+1}{2^k} = 4 - \frac{k+3}{2^k}.$$

Ved å legge til $\frac{k+1}{2^k}$ på begge sider av likhetstegnet i $P(k)$ følger det at

$$1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^{k-1}} + \frac{k+1}{2^k} = 4 - \frac{k+2}{2^{k-1}} + \frac{k+1}{2^k}$$

og siden

$$\begin{aligned} -\frac{k+2}{2^{k-1}} + \frac{k+1}{2^k} &= -\frac{2k+4}{2^k} + \frac{k+1}{2^k} \\ &= \frac{-2k-4+k+1}{2^k} \\ &= \frac{-k-3}{2^k} = -\frac{k+3}{2^k} \end{aligned}$$

kan vi skrive

$$1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^{k-1}} + \frac{k+1}{2^k} = 4 - \frac{k+3}{2^k}.$$

Dette er nøyaktig påstanden $P(k+1)$! Det betyr at $P(k+1)$ følger direkte fra $P(k)$ og siden vi i tillegg vet at $P(1)$ så må $P(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.



e)

Bruk det du har funnet ovenfor til å bestemme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2^{n-1}}$

Løsningsforslag e)

Siden

$$1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}$$

og

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} \right) = 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots = 4$$

må

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} \right) = 4.$$

Ved å bruke at grenseverdien av en sum er lik summen av grenseverdiene kan vi skrive

$$4 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2^{n-1}} = 4,$$

som betyr at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2^{n-1}} = 0.$$

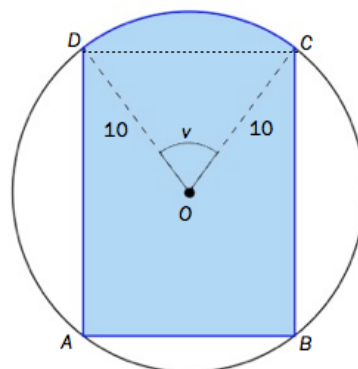
Svar: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2^{n-1}} = 0$



Oppgave 5 (5 poeng) Nettkode: E-4DHJ

Et rektangel $ABCD$ er innskrevet i en sirkel. Sirkelen har sentrum i O og radius 10.

Vi setter $\angle COD = \nu$, der $0 < \nu < \pi$. Se figuren nedenfor.



a)

Vis ved regning at arealet F av sirkelsektoren COD er

$$F(\nu) = 50\nu$$

Løsningsforslag a)

Forholdet mellom arealet $F(\nu)$ av sirkelsektoren COD og hele sirkelen er lik forholdet mellom vinkelen ν og 2π . Arealet av sirkelen er πR^2 , der R er radius i sirkelen, og gir at

$$\frac{F(\nu)}{\pi R^2} = \frac{\nu}{2\pi}.$$

Det betyr at

$$F(\nu) = \frac{\nu \pi R^2}{2\pi} = \frac{\nu R^2}{2},$$

og siden radius i sirkelen er 10, følger det at

$$F(\nu) = \frac{10^2 \nu}{2} = \frac{100\nu}{2} = 50\nu.$$

Svar: $F(\nu) = 50\nu$

b)

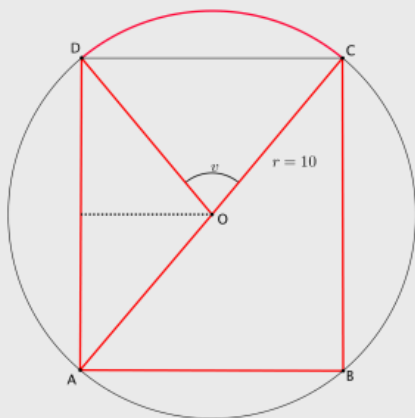
Vis ved regning at arealet T av det fargelagte området på figuren kan skrives som

$$T(\nu) = 50(\nu + 3 \sin \nu)$$



Løsningsforslag b)

Vi deler opp arealet T i trekantene $\triangle ADO$, $\triangle ACB$ og sirkelsektoren COD .



Siden $ADCB$ er et rektangel må $AB = DC$ og $DA = CB$. Videre er

$$R \cdot \cos\left(\frac{\nu}{2}\right) = \frac{DA}{2} \quad \text{og} \quad R \cdot \sin\left(\frac{\nu}{2}\right) = \frac{DC}{2},$$

som betyr at

$$DA = 2R \cos\left(\frac{\nu}{2}\right) \quad \text{og} \quad DC = 2R \sin\left(\frac{\nu}{2}\right).$$

Hvis vi velger DA som grunnlinje for $\triangle ADO$ er høyden lik $\frac{DC}{2}$. Derfor må arealet av $\triangle ADO$ være

$$\begin{aligned} A_{\triangle ADO} &= \frac{1}{2} DA \frac{DC}{2} \\ &= R^2 \cos\left(\frac{\nu}{2}\right) \sin\left(\frac{\nu}{2}\right) \\ &= 10^2 \cdot \frac{1}{2} \sin(\nu) \\ &= 50 \sin(\nu) \end{aligned}$$

Siden $\triangle ACB$ har høyde BC hvis den har grunnlinje AB følger det at arealet av $\triangle ACB$ er

$$\begin{aligned} A_{\triangle ACB} &= \frac{1}{2} BC \cdot AB \\ &= 2R^2 \cos\left(\frac{\nu}{2}\right) \sin\left(\frac{\nu}{2}\right) \\ &= 2 \cdot 100 \cdot \frac{1}{2} \sin(\nu) \\ &= 100 \sin(\nu) \end{aligned}$$

Siden vi har fra oppgave a) at arealet av sirkelsektoren COD er $F(\nu) = 50\nu$ må

$$\begin{aligned} T(\nu) &= A_{\triangle ADO} + A_{\triangle ACB} + F(\nu) \\ &= 50 \sin(\nu) + 100 \sin(\nu) + 50\nu \\ &= 50(\nu + 3 \sin(\nu)). \end{aligned}$$

ALTERNATIV LØSNING

Svar: $T(\nu) = 50(\nu + 3 \sin \nu)$.



c)

Bestem v grafisk slik at T blir størst mulig. Bestem T_{maks} .

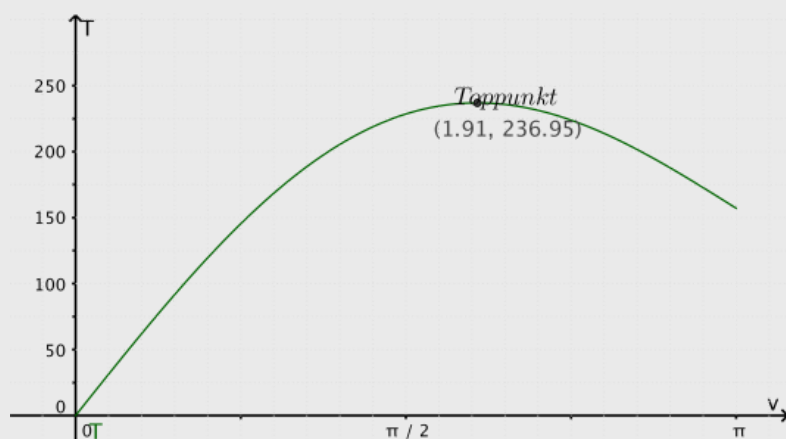
Løsningsforslag c)

Ved å definere arealet $T(v)$ som en funksjon av v i GeoGebras grafdel med kommandoen

$T(v) := \text{Dersom}[0 < v < \pi, 50 * (v + 3 \sin(v))]$

kan vi finne toppunktet, som er funksjonens eneste ekstremalpunkt i intervallet $[0, 4]$, ved å bruke kommandoen

$\text{Ekstremalpunkt}[T, 0, 4]$



Resultatet er punktet

$(1.91, 236.95)$.

Altså er $v \approx 1,91$ den vinkelen som gjør at T blir størst mulig. Den maksimale verdien av T , T_{maks} , er da 236,95.

Svar: $v \approx 1,91$ og $T_{\text{maks}} \approx 236,95$.

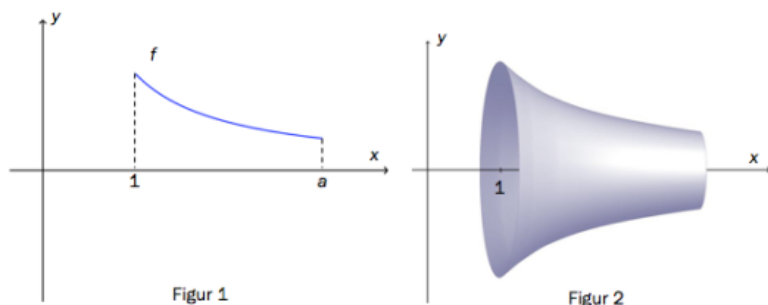


Oppgave 6 (6 poeng) Nettkode: E-4DHP

Figur 1 nedenfor viser grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, a]$$

Vi dreier grafen til f 360° om x-aksen. Vi får da fram et omdreiningslegeme som vist på figur 2.



a)

Bestem volumet $V(a)$ av omdreiningslegemet.

Løsningsforslag a)

Ved å kutte omdreiningslegemet opp i uendelig mange, uendelig tynne sylindere med volum $\pi[f(x)]^2 dx$ kan vi ved å integrere uttrykket fra 1 til a finne volumet av omdreiningslegemet. Med andre ord må vi ha

$$V(a) = \int_1^a \pi f(x)^2 dx = \pi \int_1^a \frac{dx}{x^2}$$

og siden den deriverte av $\frac{-1}{x}$ er $\frac{1}{x^2}$ må vi videre ha at

$$\pi \int_1^a \frac{dx}{x^2} = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^a = \pi \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{1} \right) = \pi \left(1 - \frac{1}{a} \right).$$

Altså er volumet $V(a)$ av omdreiningslegemet lik

$$V(a) = \pi \left(1 - \frac{1}{a} \right).$$

Svar: $V(a) = \pi \left(1 - \frac{1}{a} \right)$



b)

Bestem $\int_1^a f(x) dx$. Omdreiningslegemet har overflateareal $O(a)$. Forklar at $O(a) > \int_1^a f(x) dx$.

Løsningsforslag b)

Først beregner vi

$$\int_1^a f(x) dx = \int_1^a \frac{1}{x} dx = |\ln(x)|_1^a = \ln(a) - \ln(1) = \ln(a).$$

Hvis grafen til $f(x)$ over intervallet $[a, b]$ dreies om x -aksen, får omdreiningslegemet areal lik

$$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

For vår graf, blir arealet av omdreiningslegemet

$$O(a) = \int_1^a 2\pi \cdot \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx.$$

Siden $2\pi \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} > 1$, må

$$O(a) > \int_1^a \frac{1}{x} dx,$$

som vi skulle vise.

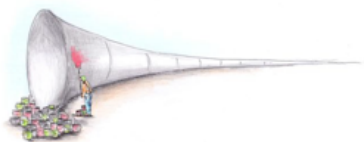
Svar: $\int_1^a f(x) dx = \ln a$



c)

Vi lar $a \rightarrow \infty$. Det omdreiningslegemet vi da får, kalles Gabriels horn.

Bestem $\lim_{a \rightarrow \infty} O(a)$ og $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$ dersom grenseverdiene eksisterer. Kommenter svarene.



Å male Gabriels horn ...



Å fylle Gabriels horn ...

Løsningsforslag c)

Siden

$$O(a) > \int_1^a f(x) dx$$

kan ikke gresenverdien $\lim_{a \rightarrow \infty} O(a)$ eksistere dersom ikke grenseverdien

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a f(x) dx$$

eksisterer. Fra oppgave b) vet vi at $\int_1^a f(x) dx = \ln a$ og siden

$\lim_{a \rightarrow \infty} \ln a = \infty$, må $\lim_{a \rightarrow \infty} O(a) = \infty$. Dette betyr at grenseverdien ikke eksisterer.

Når det gjelder volumet av omdreiningslegemet, $V(a) = \pi \left(1 - \frac{1}{a}\right)$, finner vi

$$\lim_{a \rightarrow \infty} V(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \pi \left(1 - \frac{1}{a}\right) = \pi (1 - 0) = \pi,$$

som betyr at grenseverdien $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$ eksisterer og har verdien π . Vi har altså funnet ut at det i teoreien er mulig å bygge et legeme med uendelig stort areal, men med et endelig volum π . Hvis både x og y måles i desimeter vil volumet måles i liter og arealet måles i kubikkdesimeter. Tenker vi på Gabriels horn vil det kreves uendelig mye maling for å male hele hornets innside, men for å fylle hele hornets innside vil man bare trenge π liter maling.

Svar:

$$\lim_{\rightarrow \infty} \ln(a) = \infty \quad (\text{eksisterer ikke})$$

$$\lim_{\rightarrow \infty} V(a) = \pi$$

