REA3024 2013 Vår

Eksamenstid:
5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler

Del 2:
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.

- Alle grafer og figurer (Utdanningsdirektoratet)

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng) Nettkode: E-4DBN

Deriver funksjonene

a)
$f(x) = 3\cos x$

b)
$g(x) = 6\sin(\pi x) + 7$

c)
$h(x) = 3e^{2x} \cdot \sin(3x)$

Oppgave 2 (4 poeng) Nettkode: E-4DBR

Bestem integralet $\int \frac{2x}{x^2-4}\mathrm{dx}$ ved å bruke

a)
variabelskifte

b)
delbrøkoppspalting

Oppgave 3 (4 poeng) Nettkode: E-4DBU

Punktene $A(1,\,-1,\,0)$, $B(3,\,1,\,1)$ og $C(0,\,0,\,0)$ er gitt.

a)

Bestem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Bruk resultatet til å bestemme arealet av ΔABC.

b)

Bestem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Bruk blant annet dette resultatet til å bestemme arealet av ΔABC.

Oppgave 4 (3 poeng) Nettkode: E-4DBX

Løs differensiallikningen

$y' = 6xy$ når $y(0) = 2$

Oppgave 5 (5 poeng) Nettkode: E-4DBZ

En rekke er gitt ved

$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + a_n$

a)
Bestem a_{16} og S_{16}

b)
Forklar at rekken er aritmetisk, og bruk dette til å finne et uttrykk for a_n og S_n .

c)
Bestem hvor mange ledd rekken minst må ha for at $S_n > 400$.

Oppgave 6 (2 poeng) Nettkode: E-4DC3

Følgende informasjon er gitt om en kontinuerlig funksjon f :

- $f(x) > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) < 0$ for alle $x \in \langle \leftarrow, -2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$
- $f'(x) = 0$ for $x = -2$ og for $x = 2$
- $f''(x) = 0$ for $x = 1$ og for $x = 3$

Lag en skisse som viser hvordan grafen til f kan se ut.

Oppgave 7 (2 poeng) Nettkode: E-4DC5

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$P(n): \quad a + ak + ak^2 + ak^3 + \ldots + ak^{n-1} = a \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad , \qquad n \in \mathbb{N}$

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng) Nettkode: E-4DC7

En pasient får 8 mL av en medisin hver time. Den totale mengden medisin i kroppen t timer etter at medisineringen startet, er $y(t)$ mL. I løpet av en time skiller kroppen ut 5% av den totale medisinmengden.

a)
Forklar at

$y' = 8 - 0{,}05 \cdot y$

b)
Vis at $y(t) = 160 - 160e^{-0{,}05t}$ når $y(0) = 0$

c)
Bestem $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$. Kommenter svaret.

Oppgave 2 (6 poeng) Nettkode: E-4DCB

Funksjonen f er gitt ved

$f(x) = 12e^{-0{,}5x} \cdot \sin(0{,}5x) \quad , \quad x \in [0,\ 4\pi]$

a)
Tegn grafen til f.

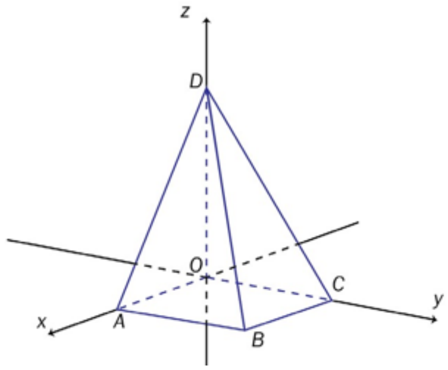
b)
Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

c)
Bestem arealet som er begrenset av grafen til f og x-aksen.

Oppgave 3 (8 poeng) Nettkode: E-4DDB

Skissen nedenfor viser en pyramide $OABCD$ som er plassert i et romkoordinatsystem.

Hjørnene i pyramiden er $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(3,\ 0,\ 0)$, $B(3,\ 3,\ 0)$, $C(0,\ 3,\ 0)$ og $D(0,\ 0,\ 4)$.



a)
Bestem ved regning arealet av sideflaten ABD i pyramiden.

b)
Sideflaten ABD ligger i et plan α.

Vis ved regning at planet α har likningen

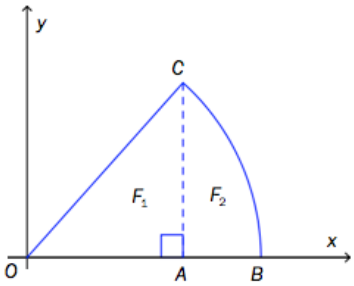
$$4x + 3z - 12 = 0$$

c)
Bestem avstanden fra punktet O til planet α.

d)
Bestem ved regning vinkelen mellom de to planene som sideflatene ABD og BCD ligger i.

Oppgave 4 (6 poeng) Nettkode: E-4DDH

Figuren nedenfor viser en sirkelsektor OBC der C ligger i første kvadrant. Buen BC er en del av sirkelen med likning $x^2 + y^2 = 9$. Punktet A har koordinatene $(2, 0)$ og $\angle OAC = 90^\circ$



a)
Vis at koordinatene til C er $\left(2, \sqrt{5}\right)$.

Bestem likningen for den rette linjen gjennom O og C.

b)
Når flatestykket F_1 (ΔOAC) dreies 360° om x-aksen, får vi en kjegle.

Bestem volumet av denne kjeglen ved hjelp av integralregning.

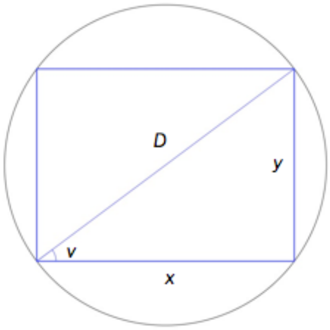
c)
Når flatestykket F_2 dreies 360° om x-aksen, får vi et kulesegment.

Bestem volumet av dette kulesegmentet ved hjelp av integralregning.

Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4DDM

På figuren er et rektangel med sider x og y innskrevet i en sirkel. Sirkelen har diameteren D.

$\angle v$ er vinkelen mellom x og D.



a)
Forklar at omkretsen O til rektangelet kan skrives som

$O(v) = 2D\cos v + 2D\sin v$

Bestem også et funksjonsuttrykk for arealet $A(v)$ av rektangelet.

b)
Bruk $O'(v)$ og vis at det rektangelet som har størst omkrets, er et kvadrat.

Bestem den største omkretsen av rektangelet uttrykt ved diameteren D.

c)
Bruk $A'(v)$ og vis at det rektangelet som har størst areal, også er et kvadrat.

Bestem det største arealet av rektangelet uttrykt ved diameteren D.

Oppgave 6 (6 poeng) Nettkode: E-4DDU

Sierpiński-trekanten, som har sitt navn etter den polske matematikeren Wacław Franciszek Sierpiński (1882–1969), lages slik:

1. Vi starter med en likesidet, svart trekant som har areal A. Se figur 1.

2. Midtpunktet på hver av sidene i trekanten er hjørnene i en ny hvit, likesidet trekant. Denne hvite trekanten fjerner vi. Vi står da igjen med tre likesidede, svarte trekanter. Se figur 2.

3. Vi gjentar denne prosessen med hver av de svarte trekantene. Se figurene 3–5. Vi tenker oss at prosessen blir utført uendelig mange ganger. Den «gjennomhullede» figuren vi da står igjen med, kalles Sierpiński-trekanten.

Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4 Figur 5

Summen av arealene som fjernes (de hvite trekantene), er gitt ved rekken

$$A \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + \frac{27}{256} + \ldots\right)$$

a)
Bestem summen av rekken ovenfor.

Hva forteller svaret ditt om arealet av Sierpiński-trekanten?

b)
Sidene i trekanten i figur 1 er lik a.

Forklar at omkretsene av de svarte trekantene i figurene 2 − 5 ovenfor er henholdsvis

$$3 \cdot \frac{3}{2} \cdot a, \quad 3 \cdot \frac{9}{4} \cdot a, \quad 3 \cdot \frac{27}{8} \cdot a \quad \text{og} \quad 3 \cdot \frac{81}{16} \cdot a$$

c)
Vi gjør prosessen som forklart i trinn 2 ovenfor n ganger. Forklar at omkretsen av de svarte trekantene da er lik $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot a$

Forklar at $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot a \to \infty$ når $n \to \infty$

Hva forteller dette om omkretsen til Sierpiński-trekanten?