



www.matematikk.org

Eksamensoppgavesettet er utarbeidet av Utdanningsdirektoratet. Avvik fra det originale eksamenssettet er eventuelle spesifiseringer og illustrasjoner. Løsningsforslagene i sin helhet er utarbeidet av matematikk.org.

Nettkoden som står til høyre for oppgavetittelen brukes i søkefeltet på www.matematikk.org for å åpne oppgaven og se utfyllende løsningsforslag.

Våre samarbeidspartnere:



REA3024 2013 Høst



Eksamenstid:

5 timer:

Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.

Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:

Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler

Del 2:

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:

Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.

Veiledning om vurderingen:

Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger:

Kilder for bilder, tegninger osv.

- Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet



DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng) [Nettkode: E-4D9R](#)

Deriver funksjonene

a)

$$f(x) = 5x \cos x$$

Løsningsforslag a)

Produktregelen for derivasjon sier at hvis $u(x)$ og $v(x)$ er deriverbare funksjoner så må $(uv)' = u'v + uv'$. Ved å sette $u(x) = 5x$ og $v(x) = \cos x$ og bruke at $u'(x) = (5x)' = 5$ og $v'(x) = (\cos x)' = -\sin x$ finner vi altså

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5x \cos x)' = (5x)' (\cos x) + (5x) (\cos x)' \\ &= (5) (\cos x) + (5x) (-\sin x) = 5 \cos x - 5x \sin x. \end{aligned}$$

Svar:

$$f'(x) = 5 \cos x - 5x \sin x.$$



b)

$$g(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$$

Løsningsforslag b)

Produktregelen sier at hvis $u(x)$ og $v(x)$ er deriverbare funksjoner så må $(uv)' = u'v + uv'$. Ved å sette $u(x) = \sin 2x$ og $v(x) = \frac{1}{x}$ kan vi altså skrive

$$g'(x) = \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)' = (\sin 2x)' \frac{1}{x} + \sin 2x \left(\frac{1}{x}\right)'.$$

Fra regelen $(x^n) = nx^{n-1}$ følger det at

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})'(-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}.$$

Kjerneregelen for derivasjon sier at $(f(u(x)))' = u'(x)f'(u(x))$. Det betyr at hvis vi setter $u(x) = 2x$ så

$$\text{må } (\sin 2x)' = (2x)' \cdot \cos 2x == 2 \cos 2x.$$

Altså har vi funnet at

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\sin 2x)' \frac{1}{x} + \sin 2x \left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= 2 \cos 2x \frac{1}{x} + \sin 2x \left(\frac{-1}{x^2}\right) \\ &= \frac{2x \cos 2x}{x^2} - \frac{\sin 2x}{x^2} \\ &= \frac{2x \cos 2x - \sin 2x}{x^2}. \end{aligned}$$

ALTERNATIV LØSNING

Svar

$$g'(x) = \frac{2x \cos 2x - \sin 2x}{x^2}.$$



Oppgave 2 (3 poeng) Nettkode: E-4D9U

Bestem integralene

a)

$$\int_0^1 2e^{2x} dx$$

Løsningsforslag a)

Substitusjonsmetoden for integrasjon sier at

$$\int_a^b f(u(x)) u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du.$$

Ved å sette $u(x) = 2x$ og observere at $u'(x) = 2$ finner vi

$$\int_0^1 2e^{2x} dx = \int_0^1 u'(x) e^{u(x)} dx = \int_{2 \cdot 0}^{2 \cdot 1} e^u du = \int_0^2 e^u du$$

og siden e^x er sin egen deriverte må

$$\int_0^2 e^u du = [e^u]_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1.$$

Altså har vi funnet at

$$\int_0^1 2e^{2x} dx = e^2 - 1.$$

ALTERNATIV LØSNING

Svar:

$$\int_0^1 2e^{2x} dx = e^2 - 1.$$



b)

$$\int 2x \cdot e^x dx$$

Løsningsforslag b)

Regelen for delvis integrasjon sier at

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx.$$

Det betyr at hvis vi setter $u'(x) = e^x$ og $v(x) = 2x$ og ser at $u(x) = e^x$ og $v'(x) = 2$ så må

$$\int 2xe^x = uv + C_1 - \int uv' dx = 2xe^x + C_1 - \int 2e^x dx$$

der C_1 er en integrasjonskonstant. Siden e^x er sin egen deriverte følger det videre at

$$\int 2e^x dx = 2e^x + C_2$$

der C_2 er integrasjonskonstanten. Det betyr at

$$\int 2xe^x = 2xe^x - 2e^x + C = 2e^x(x - 1) + C$$

der vi har valgt $C = C_1 - C_2$.

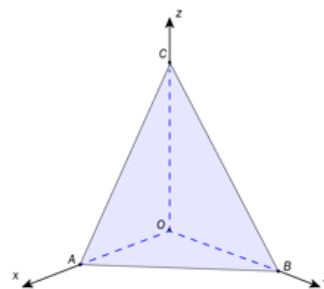
Svar:

$$\int 2xe^x = 2e^x(x - 1) + C.$$



Oppgave 3 (5 poeng) Nettkode: E-4D9Y

Gitt punktene $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 4)$ og $O(0, 0, 0)$.



a)

Bestem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Løsningsforslag a)

Vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ kan uttrykkes ved

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [0, 3, 0] - [2, 0, 0] = [-2, 3, 0]$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [0, 0, 4] - [2, 0, 0] = [-2, 0, 4].$$

Da følger det at

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = [-2, 3, 0] \cdot [-2, 0, 4] = (-2)(-2) + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 4$$

og

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{e}_x - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_z \\ &= (3 \cdot 4) \vec{e}_x - (-2 \cdot 4) \vec{e}_y + (-(-2) \cdot 3) \vec{e}_z = 12 \vec{e}_x + 8 \vec{e}_y + 6 \vec{e}_z = [12, 8, 6]. \end{aligned}$$

Svar: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$ og $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [12, 8, 6]$.



b)

Bestem volumet av tetraederet $ABCO$.

Løsningsforslag b)

Tetraederet $ABCO$ er utspent av vektorene $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ og må derfor ha volum

$$V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \right|.$$

Fra oppgave a) har vi $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [12, 8, 6]$ og siden

$$\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} = [-2, 0, 0]$$

må

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \right| = \frac{1}{6} |[-2, 0, 0] \cdot [12, 8, 6]| = \\ &= \frac{1}{6} |-2 \cdot 12 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 6| = \frac{24}{6} = 4 \end{aligned}$$

ALTERNATIV LØSNING

Svar: $V = 4$.



c)

Punktene A , B og C ligger i planet α .

Vis at likningen til planet α kan skrives

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$$

Løsningsforslag c)

Siden A , B og C ligger i α må

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [12, 8, 6] = 2[6, 4, 3]$$

stå vinkelrett på alle vektorer mellom punkter i α . Vi er bare interessert i retningen og kan derfor velge normalvektor $\vec{n} = [6, 4, 3]$. Dersom P_0 er et punkt i α må alle punkter $P(x, y, z)$ som ligger i α tilfredsstille

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0.$$

Ved å velge $P_0 = A$ kan vi skrive venstresiden av likningen

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} &= \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} - \vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= [6, 4, 3] \cdot [x, y, z] - [6, 4, 3] \cdot [2, 0, 0] \\ &= 6x + 4y + 3z - 6(6 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0) = 6x + 4y + 3z - 12,\end{aligned}$$

som betyr at likningen for planet α er

$$6x + 4y + 3z - 12 = 0.$$

Ved å multiplisere begge sider av likhetstegnet med $\frac{1}{12}$ kan vi skrive planlikningen

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1,$$

som er det vi ønsket å vise.



Oppgave 4 (4 poeng) Nettkode: E-4DA2

a)

En rekke er gitt ved

$$1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + \dots$$

Forklar at dette er en konvergent, geometrisk rekke. Bestem summen av den uendelige rekken.

Løsningsforslag a)

En geometrisk rekke er en rekke der forholdet mellom hvert ledd og det foregående er konstant. I rekken $1 + e^{-1} + e^{-2} + \dots$ er alle ledd på formen e^{-n} . Det betyr at forholdet mellom hvert ledd og det foregående kan skrives

$$\frac{e^{-n}}{e^{-(n-1)}} = \frac{e^{-n}}{e^{-n}e^1} = \frac{1}{e}.$$

Siden dette er en konstant uavhengig av n er rekken en geometrisk rekke. En uendelig geometrisk rekke $a + ak + ak^2 + \dots$ er konvergent dersom $|k| < 1$. Dette kan vi se ved først å studere en endelig geometrisk rekke $S_n = a + ak + ak^2 + \dots + ak^n$, og se at

$$kS_n = ak + ak^2 + \dots + ak^n + ak^{n+1}$$

nesten er den samme rekken. Faktisk har vi at

$$S_n - kS_n = a - ak^{n+1} = a(1 - k^{n+1}).$$

Ved å løse for S_n finner vi at den endelige geometriske rekken tar verdien

$$S_n = a \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k}.$$

For uendelige geometriske rekker må vi ha $|k| < 1$ for å forsikre oss om at k^{n+1} går mot 0 når n går mot uendelig. En konvergent uendelig geometrisk rekke tar altså verdien

$$a + ak + ak^2 + ak^3 + \dots = \frac{a}{1 - k}.$$

Dette betyr at rekken $1 + e^{-1} + e^{-2} + \dots$ er konvergent siden $|e^{-1}| \approx 0.35 < 1$ og derfor konvergerer mot

$$\frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e - 1}.$$

Svar: Rekken er geometrisk siden forholdet mellom etterfølgende ledd er konstant og konvergerer siden denne konstanten er mindre enn én. Summen er

$$1 + e^{-1} + e^{-2} + \dots = \frac{e}{e - 1}.$$



b)

En geometrisk rekke er gitt ved

$$1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots$$

Bestem konvergensområdet og summen av rekken.

Løsningsforslag b)

Den uendelige geometriske rekken $1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots$ konvergerer for $|e^{-x}| < 1$. Siden e^{-x} alltid er positiv holder det å kreve

$$e^{-x} < 1 \Rightarrow -x < \ln 1 = 0 \Rightarrow x > 0.$$

Altså konvergerer rekken for alle strengt positive verdier av x . Den må da konvergere mot

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x-1},$$

siden den er en geometrisk rekke.

Svar: Rekken konvergerer mot $\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x-1}$ for alle strengt positive verdier av x .



Oppgave 5 (2 poeng) Nettkode: E-4DAD

Antall individer i en populasjon etter t timer kan beskrives av funksjonen $N(t)$.

Vi antar at

$$N'(t) = 4t + 3 \text{ og } N(0) = 800$$

Bestem antall individer i populasjonen etter 10 h.

Løsningsforslag

Siden $N(t)$ er en antiderivert til $N'(t)$, blir

$$N(10) - N(0) = \int_0^{10} N'(t) dt$$

$$\int_0^{10} (4t + 3) dt = [2t^2 + 3t]_0^{10} = 230$$

Dette gir

$$N(10) = 230 + N(0) = 230 + 800 = 1030.$$

Svar: Antall individer i populasjonen er 1030 etter 10 timer.



Oppgave 6 (4 poeng) Nettkode: E-4DAG

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{5}{2}x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

a)

Bestem koordinatene til eventuelle vendepunkter på grafen til f .

Løsningsforslag a)

Vi begynner med å beregne den annenderiverte av $f(x)$. Siden den deriverte av funksjonen ax^n er anx^{n-1} for alle $n \neq 0$ må

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{5}{2}x\right)' = \frac{1}{2}4x^3 - 2 \cdot 3x^2 + \frac{5}{2} \\ &= 2x^3 - 6x^2 + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Dette betyr at

$$f''(x) = (f'(x))' = (2x^3 - 6x^2 + \frac{5}{2})' = 3 \cdot 2x^2 - 2 \cdot 6x + 0 = 6x^2 - 12x.$$

Vi finner nullpunktene til $f''(x)$.

$$f''(x) = 6x^2 - 12x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ og } x = 2.$$

Siden $f''(-1) = 18 > 0$, $f''(1) = -6 < 0$ og $f''(3) = 18 > 0$ bytter altså $f''(x)$ fortegn i både $x = 0$ og $x = 2$. De to vendepunktene på grafen til f har da koordinater

$$(0, f(0)) = (0, 0)$$

$$(2, f(2)) = \left(2, \frac{1}{2} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^3 + \frac{5}{2} \cdot 2\right) = (2, 2^3 - 2 \cdot 2^3 + 5)$$

$$= (2, -2^3 + 5) = (2, -8 + 5) = (2, -3)$$

Svar: Vendepunktene har koordinater $(0, 0)$ og $(2, -3)$.



b)

Bestem likningen for eventuelle vendetangenter på grafen til f .

Løsningsforslag b)

f i punktet x_0 . Siden den rette linjen og f deler y -verdi i punktet x_0 må vi videre ha

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + B \Rightarrow B = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Fra oppgave a) har vi at

$$f'(x) = 2x^3 - 6x^2 + \frac{5}{2},$$

som betyr at den deriverte i de to vendepunktene $(0, 0)$ og $(2, -3)$ er henholdsvis

$$f'(0) = \frac{5}{2} \text{ og } f'(2) = 16 - 6 \cdot 4 + \frac{5}{2} = -\frac{11}{2}.$$

Siden tangentlinjen til f i punktet x_0 kan skrives

$$y_0(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

kan vi ved å sette inn for vendepunktkoordinatene finne

$$y_1(x) = f'(0)(x - 0) + f(0) = \frac{5}{2}x$$

for vendepunktet i $(0, 0)$ og

$$y_2(x) = f'(2)(x - 2) + f(2) = -\frac{11}{2}x + 2\frac{11}{2} - 3 = -\frac{11}{2}x + 8.$$

De to vendetangentene er altså beskrevet av de to rette linjene

$$y_1 = \frac{5}{2}x \text{ og } y_2 = -\frac{11}{2}x + 8$$

Svar: Vendetangent i $(0, 0)$: $y_1 = \frac{5}{2}x$. Vendetangent i $(2, -3)$: $y_2 = -\frac{11}{2}x + 8$.



Oppgave 7 (3 poeng) Nettkode: E-4DAJ

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n) : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Løsningsforslag

Vi kan lett sjekke at $P(1)$ er sann ved å sette inn $n = 1$. Da sier påstanden at

$$P(1) : \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1},$$

som alltid er sant. Vi antar nå at påstanden stemmer for $n = k$. Det vil si

$$P(k) : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Vi lurer på om dette betyr at

$$P(k+1) : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

også må være sann. Ved å trekke fra $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ på begge sider sitter vi igjen med

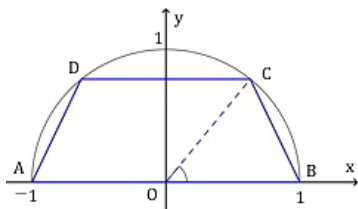
$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{k+1}{k+2} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)(k+1)}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)(k+1)-1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k^2+2k}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} \end{aligned}$$

som er nøyaktig påstanden $P(k)$. Ved å anta at $P(k)$ stemmer følger det altså umiddelbart at $P(k+1)$ også er sann. Dermed er $P(n)$ sann for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.



DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng) Nettkode: E-4DAM



Figuren ovenfor viser et trapes $ABCD$ som er innskrevet i en halvsirkel med radius 1.

a)

Forklar at arealet F av trapeset er gitt ved

$$F(v) = (1 + \cos v) \sin v$$

Hvilke verdier kan v ha?

Løsningsforslag a)

Siden punktet C ligger på enhetssirkelen med vinkel v fra x -aksen må C ha koordinater

$$(\cos v, \sin v).$$

Siden y -verdien til C er høyden av trapeset og x -verdien er halve bredden DC holder det å konstatere at grunnlinjen AB er diameter i sirkelen, og derfor lik 2, før vi uttrykker arealet $F(v)$ til trapeset ved

$$F(v) = \text{høyde} \cdot \text{gjennomsnittsbredde} = \sin v \left(\frac{2+2\cos v}{2} \right) = (1 + \cos v) \sin v.$$

At trapeset er innskrevet i halvsirkelen med radius én betyr at v ikke kan være mindre enn 0. Siden vi har brukt at $ABCD$ er et trapes kan vi få problemer når $v > \frac{\pi}{2}$ ettersom C og D da bytter plass. Hvis $v = 0$ eller $v = \frac{\pi}{2}$, er ikke figuren et trapes. Altså må v være i intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$.

ALTERNATIV LØSNING

Svar: $v \in (0, \frac{\pi}{2})$.



b)

Bestem $\angle v$ ved regning slik at arealet av trapeset blir størst mulig.

Bestem arealet av det største trapeset.

Løsningsforslag b)

Ved å derivere uttrykket for arealet $F(v)$ med hensyn på v finner vi endringen i areal når vinkelen endrer seg. Ved å bruke produktregelen for derivasjon finner vi

$$\begin{aligned} F'(v) &= ((1 + \cos v) \sin v)' = (1 + \cos v)' \sin v + (1 + \cos v)(\sin v)' \\ &= (-\sin v) \sin v + (1 + \cos v)(\cos v) = -\sin^2 v + \cos^2 v + \cos v. \end{aligned}$$

Siden $\sin^2 v = 1 - \cos^2 v$ følger det videre at

$$\begin{aligned} F'(v) &= -\sin^2 v + \cos^2 v + \cos v = -(1 - \cos^2 v) + \cos^2 v + \cos v \\ &= 2\cos^2 v + \cos v - 1. \end{aligned}$$

Vi må altså finne de verdiene for v som tilfredsstiller

$$2\cos^2 v + \cos v - 1 = 0.$$

Annengradsformelen gir da

$$\begin{aligned} \cos v &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

De vinklene som tilfredsstiller $F'(v) = 0$ er altså

$$v = \begin{cases} \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \arccos(-1) + 2\pi n = \pi + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Den eneste av disse verdiene som ligger innenfor intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$ er

$$v = \frac{\pi}{3}.$$

For at v skal være et toppunkt må vi imidlertid forsikre oss om at F vokser før den har passert v og avtar etter den har passert v , altså at $v = \frac{\pi}{3}$ ikke er et. Siden $\frac{\pi}{3}$ er det eneste nullpunktet til $F'(v)$ kan vi sette inn endepunktene og dermed finne

$$F'(0) = 2\cos^2 0 + \cos 0 - 1 = 2 > 0$$

og

$$F'(\frac{\pi}{2}) = 2\cos^2 \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - 1 = -1 < 0.$$

Altså må $v = \pi/3$ være et toppunkt. Arealet som hører til denne vinkelen er



$$\begin{aligned} F\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \left(1 + \cos \frac{\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,299 \end{aligned}$$

og siden arealet til figuren er 0 når $v = 0$ og

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(1 + \cos \frac{\pi}{2}\right) \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

har arealet sin største verdi når $v = \frac{\pi}{3}$. Da er arealet

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,299.$$

ALTERNATIV LØSNING (NUMERISK)

Svar: $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,299.$



Oppgave 2 (7 poeng) Nettkode: E-4DAP

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x) \quad , \quad x \in [0, 6]$$

a)

Tegn grafen til f .

Løsningsforslag a)

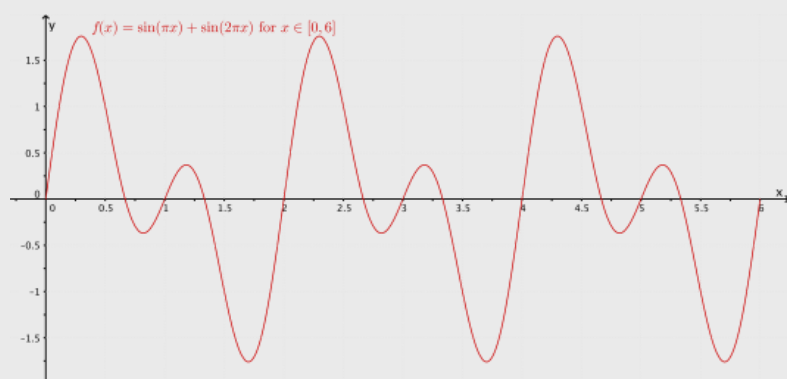
Ved å skrive følgende kommando i geoGebras grafdel

```
f(x) := Dersom[0 ≤ x ≤ 6, sin(πx) + sin(2πx)]
```

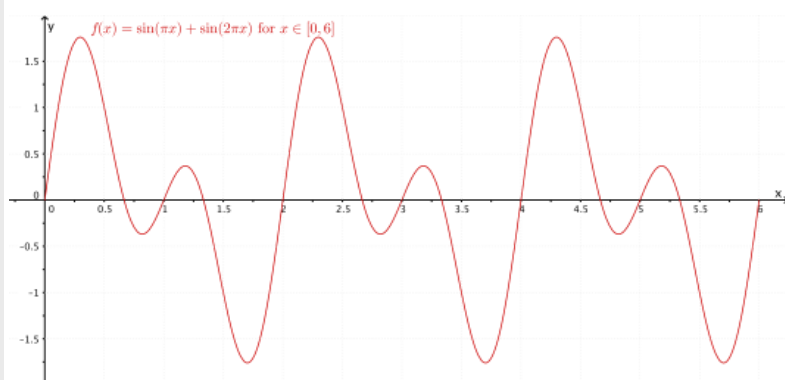
eller eventuelt

```
f(x) := Funksjon[sin(πx) + sin(2πx), 0, 6]
```

sitter vi igjen med følgende figur:



Svar:



b)

Bruk grafen til å vise at f er en periodisk funksjon, og bestem perioden til f .

Løsningsforslag b)

En funksjon $g(x)$ er periodisk hvis det finnes et reelt tall $T > 0$ slik at

$$g(x + T) = g(x)$$

for alle x i definisjonsmengden til g . For funksjonen $f(x)$ i oppgaven kan det ikke finnes noen slik positiv T som oppfyller dette kravet siden definisjonsmengden til f er begrenset. Vi har at 6 er i definisjonsmengden til f , men $6 + T$ er ikke i definisjonsmengden hvis $T > 0$. Dermed kan ikke

$$f(6 + T) = f(6)$$

Dersom vi endrer definisjonsmengden til f slik at den er definert på hele mengden av reelle tall, så blir f periodisk. Vi regner ut at

$$\begin{aligned} f(x + 2) &= \sin(\pi(x + 2)) + \sin(2\pi(x + 2)) \\ &= \sin(\pi x + 2\pi) + \sin(2\pi x + 4\pi) \\ &= \sin(\pi x) + \sin(2\pi x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Dette viser at perioden er høyst 2.

Når vi erstatter x i en funksjon med $x + T$, translateres grafen T enheter til venstre. At $f(x + T) = f(x)$ for alle x i definisjonsmengden, betyr at grafen til f dekker seg selv perfekt etter translasjon T enheter til venstre.

Av grafen i oppgave a), ser vi at grafen må translateres minst 2 enheter langs x -aksen før den ser lik ut, så perioden er minst 2. Dermed må perioden være akkurat 2, siden vi så tidligere at den også er høyst 2.

Svar: Perioden er 2 for funksjonen med utvidet definisjonsmengde.

c)

Vis at

$$f(x) = \sin(\pi x)(1 + 2\cos(\pi x))$$

Løsningsforslag c)

Siden $\sin(2\pi x) = 2\sin(\pi x)\cos(\pi x)$ følger det at

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\pi x) + \sin(2\pi x) = \sin(\pi x) + 2\sin(\pi x)\cos(\pi x) \\ &= \sin(\pi x)(1 + 2\cos(\pi x)), \end{aligned}$$

som er det vi ønsket å vise.



d)

Bruk uttrykket i oppgave c) til å bestemme nullpunktene til f ved regning når $x \in [0, 2]$.

Løsningsforslag d)

Nullpunktene til en funksjon $f(x)$ er nøyaktig de verdiene for x som gjør at $f(x) = 0$.
Altså må nullpunktene tilfredsstille

$$f(x) = \sin(\pi x)(1 + 2\cos(\pi x)) = 0,$$

som betyr at

$$\sin(\pi x) = 0 \text{ eller } 1 + 2\cos(\pi x) = 0.$$

For x -verdiene betyr dette at

$$x \in \mathbb{Z}$$

eller

$$\pi x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{2}{3} + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

Nullpunktene til $f(x)$ i intervallet $[0, 2]$ er altså

$$\{0, 1, 2\} \cup \left\{\frac{2}{3}\right\} \cup \left\{\frac{4}{3}\right\},$$

som kan skrives

$$\left\{0, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, 2\right\}.$$

Svar:

$$\left\{0, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, 2\right\}.$$



Oppgave 3 (5 poeng) Nettkode: E-4DAU

Vi lar K være kapitalen i et fond t år etter første innskudd. Hvert år setter vi inn 20 000 kroner i fondet. Avkastningen i fondet er 8 % per år.

Kapitalen i fondet vokser slik differensiallikningen nedenfor viser

$$K'(t) = 0,08 \cdot K(t) + 20\,000$$

a)

Løs differensiallikningen. Finn et uttrykk for $K(t)$ når $K(0) = 20\,000$.

Løsningsforslag a)

Ved å benytte omskrivingen

$$K'(t) = 0,08K(t) + 20000 = 0,08(K(t) + 250000) \Rightarrow \frac{K'(t)}{K(t)+250000} = 0,08,$$

kan vi integrere med hensyn på t på begge sider og få

$$\int \frac{K'(t)dt}{K(t)+250000} = 0,08 \int dt.$$

Mens høyresiden kan skrives

$$0,08 \int dt = 0,08t + C_1$$

for en konstant C_1 , kan venstresiden løses ved å bruke substitusjonsmetoden med substitusjonen $K = K(t)$. Det gir

$$\int \frac{K'(t)dt}{K(t)+250000} = \int \frac{dK}{K+250000},$$

og siden den deriverte av $\ln(K + 250000)$ er $\frac{1}{K+250000}$ må

$$\int \frac{dK}{K+250000} = \ln(K + 250000) + C_2$$

for en konstant C_2 . Dette kan også ses ved å gjenta substitusjonsmetoden med substitusjonen $u(K) = K + 250000$. Vi har uansett funnet at

$$\ln(K(t) + 250000) + C_2 = 0,08t + C_1,$$

som ved å kombinere de to konstantene C_1 og C_2 til én konstant $C = C_1 - C_2$ kan skrives

$$\ln(K(t) + 250000) = 0,08t + C.$$

Siden $K(0) = 20000$ følger det videre at

$$\ln(K(0) + 250000) = 0,08 \cdot 0 + C \Rightarrow C = \ln(20000 + 250000) = \ln(270000).$$

Altså er den spesielle løsningen av likningen gitt av



$$\ln(K(t) + 250000) = 0,08t + \ln(270000).$$

Fra omskrivingen

$$\begin{aligned}\ln(K(t) + 250000) &= 0,08t + \ln(270000) \\ \Rightarrow K(t) + 250000 &= e^{0,08t + \ln(270000)} \\ \Rightarrow K(t) &= e^{\ln(270000)} e^{0,08t} - 250000 \\ \Rightarrow K(t) &= 270000e^{0,08t} - 250000\end{aligned}$$

ser vi at løsningen også kan skrives

$$\Rightarrow K(t) = 270000e^{0,08t} - 250000,$$

som er den vanlige måten å oppgi funksjoner på.

ALTERNATIV LØSNING

Svar:

$$K(t) = 270000e^{0,08t} - 250000.$$



b)

Bestem størrelsen på kapitalen etter 20 år.

Løsningsforslag b)

Vi skal løse differensiallikningen

$$K'(t) = 0,08K(t) + 20\,000$$

Dette er en lineær 1. ordens differensiallikning. Først ordner vi den slik at den blir på formen

$$K'(t) + f(t)K(t) = g(t)$$

slik at vi kan finne den integrerende faktor. Vår likning blir slik:

$$K'(t) - 0,08K(t) = 20\,000.$$

Integrerende faktor er e opphøyd i en antiderivert til $-0,08$. Vi bruker $e^{-0,08t}$ og multipliserer begge sider med integrerende faktor. Det gir

$$K'(t)e^{-0,08t} - 0,08K(t)e^{-0,08t} = 20\,000e^{-0,08t}$$

Metoden med integrerende faktor sikrer at venstresiden er den deriverte av produktet av K og integrerende faktor. Dermed har vi

$$(K(t)e^{-0,08t})' = 20\,000e^{-0,08t}$$

Integrasjon av begge sider med hensyn på t gir

$$K(t)e^{-0,08t} = \frac{20\,000}{-0,08}e^{-0,08t} + C = -250\,000e^{-0,08t} + C$$

Vi multipliserer med $e^{0,08t}$ på begge sider og får

$$K(t) = Ce^{0,08t} - 250\,000$$

Siden $K(0) = Ce^0 - 250\,000 = C - 250\,000 = 20\,000$, må $C = 270\,000$. Løsningen på initialverdiproblemet er derfor

$$K(t) = 270\,000e^{0,08t} - 250\,000$$

For $t = 20$ etter første innskudd får vi at

$$K(20) = 270\,000e^{0,08 \cdot 20} - 250\,000 \approx 1\,087\,319$$

Altså størrelsen på kapitalen er rundt 1 087 319 kroner 20 år etter første innskudd.

Svar: Størrelsen på kapitalen er rundt 1 087 319 kroner 20 år etter første innskudd.



c)

Hvor lang tid vil det gå før fondet øker med 35 000 kroner per år ifølge modellen ovenfor?

Løsningsforslag c)

Fondets økning per år kan, som nesten alltid er tilfellet når det er snakk om endring, representeres som den deriverte av kapitalen med hensyn på tid. Altså representerer

$$\begin{aligned}K'(t) &= (270000e^{0,08t} - 250000)' = 270000 (e^{0,08t})' \\&= 270000 (0,08t)' e^{0,08t} = 270000 \cdot 0,08 \cdot e^{0,08t} \\&= 21600e^{0,08t}\end{aligned}$$

økningen av fondet per år. Tiden det vil ta før fondet øker med 35000 kroner per år er altså den verdien for t som tilfredsstiller

$$21600e^{0,08t} = 35000.$$

Det betyr at

$$\begin{aligned}21600e^{0,08t} &= 35000 \\ \Rightarrow e^{0,08t} &= \frac{35000}{21600} \\ \Rightarrow 0,08t &= \ln \frac{35000}{21600} \\ \Rightarrow t &= \frac{1}{0,08} \ln \frac{35000}{21600} \approx 6,0.\end{aligned}$$

Altså tar det omlag seks år før fondet øker med 35000 per år ifølge modellen.

Svar: Ca. seks år.



Oppgave 4 (6 poeng) Nettkode: E-4DAY

En uendelig, geometrisk rekke er gitt ved

$$S(x) = 1 + x + x^2 + \dots$$

Når $x \in \langle -1, 1 \rangle$, er $S(x) = \frac{1}{1-x}$

Det kan vises at $\int 1dx + \int xdx + \int x^2dx + \dots = \int \frac{1}{1-x}dx$

a)

Forklar at

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots = -\ln(1-x) + C$$

Begrunn at

$$C = 0$$

Løsningsforslag a)

For å løse denne oppgaven, må først oppgaveteksten presiseres litt. Oppgaveteksten hevder at for $-1 < x < 1$, er

$$\int 1dx + \int xdx + \int x^2dx + \int x^3dx + \dots = \int \frac{1}{1-x} dx.$$

Hvert ubestemt integral på venstresiden har imidlertid med seg en konstant, så venstresiden inneholder en uendelig sum av vilkårlige konstanter. Det er ingen kontroll på at denne rekken konvergerer, og det gjør utsagnet uklart.

Det som er sant, og som er akkurat det vi trenger for å løse oppgaven, er at for $-1 < x < 1$, er

$$\int_0^x 1 dt + \int_0^x t dt + \int_0^x t^2 dt + \dots = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \quad (1)$$

For hver verdi av x er nå rekken på venstre side en rekke der hvert ledd er et reelt tall. Utsagnet påstår at når vi velger en x med tallverdi mindre enn 1 og regner ut begge sider av (1), så får vi samme resultat.

Generelt har vi at for $n \neq -1$ er

$$\int_0^x t^n dt = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^x = \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$

Dermed blir venstresiden av likheten (1)

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

Høyresiden av (1) blir

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = [-\ln |1-t|]_0^x = -\ln(1-x)$$

Til sammen viser dette alt som skal vises i oppgaven. Likheten som skal vises stemmer for $C = 0$.



b)

Sett inn $x = \frac{1}{2}$ og vis at $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots = \ln 2$

Løsningsforslag b)

Ved å sette inn $x = \frac{1}{2}$ i uttrykket fra oppgave a) finner vi

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2.$$

Det kan vi skrive som

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots = \ln 2,$$

som er det vi ønsket å vise.

c)

Det generelle leddet i rekken ovenfor er $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n}$.

Det kan vises at de åtte første desimalene i $\ln 2$ er 0,69314718.

Dersom vi summerer de n første leddene $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ i rekken i oppgave b), får vi en

tilnærmingsverdi for $\ln 2$.

Hvor mange ledd må vi minst ta med for at vi skal få 6 korrekte desimaler?

Løsningsforslag c)

Vi begynner med å endre instillingene i geoGebra slik at tall rundes av med ti desimalers nøyaktighet. Dette gjør vi ved å gå inn på "Innstillinger", trykke på "Avrunding" og deretter på "10 desimaler". Ved å systematisk prøve forskjellige verdier for M med kommandoen

`Sum[(1/n)*(1/2^n), n, 1, M]`

i CAS finner vi at

`Sum[(1/n)*(1/2^n), n, 1, 18]`

gir ≈ 0.69314699 , mens

`Sum[(1/n)*(1/2^n), n, 1, 19]`

gir ≈ 0.69314701 . Altså må minst 19 ledd tas med for å få 6 korrekte desimaler.

Svar: 19 ledd må tas med.



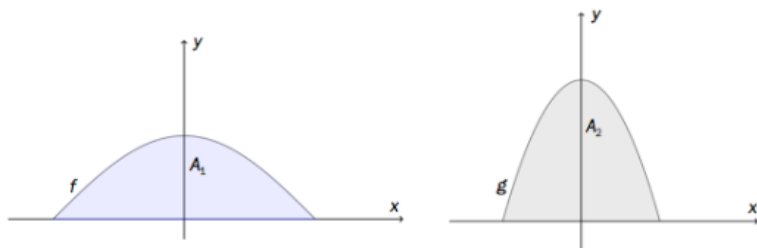
Oppgave 5 (7 poeng) Nettkode: E-4DB3

Funksjonene f og g er gitt ved

$$f(x) = \cos x$$

$$g(x) = 1 - k^2 \cdot x^2, \quad k > 0$$

Skisser av grafene til f og g er tegnet nedenfor.



a)

Bestem nullpunktene til g uttrykt ved k .

Løsningsforslag a)

Siden nullpunktene til g er nøyaktig de verdiene for x som tilfredsstiller

$$1 - k^2 x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{k^2}$$

må de være gitt av

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{k^2}} = \pm \frac{1}{k}.$$

ALTERNATIV LØSNING

Svar: $x = \pm \frac{1}{k}$



b)

Bestem k slik at arealene A_1 og A_2 på figurene ovenfor er like store.

Løsningsforslag b)

Nullpunktene til $f(x)$ er nøyaktig de verdiene for x som tilfredsstiller

$$f(x) = \cos x = 0.$$

Med andre ord er de to nullpunktene som ligger nærmest $x = 0$ gitt av $x = \pm \frac{\pi}{2}$. Arealet A_1 under grafen til f mellom disse nullpunktene dermed gitt som

$$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx,$$

og siden den deriverte av $\sin x$ er $\cos x$ følger det at

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx &= [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

Arealet A_2 under grafen til g mellom nullpunktene $\pm 1/k$ er på tilsvarende måte gitt som

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} (1 - k^2 x^2) dx = \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} 1 dx - k^2 \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} x^2 dx \\ &= [x]_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} - k^2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{1}{k} - \left(-\frac{1}{k}\right) \right) - k^2 \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{k}\right)^3 - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{k}\right)^3 \right) \\ &= \left(2\frac{1}{k} \right) - \frac{2}{3} k^2 \left(\frac{1}{k}\right)^3 = \left(2 - \frac{2}{3} \right) \frac{1}{k} = \frac{4}{3} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Den verdien for k som gjør at arealene A_1 og A_2 er like må altså tilfredsstille

$$A_1 = 2 = \frac{4}{3} \frac{1}{k} = A_2.$$

Det er bare én verdi for k som tilfredsstiller denne likningen, og det er

$$k = \frac{1}{2} \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Svar: $k = \frac{2}{3}$.



c)

Bruk formelen $\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$ til å vise at

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \quad (*)$$

Løsningsforslag c)

Ved å sette inn for $u = x$ og $v = x$ i formelen (*) finner vi at

$$\cos(x + x) = \cos(2x) = \cos(x) \cos(x) - \sin(x) \sin(x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Siden Pytagoras læresetning krever at $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ har vi videre at

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1.$$

Med andre ord har vi funnet at

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1,$$

som kan skrives

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}.$$



d)

Når vi dreier flatestykket med arealet A_1 360° om x-aksen, får vi et omdreiningslegeme med volum V_1 .

Bruk formelen (*) i oppgave c) til å bestemme et eksakt uttrykk for V_1 ved regning.

Løsningsforslag d)

Arealet under grafen til f finner vi ved å summere uendelig mange, uendelig tynne rektangler med høyde $f(x)$ og bredde dx . På tilsvarende måte kan vi dele opp volumet av omdreiningslegemet i uendelig mange, uendelig tynne sylindere med radius $f(x)$ og høyde dx . Volumet av en slik sylinder er da $\pi(f(x))^2 dx$. Volumet V_1 av omdreiningslegemet kan vi skrive som integralet av alle disse sylindrerene. Altså må

$$V_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi(f(x))^2 dx = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx.$$

Ved å bruke formelen (*) finner vi da at

$$\begin{aligned} \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx &= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx + \frac{1}{2} \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \\ &= \frac{1}{2} \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx + \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Ved enten å se at den deriverte av $\frac{1}{2} \sin 2x$ er $\cos 2x$ eller ved å bruke substitusjonsmetoden med substitusjonen $u(x) = 2x$, følger det at

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx &= \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin \left(2 \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(-2 \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \sin(\pi) - \sin(-\pi) = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Altså er volumet V_1 av omdreiningslegemet

$$V_1 = \frac{1}{2} \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx + \frac{\pi^2}{2} = \frac{1}{2} \pi \cdot 0 + \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Svar: $V_1 = \frac{\pi^2}{2}$



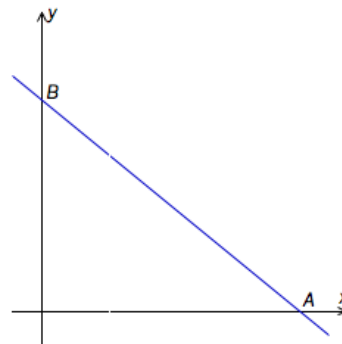
Oppgave 6 (7 poeng) Nettkode: E-4DBA

En rett linje i planet skjærer koordinataksene i $A(a, 0)$ og $B(0, b)$. Se skissen nedenfor.

a)

Vis at likningen til linjen kan skrives

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$



Løsningsforslag a)

Den rette linjen som går gjennom punktene $A(a, 0)$ og $B(0, b)$ må ha stigningstall lik

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0 - b}{a - 0} = -\frac{b}{a}.$$

Siden linjen skjærer y -aksen i punktet $B(0, b)$ følger det videre at konstantleddet er lik $y_B = b$. Vi har altså funnet at likningen for den rette linjen som går gjennom A og B er gitt ved

$$y(x) = -\frac{b}{a}x + b.$$

Alternativ løsning:

Siden A og B har forskjellige x -verdier kan den rette linjen skrives $y(x) = C_1x + C_2$ der C_1 og C_2 er konstanter. At linjen går gjennom punktet $A(a, 0)$ betyr at konstantene C_1 og C_2 må tilfredsstille

$$y(a) = C_1a + C_2 = 0.$$

Tilsvarende kan vi kreve at linjen skal gå gjennom punktet $B(0, b)$ ved å sette

$$y(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2 = b.$$

Dette gir likningssettet

$$(I). \quad C_1a + C_2 = 0$$

$$(II). \quad C_2 = b.$$

Siden vi allerede vet at $C_2 = b$ følger det imidlertid at



$$C_1 a + b = 0 \implies C_1 = -\frac{b}{a}.$$

Altså kan likningen til den rette linjen som går gjennom punktene A og B skrives

$$y(x) = -\frac{b}{a}x + b.$$

b)

Vis at dette også kan skrives

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Løsningsforslag b)

Fra oppgave a) har vi at

$$y = -\frac{b}{a}x + b.$$

Ved å legge til $\frac{b}{a}x$ på begge sider av likhetstegnet kan vi skrive dette som

$$y + \frac{b}{a}x = b,$$

og ved å multiplisere begge sider av likningen med $\frac{1}{b}$ følger det at

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1,$$

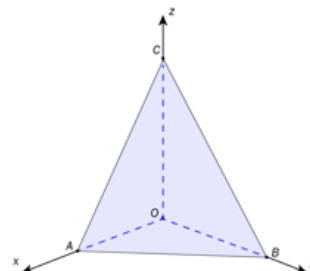
som er det vi ønsket å vise.

c)

Et plan α i rommet skjærer koordinataksene i $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ og $C(0, 0, c)$.

Vis at normalvektoren til planet α er

$$\vec{n} = [bc, ac, ab]$$



Løsningsforslag c)

Siden $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ og $C(0, 0, c)$ ligger i α er vektorene

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [0, b, 0] - [a, 0, 0] = [-a, b, 0]$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = [0, 0, c] - [a, 0, 0] = [-a, 0, c]$$

vektorer mellom punkter i α . Altså må vektoren

$$\begin{aligned}\vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} \vec{e}_x - \begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & c \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_z \\ &= bc\vec{e}_x - (-ac)\vec{e}_y + ab\vec{e}_z = [bc, ac, ab]\end{aligned}$$

stå normalt på alle vektorer mellom punkter i α . Med andre ord kan vi definere normalvektoren

$$\vec{n} = [bc, ac, ab],$$

som er det vi ønsket å vise. Legg merke til at det finnes uendelig mange normalvektorer. For alle $C \neq 0$ er nemlig Cn også en normalvektor.

Alternativ løsning:

Hvis vi klarer å finne konstanter C_1 , C_2 og C_3 slik at

$$C_1x + C_2y + C_3z + 1 = 0$$

er likningen for planet α kan vi skrive velge normalvektoren som en konstant multiplisert med $\vec{n}_0 = [C_1, C_2, C_3]$. At punktene $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ og $C(0, 0, c)$ ligger i α gir følgende sett av likninger:

$$(I) \quad C_1a + 1 = 0 \implies C_1 = -\frac{1}{a}$$

$$(II) \quad C_2b + 1 = 0 \implies C_2 = -\frac{1}{b}$$

$$(III) \quad C_3c + 1 = 0 \implies C_3 = -\frac{1}{c}.$$

Altså er likningen til planet gitt som

$$-\frac{1}{a}x - \frac{1}{b}y - \frac{1}{c}z + 1 = 0.$$

Ved å multiplisere begge sider av likhetstegnet med $-abc$ følger det at likningen for planet α kan skrives

$$bcx + acy + abz - abc = 0.$$

Normalvektoren kan altså velges til å være

$$\vec{n} = [bc, ac, ab],$$

som er det vi ønsket å vise.



d)

Vis at likningen til α kan skrives

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Løsningsforslag d)

Siden punktet $A(a, 0, 0)$ ligger i α og $\vec{n} = [bc, ac, ab]$ kan velges som normalvektor til planet må alle punkter $P(x, y, z)$ i α tilfredsstille

$$\vec{n} \cdot \vec{AP} = [bc, ac, ab] \cdot [x - a, y, z] = 0.$$

Altså er likningen for planet gitt av

$$bcx + acy + abz - abc = 0$$

og ved å multiplisere begge sider av likhetstegnet med $\frac{1}{abc}$ finner vi at

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

som er det vi ønsket å vise.

Alternativ løsning:

Vi må finne konstanter C_1 , C_2 og C_3 slik at

$$C_1x + C_2y + C_3z + 1 = 0$$

er likningen til det planet α som punktene $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ og $C(0, 0, c)$ er en del av. At A ligger i α betyr at $C_1a + 1 = 0$ og derfor $C_1 = -\frac{1}{a}$. Siden B ligger i α må $C_2b + 1 = 0$ som betyr at $C_2 = -\frac{1}{b}$ og at C ligger i α betyr at $C_3 = -\frac{1}{c}$. Vi har med andre ord funnet at likningen for planet α kan skrives

$$-\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + 1 = 0,$$

som ved å multiplisere begge sider med -1 og deretter legge til én på begge sider kan skrives

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



e)

Planet β skjærer x -aksen i $D(5, 0, 0)$ og y -aksen i $E(0, 4, 0)$. Planet er parallelt med z -aksen.

Forklar hvordan vi kan bruke resultatet i oppgave d) til å bestemme likningen for planet β .

Løsningsforslag e)

Fra oppgave d) har vi at ethvert plan som skjærer x -aksen i $x = a$, y -aksen i $y = b$ og z -aksen i $z = c$ har likning

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Siden planet β skjærer x - og y -aksen i henholdsvis 5 og 4 må $a = 5$ og $b = 4$. Det betyr at likningen for β er gitt av

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{c} = 1.$$

Siden planet β er parallell med z -aksen kan det ikke finnes noe punkt i β som også er på z -aksen. Et slikt skjæringspunkt mellom z -aksen og planet β må altså befinne seg uendelig langt borte – i $z = \infty$. Det betyr at c må være et uendelig stort tall, som videre betyr at $\frac{1}{c}$ må være et uendelig lite tall. Med andre ord er likningen for planet β gitt av

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{c} \right) = \frac{x}{5} + \frac{y}{4} + 0 \cdot z = \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1.$$

Svar:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$$

