REA3024 2013 Høst

Eksamenstid:
5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler

Del 2:
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.

- Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng) Nettkode: E-4D9R

Deriver funksjonene

a)
$f(x) = 5x \cos\ x$

b)
$g(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$

Oppgave 2 (3 poeng) Nettkode: E-4D9U

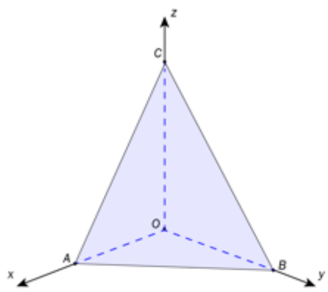
Bestem integralene

a)
$\int_0^1 2e^{2x}\, \mathrm{dx}$

b)
$\int 2x \cdot e^x\, \mathrm{dx}$

Oppgave 3 (5 poeng) Nettkode: E-4D9Y

Gitt punktene $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 4)$ og $O(0, 0, 0)$.



a)
Bestem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

b)
Bestem volumet av tetraederet $ABCO$.

c)
Punktene A, B og C ligger i planet α.

Vis at likningen til planet α kan skrives

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$

Oppgave 4 (4 poeng) Nettkode: E-4DA2

a)
En rekke er gitt ved

$$1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + \ldots$$

Forklar at dette er en konvergent, geometrisk rekke. Bestem summen av den uendelige rekken.

b)
En geometrisk rekke er gitt ved

$$1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \ldots$$

Bestem konvergensområdet og summen av rekken.

Oppgave 5 (2 poeng) Nettkode: E-4DAD

Antall individer i en populasjon etter t timer kan beskrives av funksjonen $N(t)$.

Vi antar at

$N'(t) = 4t + 3$ og $N(0) = 800$

Bestem antall individer i populasjonen etter 10 h.

Oppgave 6 (4 poeng) Nettkode: E-4DAG

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{5}{2}x \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

a)
Bestem koordinatene til eventuelle vendepunkter på grafen til f.

b)
Bestem likningen for eventuelle vendetangenter på grafen til f.

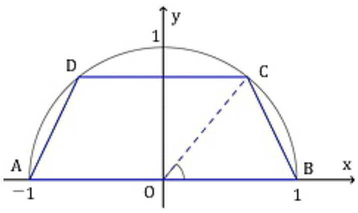
Oppgave 7 (3 poeng) Nettkode: E-4DAJ

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng) Nettkode: E-4DAM



Figuren ovenfor viser et trapes $ABCD$ som er innskrevet i en halvsirkel med radius 1.

a)
Forklar at arealet F av trapeset er gitt ved

$$F(v) = (1 + \cos v)\sin v$$

Hvilke verdier kan v ha?

b)
Bestem $\angle v$ ved regning slik at arealet av trapeset blir størst mulig.

Bestem arealet av det største trapeset.

Oppgave 2 (7 poeng) Nettkode: E-4DAP

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x) \quad , \quad x \in [0, 6]$$

a)
Tegn grafen til f.

b)
Bruk grafen til å vise at f er en periodisk funksjon, og bestem perioden til f.

c)
Vis at

$$f(x) = \sin(\pi x)(1 + 2\cos(\pi x))$$

d)
Bruk uttrykket i oppgave c) til å bestemme nullpunktene til f ved regning når $x \in [0, 2]$.

Oppgave 3 (5 poeng) Nettkode: E-4DAU

Vi lar K være kapitalen i et fond t år etter første innskudd. Hvert år setter vi inn 20 000 kroner i fondet. Avkastningen i fondet er 8 % per år.

Kapitalen i fondet vokser slik differensiallikningen nedenfor viser

$K'(t) = 0{,}08 \cdot K(t) + 20\,000$

a)
Løs differensiallikningen. Finn et uttrykk for $K(t)$ når $K(0) = 20\,000$.

b)
Bestem størrelsen på kapitalen etter 20 år.

c)
Hvor lang tid vil det gå før fondet øker med 35 000 kroner per år ifølge modellen ovenfor?

Oppgave 4 (6 poeng) Nettkode: E-4DAY

En uendelig, geometrisk rekke er gitt ved

$S(x) = 1 + x + x^2 + \ldots$

Når $x \in \langle -1,\ 1\rangle$, er $S(x) = \frac{1}{1-x}$

Det kan vises at $\int 1\mathrm{dx} + \int x\mathrm{dx} + \int x^2\,\mathrm{dx} + \ldots = \int \frac{1}{1-x}\mathrm{dx}$

a)
Forklar at

$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots = -\ln(1-x) + C$

Begrunn at

$C = 0$

b)
Sett inn $x = \frac{1}{2}$ og vis at $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \ldots = \ln 2$

c)
Det generelle leddet i rekken ovenfor er $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n}$.

Det kan vises at de åtte første desimalene i $\ln 2$ er $0{,}69314718$.

Dersom vi summerer de n første leddene $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ i rekken i oppgave b), får vi en

tilnærmingsverdi for $\ln 2$.

Hvor mange ledd må vi minst ta med for at vi skal få 6 korrekte desimaler?

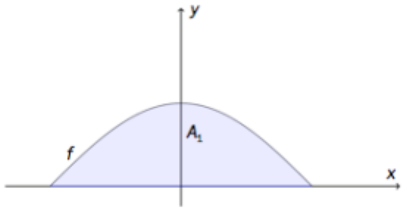
Oppgave 5 (7 poeng) Nettkode: E-4DB3

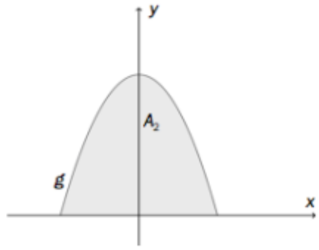
Funksjonene f og g er gitt ved

$f(x) = \cos x$

$g(x) = 1 - k^2 \cdot x^2 \,, \quad k > 0$

Skisser av grafene til f og g er tegnet nedenfor.





a)
Bestem nullpunktene til g uttrykt ved k.

b)
Bestem k slik at arealene A_1 og A_2 på figurene ovenfor er like store.

c)
Bruk formelen $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$ til å vise at

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \qquad (*)$$

d)
Når vi dreier flatestykket med arealet A_1 360° om x-aksen, får vi et omdreiningslegeme med volum V_1.

Bruk formelen $(*)$ i oppgave c) til å bestemme et eksakt uttrykk for V_1 ved regning.

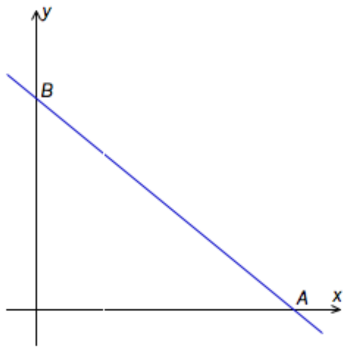
Oppgave 6 (7 poeng) Nettkode: E-4DBA

En rett linje i planet skjærer koordinataksene i $A\,(a,\ 0)$ og $B\,(0,\ b)$. Se skissen nedenfor.

a)

Vis at likningen til linjen kan skrives

$y = -\frac{b}{a}x + b$



b)

Vis at dette også kan skrives

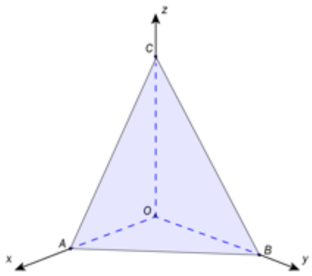
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

c)

Et plan α i rommet skjærer koordinataksene i $A\,(a,\ 0,\ 0)$, $B\,(0,\ b,\ 0)$ og $C\,(0,\ 0,\ c)$.

Vis at normalvektoren til planet α er

$\vec{n} = [bc,\ ac,\ ab]$



d)

Vis at likningen til α kan skrives

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

e)

Planet β skjærer x-aksen i $D\,(5,\ 0,\ 0)$ og y-aksen i $E\,(0,\ 4,\ 0)$. Planet er parallelt med z-aksen.

Forklar hvordan vi kan bruke resultatet i oppgave d) til å bestemme likningen for planet β.