



www.matematikk.org

Eksamensoppgavesettet er utarbeidet av Utdanningsdirektoratet. Avvik fra det originale eksamenssettet er eventuelle spesifiseringer og illustrasjoner. Løsningsforslagene i sin helhet er utarbeidet av matematikk.org.

Nettkoden som står til høyre for oppgavetittelen brukes i søkefeltet på www.matematikk.org for å åpne oppgaven og se utfyllende løsningsforslag.

Våre samarbeidspartnere:



REA3022 2016 HØST



Eksamenstid

5 timer:

Del 1 skal leveres inn etter 3 timer.

Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler på Del 1

Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler

Hjelpemidler på Del 2

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte

Del 1 har 8 oppgaver. Del 2 har 5 oppgaver.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.

Veiledning om vurderingen

Poeng i del 1 og del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger

Kilder for bilder, tegninger osv.

- Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet



DEL 1 uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng) [Nettkode: E-4P1K](#)

Deriver funksjonene

a)

$$f(x) = 2x^2 - 5x - 6$$

Løsningsforslag a)

Vi kan finne den deriverte ved å derivere hvert av leddene og summere. Da får vi

$$f'(x) = (2x^2 - 5x - 6)' = (2x^2)' - (5x)' - (6)'$$

Vi bruker derivasjonsreglene til den deriverte av en potensfunksjon, som gir at $(ax^n)' = nax^{n-1}$ og at den deriverte av en konstant er 0. Da kan vi skrive

$$(2x^2)' - (5x)' - (6)' = 2 \cdot 2x^1 + (-5) = 4x - 5$$

Svar: $f'(x) = 4x - 5$

b)

$$g(x) = x \ln x$$

Løsningsforslag b)

Vi kan bruke produktregelen for å derivere funksjonen

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Vi setter $u = x$ og $v = \ln x$. Da blir

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x \cdot \ln x)' \\ &= (u \cdot v)' \\ &= u' \cdot v + u \cdot v' \\ &= (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' \\ &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \\ &= \ln x + 1 \end{aligned}$$

Svar: $g'(x) = \ln x + 1$



c)

$$h(x) = \frac{e^{2x}}{x-3}$$

Løsningsforslag c)

Vi bruker brøkregelen for derivasjon med $u = e^{2x}$ og $v = x - 3$.

Da får vi

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{e^{2x}}{x-3} \right)' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \\ &= \frac{(e^{2x})' \cdot (x-3) - (e^{2x}) \cdot (x-3)'}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

Telleren e^{2x} er en sammensatt funksjon. Vi lar $f(x) = e^{2x}$, og velger $z = 2x$ som kjerne,

$$f(x) = e^z \text{ der } z = 2x.$$

$$(e^z)' = e^z \text{ og } z' = 2.$$

Av kjerneregelen får vi

$$f'(x) = e(z)' \cdot z' = (e^z) \cdot z' = e^z \cdot 2 = 2e^{2x}$$

Nå kan vi derivere alle leddene i brøken over og da kan vi regne ut

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(e^{2x})' \cdot (x-3) - (e^{2x}) \cdot (x-3)'}{(x-3)^2} \\ &= \frac{2e^{2x} \cdot (x-3) - e^{2x} \cdot 1}{(x-3)^2} \\ &= \frac{2e^{2x} - 6e^{2x} - e^{2x}}{(x-3)^2} \\ &= \frac{2e^{2x} - 7e^{2x}}{(x-3)^2} \\ &= \frac{e^{2x}(2x-7)}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

$$\textbf{Svar: } h'(x) = \frac{e^{2x}(2x-7)}{(x-3)^2}$$



Oppgave 2 (5 poeng) Nettkode: E-4P2H

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = (x + 1)^2(x - 2)$$

a)

Bestem nullpunktene til f .

Løsningsforslag a)

Vi vil finne ut når hver av faktorene til $f(x)$ er lik 0.

$$f(x) = (x + 1)^2(x - 2) = (x + 1)(x + 1)(x - 2)$$

Faktorene til f er $(x + 1)$ og $(x - 2)$.

Den første faktoren $(x + 1) = 0$ når $x = -1$, og den andre faktoren, $(x - 2) = 0$ når $x = 2$. Da har vi at $f(x) = 0$ når $x = -1$ og når $x = 2$

Svar: Nullpunktene er $(-1, 0)$ og $(2, 0)$

b)

Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f .

Løsningsforslag b)

Vi begynner med å derivere $f(x)$. Da kan vi bruke produktregelen, med $u = (x + 1)^2$ og $v = x - 2$. Da får vi

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x + 1)^2(x - 2))' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \\ &= ((x + 1)^2)' \cdot (x - 2) + (x + 1)^2 \cdot (x - 2)' \end{aligned}$$

For å derivere $(x + 1)^2$ kan vi bruke kjerneregelen med $u(x) = x + 1$ som kjerne. Da blir $u'(x) = 1$, og vi får

$$((x + 1)^2)' = (u^2)' \cdot u' = 2u \cdot 1 = 2(x + 1)$$

Vi bruker dette til å regne $f'(x)$

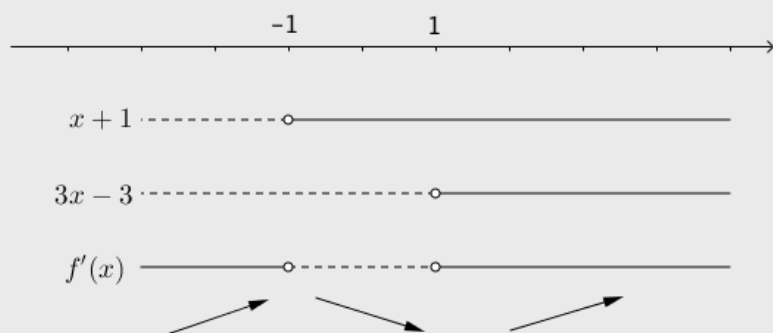
$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x + 1)^2)' \cdot (x - 2) + (x + 1)^2 \cdot (x - 2)' \\ &= 2(x + 1)(x - 2) + (x + 1)^2 \cdot 1 \end{aligned}$$

For å kunne tegne fortegnsskjema må vi faktorisere $f'(x)$



$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2(x+1)(x-2) + (x+1)^2 \\
 &= (x+1)(2x-4) + (x+1)^2 \\
 &= (x+1)((2x-4) + (x+1)) \\
 &= (x+1)(2x-4+x+1) \\
 &= (x+1)(3x-3)
 \end{aligned}$$

$x+1$ er negativ når $x < -1$ og positiv når $x > -1$, og $3x-3$ er negativ når $x < 1$ og positiv når $x > 1$, da får vi fortegnsskjemaet



Når $f'(x)$ er positiv vokser $f(x)$, og når $f'(x)$ er negativ avtar $f(x)$, Så vi har toppunkt når $x = -1$ og bunnpunkt når $x = 1$.

For å finne verdien i topp- og bunnpunkt regner vi ut $f(-1)$ som vi fra deloppgave a) vet at er et nullpunkt, altså er $f(-1) = 0$. For å finne verdien til f i bunnpunktet regner vi ut

$$f(1) = (1+1)^2(1-2) = 4(-1) = -4$$

Svar: $(-1,0)$ er toppunktet og $(1, -4)$ er bunnpunktet til f .

c)

Lag en skisse av grafen til f .

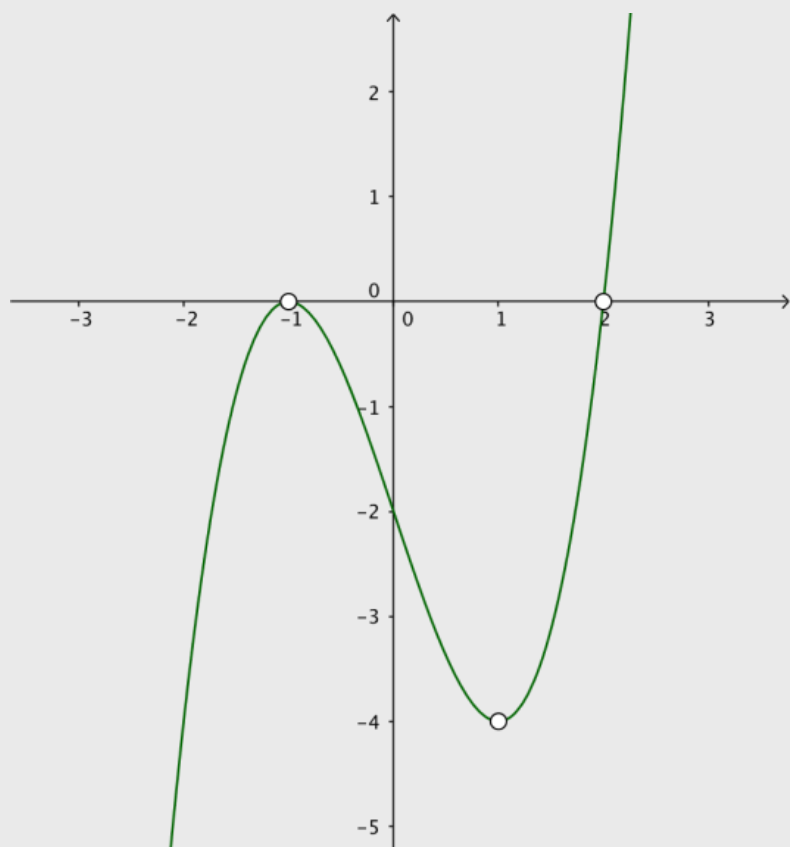
Løsningsforslag c)

Vi kan begynne med å tegne inn punktene vi allerede kjenner fra deloppgave a) og b). Fra a) vet vi at grafen har nullpunkt når $x = -1$ og $x = 2$, så $(-1,0)$ og $(2,0)$ er to punkter på grafen, og fra b) vet vi at $(-1,0)$ er et toppunkt, og at $(1, -4)$ er et bunnpunkt.

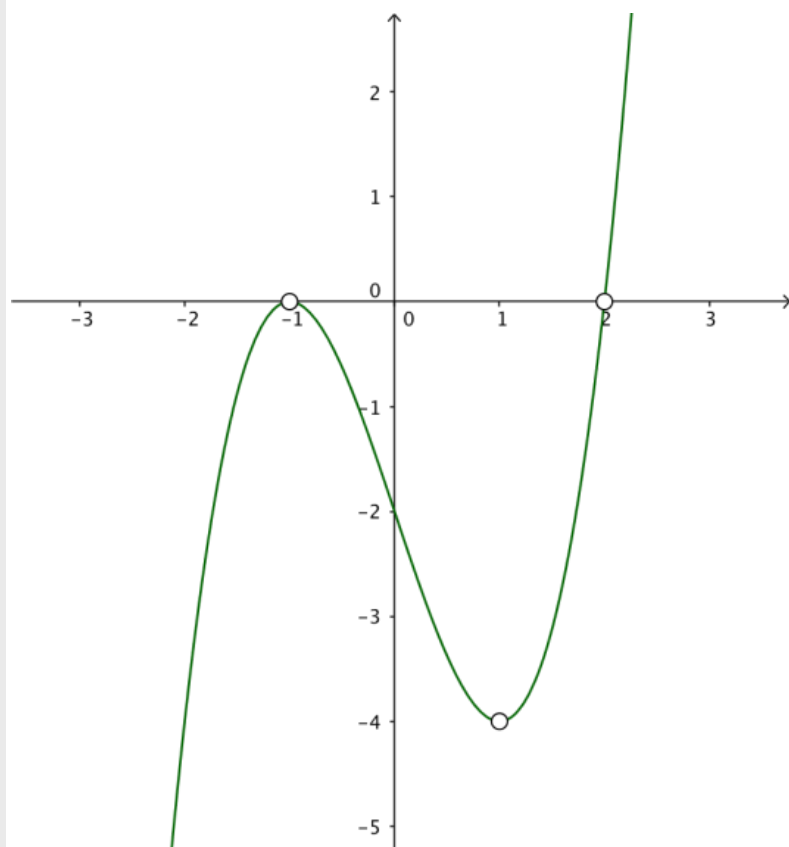
Fortegnsskjemaet vi lagde i b) viser at grafen stiger mot høyre når $x < -1$, og $x > 1$, for $-1 < x < 1$ vil grafen avta.

Vi bruker dette til å skissere grafen





Svar:



Oppgave 3 (3 poeng) Nettkode: E-4P2E

a)

Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{2x+10}{x^2-25} + \frac{x}{x+5} - \frac{4}{2x-10}$$

Løsningsforslag a)

Vi kan begynne med å faktorisere leddene i uttrykket. Da får vi

$$\begin{aligned}\frac{2x+10}{x^2-25} + \frac{x}{x+5} - \frac{4}{2x-10} &= \frac{2(x+5)}{(x+5)(x-5)} + \frac{x}{x+5} - \frac{2 \cdot 2}{2(x-5)} \\ &= \frac{2(x+5)}{(x+5)(x-5)} + \frac{x}{x+5} - \frac{2 \cdot 2}{2(x-5)} \\ &= \frac{2(x+5)}{(x+5)(x-5)} + \frac{x}{x+5} - \frac{2}{x-5}\end{aligned}$$

Da får vi at den minste fellesnevneren er gitt ved

$$(x+5)(x-5)$$

.

Dermed har vi at vi at

$$\begin{aligned}\frac{2x+10}{x^2-25} + \frac{x}{x+5} - \frac{4}{2x-10} &= \frac{2(x+5)}{(x+5)(x-5)} + \frac{x}{x+5} - \frac{2}{x-5} \\ &= \frac{2(x+5)}{(x+5)(x-5)} + \frac{x(x-5)}{(x+5)(x-5)} - \frac{2(x+5)}{(x+5)(x-5)} \\ &= \frac{(2x+10) + (x^2-5x) - (2x+10)}{(x+5)(x-5)} \\ &= \frac{2x+10+x^2-5x-2x-10}{(x+5)(x-5)} \\ &= \frac{x^2+5x}{(x+5)(x-5)} \cdot \frac{x(x+5)}{x(x+5)} \\ &= \frac{x(x+5)}{(x+5)(x-5)} \\ &= \frac{x}{x-5}\end{aligned}$$

Svar: $\frac{x}{x-5}$



b)

Løs ligningen

$$\frac{2x+10}{x^2-25} + \frac{x}{x+5} = \frac{4}{2x-10}$$

Løsningsforslag b)

Vi har at

$$\frac{2x+10}{x^2-25} + \frac{x}{x+5} = \frac{4}{2x-10}$$

kan skrives som

$$\frac{2x+10}{x^2-25} + \frac{x}{x+5} - \frac{4}{2x-10} = 0$$

Fra deloppgave a) har vi at $\frac{2x+10}{x^2-25} + \frac{x}{x+5} - \frac{4}{2x-10} = \frac{x}{x-5}$.

Vi kan da regne ut

$$\frac{x}{x-5} = 0$$

Dette gir oss at $x = 0$.

Svar: $x = 0$



Oppgave 4 (4 poeng) [Nettkode: E-4P25](#)

Løs ligningene

a)

$$2^{3x-2} - 13 = 3$$

Løsningsforslag a)

Vi har

$$2^{3x+2} - 13 = 3$$

$$2^{3x+2} = 16$$

$$2^{3x+2} = 2^4$$

Eksponentene må være lik hverandre, så da kan vi løse ligningen

$$3x + 2 = 4$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$\textbf{Svar: } x = \frac{2}{3}$$

b)

$$(\lg x)^2 + \lg x - 2 = 0$$

Løsningsforslag b)

Vi kan sette $u = \lg x$. Da får vi

$$(\lg x)^2 + \lg x - 2 = u^2 + u - 2 = 0$$

Denne kan vi løse for u ved å bruke abc-formelen. Da har vi at $a = 1$, $b = 1$ og $c = -2$, og vi kan sette inn i formelen

$$u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Da får vi:



$$\begin{aligned}
 u &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\
 &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - (-8)}}{2} \\
 &= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \\
 &= \frac{-1 \pm 3}{2}
 \end{aligned}$$

Da får vi

$$u_1 = \frac{-1+3}{2}$$

og

$$u_2 = \frac{-1-3}{2}$$

Regner vi ut disse ligningen får vi at

$$u_1 = 1 \text{ og } u_2 = -2$$

Vi vil finne løsningene for x så da setter vi inn for u

$$u_1 = \log x_1 = 1$$

Nå kan vi løse denne ligningen med hensyn på x

$$10^{\log x_1} = 10^1$$

$$x_1 = 10$$

og tilsvarende kan vi gjøre for $u_2 = \log x_2$

$$\log x_2 = -2$$

$$10^{\log x_2} = 10^{-2}$$

$$x_2 = \frac{1}{10^2}$$

$$= 0,01$$

Svar: $x_1 = 10$ og $x_2 = 0,01$



Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4P37

I et koordinatsystem har vi punktene $A(-3,2)$, $B(3,4)$ og $C(4,5)$. En linje l går gjennom punktet C og er parallell med AB .

a)

Sett opp en parameterframstilling for l .

Løsningsforslag a)

En parameterframstilling for en rett linje gjennom punktet $A(x_1, y_1)$ som har retningsvektor $[a, b]$ har parameterframstilling

$$l: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{cases}$$

Linjen l skal være parallell med AB , og vil ha samme retningsvektor som $\vec{AB}$. Vi kan finne vektoren fra $A(-3,2)$ til $B(3,4)$ ved

$$\vec{AB} = [3 - (-3), 4 - 2] = [6, 2] = 2[3, 1]$$

Linjen l skal være parallell med $\vec{AB}$ og ha retningsvektor $[3, 1]$. Linjen l skal også gå gjennom punktet $C(4,5)$. Da får vi at parameterframstillingen er

$$l: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 5 + t \end{cases}$$

Svar:

$$l: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 5 + t \end{cases}$$

b)

Linjen l skjærer x -aksen i punktet D .

Bestem koordinatene til D .

Løsningsforslag b)

For at D skal ligge på linja l må det være på formen til parameterframstillingen vi fant i deloppgave a). Linja l krysser x -aksen når $y = 0$. Fra deloppgave a) har vi at $y = 5 + t$, og vi kan regne ut



$$y = 0 \Rightarrow 5 + t = 0 \Rightarrow t = -5$$

Vi setter inn $t = -5$ i uttrykket for x fra deloppgave a) og får

$$x = -4 + (-5) = -9$$

Linja l skjærer x-aksen i $D(-9,0)$.

Svar: $D(-9,0)$

c)

Bestem koordinatene til et punkt E på linjen l slik at $\angle BAE = 90^\circ$.

Løsningsforslag c)

Dersom $\vec{AB}$ står vinkelrett på $\vec{AE}$ er $\vec{AB} \cdot \vec{AE} = 0$. Vi kjenner $A(-3, -2)$ og $B(3, 4)$. E ligger på l så x -koordinaten er på formen $-4 + t$ og y -koordinaten er på formen $5 + t$, dermed må vi ha $E(-4 + t, 5 + t)$. Fra deloppgave a) har vi at $\vec{AB} = [6, 6]$. Vi finner $\vec{AE}$:

$$\vec{AE} = [-4 + t - (-3), 5 + t - (-2)] = [-1 + t, 7 + t]$$

Vi regner ut skalarproduktet av $\vec{AB}$ og $\vec{AE}$

$$\begin{aligned} \vec{BA} \cdot \vec{AE} &= [6, 6] \cdot [-1 + t, 7 + t] \\ &= 6(-1 + t) + (6(7 + t)) \\ &= -6 + 6t + 42 + 6t \\ &= 36 + 12t \end{aligned}$$

$\vec{BA}$ og $\vec{AE}$ skal stå vinkelrett på hverandre så $\vec{BA} \cdot \vec{AE} = 0$. Da får vi at

$$\begin{aligned} 36 + 12t &= 0 \\ 12t &= -36 \\ t &= \frac{-36}{12} \\ t &= -3 \end{aligned}$$

Vektorene står vinkelrett på hverandre når $t = -3$. Vi kan sette inn for $t = -3$ i E . Da får vi at E er punktet

$$(-4 + t, 5 + t) = (-4 + (-3), 5 + (-3)) = (-4 - 3, 5 - 3) = (-7, 2)$$

Svar: $E(-7,2)$



Oppgave 6 (4 poeng) Nettkode: E-4P22

I en fabrikk er det to maskiner, maskin A og maskin B, som produserer samme type nøkler.

- ☐ 4 % av nøklene fra maskin A er defekte.
- ☐ 1 % av nøklene fra maskin B er defekte.
- ☐ Maskin B produserer dobbelt så mange nøkler som maskin A.

a)

En nøkkel blir valgt tilfeldig fra lageret.

Bestem sannsynligheten for at nøkkelen er defekt.

Løsningsforslag a)

Vi kan begynne med å skrive opp den informasjonen vi får gitt i oppgaveteksten. Vi ser på hendelsene

A = "nøkkelen fra maskin A"

B = "nøkkel fra maskin B"

D = "nøkkelen er defekt"

Det første vi får informasjonen om er at 4% av nøklene fra maskin A er defekte, dette forteller oss at gitt at vi har en nøkkel fra maskin A, er sannsynligheten 0,4 for at nøkkelen er defekt altså

$$P(D|A) = 0,04$$

Gitt at vi trekker en nøkkel fra maskin B, er sannsynligheten 0,1 for at nøkkelen er defekt

$$P(D|B) = 0,01$$

Maskin B produserer dobbelt så mange nøkler som maskin A, da blir sannsynligheten for å trekke en nøkkel fra B,

$$P(B) = \frac{2}{3}$$

og sannsynligheten for å trekke en nøkkel fra A

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

Vi skal finne sannsynligheten for at vi trekker en nøkkel som er defekt. Mulighetene vi har er at vi enten trekker en nøkkel fra maskin B og den er defekt, eller vi trekker en nøkkel fra maskin A og den er defekt, altså hendelsene $A \cap D$ og $B \cap D$. Vi kan finne sannsynligheten for disse hendelsene ved å bruke produktregelen. Da får vi at



$$P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D|A) = \frac{1}{3} \cdot 0,04 = \frac{0,04}{3}$$

og

$$P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D|B) = \frac{2}{3} \cdot 0,01 = \frac{0,02}{3}$$

For å finne sannsynligheten for å trekke en defekt nøkkel kan vi bruke addisjonssetningen, og siden disse er disjunkte hendelser, får vi

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = \frac{0,04}{3} + \frac{0,02}{3} = \frac{0,06}{3} = 0,02$$

ALTERNATIV

Svar: Sannsynligheten for at nøkkelen er defekt er 2%.

b)

Det viser seg at den valgte nøkkelen er defekt.

Bestem sannsynligheten for at nøkkelen ble produsert av maskin A.

Løsningsforslag b)

Vi vil finne $P(A|D)$, og fra deloppgave a) kjenner vi $P(D|A)$, $P(A)$ og $P(D)$. Da kan det være nyttig å bruke Bayes' setning som sier

$$P(A|D) = \frac{P(A) \cdot P(D|A)}{P(D)}$$

Nå kan vi sette inn for sannsynligheten vi fant i a). Dette gir

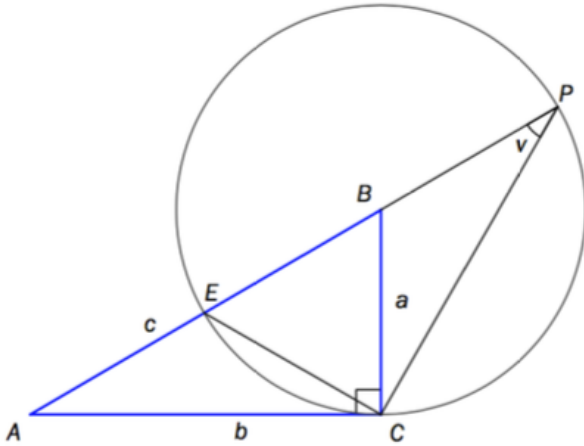
$$P(A|D) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,04}{0,02} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} = 0,67$$

Svar: Sannsynligheten for at nøkkelen er fra A er 67%.



Oppgave 7 (6 poeng) Nettkode: E-4P29

En rettvinklet $\triangle ACB$ med sidelengdene $BC=a$, $AC=b$ og $AB=c$ er gitt. Vi tegner en sirkel med sentrum i B og radius a . Linjen gjennom A og B skjærer sirkelen i E og P . Vi setter $\angle BPC = \nu$. Se figuren nedenfor.



a)

Vis at $\angle ACE = \nu$ og $\triangle ACP \sim \triangle ACE$.

Løsningsforslag a)

Vi skal vise at $\angle ACE = \nu$. Vi kan begynne med å se på $\angle ACP$

Som vi kan se er

$$\angle ACP = \angle ACE + \angle ECP = \angle ACB + \angle BCP$$

Vi har fått oppgitt at $\angle ACB = 90^\circ$, og $\angle ECP$ er en periferivinkel som spenner over samme bue som sentralvinkelen $\angle EBP = 180^\circ$. Dermed er $\angle ECP = 90^\circ$. Da har vi

$$\angle ACP = \angle ACE + 90^\circ = 90^\circ + \angle BCP$$

så $\angle ACE = \angle BCP$.

BC og BP er lik radius til sirkelen, så $\triangle BCP$ er en likebeint trekant. Da er $\angle BPC = \angle BCP = \nu$, og da må også $\angle ACE = \nu$.

$\triangle ACP \sim \triangle ACE$ dersom vi har to parvis like vinkler. $\angle CAE = \angle CAP$ er felles i trekantene, og vi har vist at $\angle ACE = \angle APC = \nu$. Da har vi to parvis like vinkler, og da må også den siste vinkelen være lik i de to trekantene, og $\triangle ACP \sim \triangle ACE$.

Svar: Vi har to parvise like store vinkler, så da er trekantene formlike.



b)

Forklar at $AE = c - a$, og at $AP = c + a$.

Løsningsforslag b)

Vi begynner med å se på AE . Lengden vil være

$$AE = AB - BE$$

AB har vi fått oppgitt at er lik c . BE er lik radius til sirkelen, så BE må være lik $BC = a$. Setter vi inn dette i uttrykket for AE over får vi

$$AE = AB - BE = c - a$$

På tilsvarende måte kan vi skrive

$$AP = AB + BP$$

Også BP er lik radius, så $BP = a$, og $AB = c$, så da har vi

$$AP = AB + BP = c + a$$

c)

Bruk formlikheten i oppgave a) til å vise at

$$\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$$

Løsningsforslag c)

Siden $\triangle ACP \sim \triangle ACE$ må forholdet mellom de samsvarende sidene være det samme, dermed må forholdene mellom AP og AC være likt forholdet mellom AC og AE . Det vil si at

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AE}$$

I deloppgave b) fant vi at $AP = c + a$ og $AE = c - a$, dersom vi setter inn dette får vi

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AE} = \frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$$



d)

Bruk resultatet i oppgave c) til å vise at Pytagoras setning gjelder.

Løsningsforslag d)

Vi vil gjøre om på likningen $\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$ fra deloppgave c) og se om vi kan få den på formen $a^2 + b^2 = c^2$.

Vi kan begynne med å multiplisere med b

$$b \cdot \frac{c+a}{b} = b \cdot \frac{b}{c-a}$$

$$c + a = \frac{b^2}{c-a}$$

Videre kan vi multiplisere med $c - a$

$$(c + a)(c - a) = (c - a) \frac{b^2}{c-a}$$

$$(c + a)(c - a) = b^2$$

Ved konjugatsetningen får vi at $(c + a)(c - a) = c^2 - a^2$.

Dermed får vi

$$(c + a)(c - a) = b^2$$

$$c^2 - a^2 = b^2$$

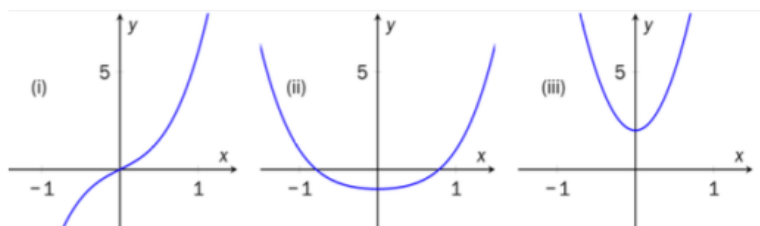
$$a^2 + b^2 = c^2$$

som er Pytagoras setning.



Oppgave 8 (3 poeng) Nettkode: E-4P3C

Nedenfor er det laget skisser av grafene til en funksjon f , den deriverte f' og den andrederiverte f'' .



Avgjør hva som er grafen til f , hva som er grafen til f' , og hva som er grafen til f'' .

Løsningsforslag

Vi kan begynne med (i). Denne grafen er monotont voksende, altså må den deriverte alltid være positiv. Den dersom denne er grafen til f passer det da at (iii) som alltid er positiv er den deriverte til f .

Vi må sjekke om (ii) kan være den dobbeltderiverte til f , dersom (i) er skissen av grafen til f . Grafen (i) har den hule siden ned når $x < 0$ og den hule siden opp når $x > 0$, så $f''(x)$ skulle i dette tilfellet vært negativ når $x < 0$, og positiv når $x > 0$, men dette stemmer ikke for (ii), så den kan ikke være den dobbeltderiverte til f , dersom (i) viser grafen til f .

Vi kunne se at det passer at (iii) viser den deriverte til (i), men (ii) passer ikke til å være den dobbeltderiverte til (i). Vi kan sjekke om (ii) viser grafen til f , og om (i) kan være den deriverte til (ii).

(ii) har bunnpunkt i $x = 0$, så her må den deriverte være lik 0, det stemmer med skisse (i). I (ii) så er grafen avtagende for $x < 0$, og da må den deriverte være negativ, og voksende for $x > 0$, da må vi den deriverte være positiv. Dette stemmer med (i), den er negativ for $x < 0$ og positiv for $x > 0$, så (i) er den deriverte til (ii).

Da kan vi konkludere med at (ii) er grafen til f , (i) er grafen til f' og (iii) er grafen til f'' .

Svar: (ii) er f , (i) er f' og (iii) er f''



DEL 2 med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng) [Nettkode: E-4P3E](#)

I pengespillet Lotto legges 34 kuler i en beholder. Hver kule er nummerert med ett av tallene fra 1 til 34. Sju kuler trekkes tilfeldig uten tilbakelegging. Tallene på de sju kulene er vinnertallene.

a)

Når du spiller Lotto, krysser du av sju av tallene fra 1 til 34 på en kupong.

På hvor mange måter kan du velge ut sju av de 34 tallene?

Løsningsforslag a)

Vi skal velge 7 tall blant 34 tall. Rekkefølgen for tallene spiller ingen rolle, og det er ingen tilbakelegging. Da kan vi regne $\binom{34}{7}$

$$\binom{34}{7} = \frac{34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{7!} = \frac{34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5\,379\,616$$

Svar: 5 379 616 måter

b)

Tore har levert inn en lottokupong der han har krysset av tallene

3, 5, 11, 18, 21, 25, 32

Bestem sannsynligheten for at Tore får nøyaktig 5 rette.

Løsningsforslag b)

Vi skal finne sannsynligheten for å trekke nøyaktig fem rette. Sannsynligheten er uniform, så for å finne sannsynligheten kan vi regne $\frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}}$.

I deloppgave a) fant vi at antall mulige måter er $\binom{34}{7} = 5\,379\,616$.

Vi må finne hvor mange av utvalg som er gunstige for å velge nøyaktig fem rette tall. Det er 7 vinnertall, så vi må velge 5 tall av de 7 vinnertallene. Dette kan vi velge på $\binom{7}{5}$ måter.

De to siste tallene må vi velge blant de tallene som ikke er vinnertall, som er $34 - 7 = 27$ tall. Da har vi $\binom{27}{2}$ måter å velge disse på.



Hvert enkelt av de $\binom{7}{5}$ måtene å velge 5 rette tall på kan kombineres med de $\binom{27}{2}$ måtene å velge de 2 siste tallene. Til sammen kan vi derfor velge 5 rette tall på

$\binom{7}{5} \cdot \binom{27}{2}$ måter. Dette er antall gunstige utvalg.

Dermed er

$$P(5 \text{ rette}) = \frac{\binom{7}{5} \cdot \binom{27}{2}}{\binom{34}{7}} = \frac{21 \cdot 351}{5379616} \approx 0,0014 = 0,14\%$$

Svar: 0,14%

c)

Tore ser lottotrekningen på TV. Etter at det er trukket ut fire tall, går strømmen, og TV-en går i svart. Tallene som til da er trukket ut, er 5, 21, 3 og 11.

Bestem sannsynligheten for at Tore får sju rette på lottokupongen sin.

Løsningsforslag c)

Det er trukket ut 4 tall, altså er det gjenstår det å trekke 3 tall. Disse kan trekkes blant 30 tall.

Antall mulige måter å trekke de siste 3 tallene på er

$$\binom{30}{3} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4060$$

Siden det bare gjenstår 3 tall og Tore mangler 3 tall, kan de siste tallene bare bli trukket på én gunstig måte. De tre gjenstående tallene må trekkes. Antall gunstige er altså 1. Da får vi

$$P(7 \text{ rette}) = \frac{1}{4060} \approx 0,0002 = 0,002\%$$

Svar: 0,002%



Oppgave 2 (6 poeng) Nettkode: E-4P3I

To sirkler c_1 og c_2 med sentrum i henholdsvis S_1 og S_2 er gitt ved

$$\begin{aligned}c_1 : (x + 5)^2 + y^2 &= 80 \\c_2 : x^2 - 10x + y^2 + 5 &= 0\end{aligned}$$

a)

Bestem sentrum og radius i sirklene c_1 og c_2 .

Løsningsforslag a)

Vi begynner ved å se på likningene, og se om vi kan få de på formen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Likningen til c_1 er nesten på formen vi ønsker, det som mangler er at vi har $(x + 5)^2$ og at høyresiden ikke er kvadrert. Dersom vi skriver $(x + 5) = (x - (-5))$ og $80 = \sqrt{80}^2$ får vi

$$c_1 : (x + 5)^2 + y^2 = 80 \Rightarrow (x - (-5))^2 + (y - 0)^2 = \sqrt{80}^2$$

kan vi se at c_1 har sentrum i $(-5, 0)$ og har en radius $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$.

For å få c_2 på formen må vi lage et fullstendig kvadrat. Vi vil bruke andre kvadratsetning, der

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Vi har $x^2 - 10x$, og må finne hva vi må legge til for å fullføre kvadratet. Hvis vi sammenligner med ligningen over har vi $a = x$, og vi har at $2ab = 2bx = 10x$, så $b = 5$. Vi må legge til $5^2 = 25$. Dette må vi gjøre på begge sider av likhetstegnet, og da får vi

$$x^2 - 10x + y^2 + 5 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = -5 + 25$$

$$(x - 5)^2 + y^2 = 20$$

$$(x - 5)^2 + (y - 0)^2 = \sqrt{20}^2$$

Nå kan vi se at c_2 må ha sentrum i $(5, 0)$ og radius lik $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

ALTERNATIV

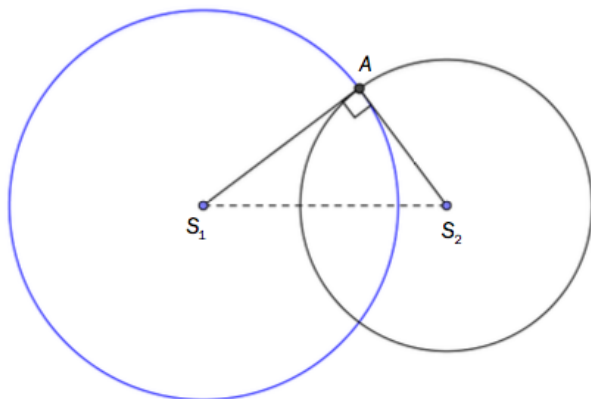
Svar: c_1 har sentrum i $(-5, 0)$ og har radius $4\sqrt{5}$ og c_2 har sentrum i $(5, 0)$ og radius $2\sqrt{5}$



b)

La A være et av skjæringspunktene mellom sirklene. Sirklene c_1 og c_2 kalles ortogonale

dersom $\vec{AS_1} \perp \vec{AS_2}$. Se skissen nedenfor.



Bestem skjæringspunktene mellom sirklene c_1 og c_2 .

Løsningsforslag b)

Vi begynner å se hvordan vi kan finne skjæringspunktene ved hjelp av GeoGebra. Vi tegner inn c_1 ved å skrive

$$c_1 : (x + 5)^2 + y^2 = 80$$

i "Skriv inn"-feltet og c_2 ved å skrive

$$c_2 : x^2 - 10x + y^2 + 5 = 0$$

For å finne skjæringspunktene skriver vi

$$\text{Skjæring}[c_1, c_2]$$

Da får vi punktene $(3, 4)$ og $(3, -4)$.

ALTERNATIV

Svar: $(3, 4)$ og $(3, -4)$.



c)

Undersøk ved å bruke vektorregning om sirklene c_1 og c_2 er ortogonale.

Løsningsforslag c)

For å finne ut om sirklene er ortogonale må vi finne skalarproduktet mellom $\vec{AS}_1$ og $\vec{AS}_2$. Dersom dette er lik 0, vil $\vec{AS}_1 \perp \vec{AS}_2$ og sirklene er ortogonale.

Fra deloppgave a) vet vi at $S_1 = (-5, 0)$ og $S_2 = (5, 0)$. A er skjæringspunktet mellom c_1 og c_2 , som fra deloppgave b) må være punktet $(3, 4)$.

Vi begynner med å finne $\vec{AS}_1$ og $\vec{AS}_2$.

$$\vec{AS}_1 = [-5 - 3, 0 - 4] = [-8, -4]$$

$$\vec{AS}_2 = [5 - 3, 0 - 4] = [2, -4]$$

Skalarproduktet mellom $\vec{AS}_1$ og $\vec{AS}_2$ er

$$\vec{AS}_1 \cdot \vec{AS}_2 = [-8, -4] \cdot [2, -4] = -8 \cdot 2 + (-4) \cdot (-4) = -16 + 16 = 0$$

Da er $\vec{AS}_1 \perp \vec{AS}_2$ og sirklene er ortogonale.

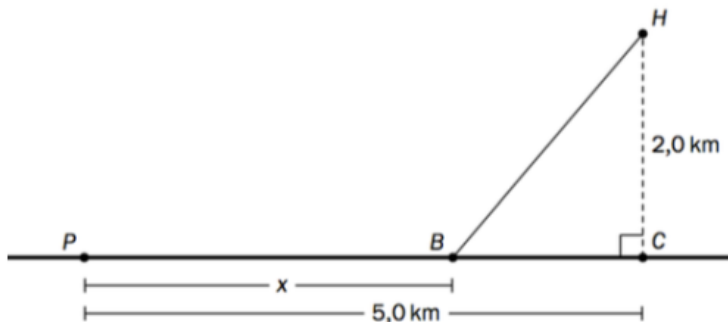
Svar: $\vec{AS}_1 \perp \vec{AS}_2$ så c_1 og c_2 er ortogonale.



Oppgave 3 (4 poeng) Nettkode: E-4P3V

Anne skal på hytta. Hun må sette bilen sin på en parkeringsplass P ved en rettlinjert vei. Punktet C er det punktet på veien som ligger nærmest hytta H . Avstanden fra P til C er 5,0 km. Avstanden fra C til H er 2,0 km.

Anne vurderer å følge veien fram til et punkt B før hun svinger ut i terrenget og går rett mot hytta. Se figuren nedenfor.



Hun regner med å holde farten 5 km/h på veien og farten 3 km/h i terrenget.

a)
Vi setter $PB = x$ km. Tiden hun bruker fra parkeringsplassen til hytta, målt i timer, kaller vi for $t(x)$.

Vis at

$$t(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{2^2 + (5-x)^2}}{3}$$

Løsningsforslag a)

Vi kan dele opp strekningen Anne skal kjøre i den strekningen som hun kjører på vei, og den delen hun kjører i terrenget, og se hvor lang tid hun vil bruke på hver av de, og deretter summere de sammen.

Vi kan begynne med å se på hvor lang tid hun bruker på strekningen hun kjører langs veien. Strekningen langs veien er x km, vi har $s_v = x$ og farten langs veien er 5 km/t, $v_v = 5$ km/t. Fra formelen over kan vi da regne ut at tiden hun bruker langs veien,

$$t_v = \frac{s_v}{v_v} = \frac{x}{5}$$

Så det første leddet er tiden hun bruker langs veien.
Det andre leddet

$$\frac{\sqrt{2^2 + (5-x)^2}}{3}$$



må være tiden hun bruker i terrenget. Vi kan finne strekningen hun kjører, s_t ved å bruke Pytagoras setning, der strekningen vil være hypotenusen i den rettvinklede trekanten med kateter lik 2,0 km og 5,0-x km. Da får vi at

$$s_t^2 = 2^2 + (5 - x)^2 \quad \Rightarrow \quad s_t = \sqrt{2^2 + (5 - x)^2}$$

Farten hun holder i terrenget, v_t er på 3 km/t, så da får vi at tiden hun bruker i terrenget,

$$t_t = \frac{s_t}{v_t} = \frac{\sqrt{2^2 + (5 - x)^2}}{3}$$

som er det samme som det andre leddet i likningen.

b)

Bestem hvor Anne må velge punktet B for å komme raskest fram til hytta. Hva er den korteste tiden hun kan bruke?

Løsningsforslag b)

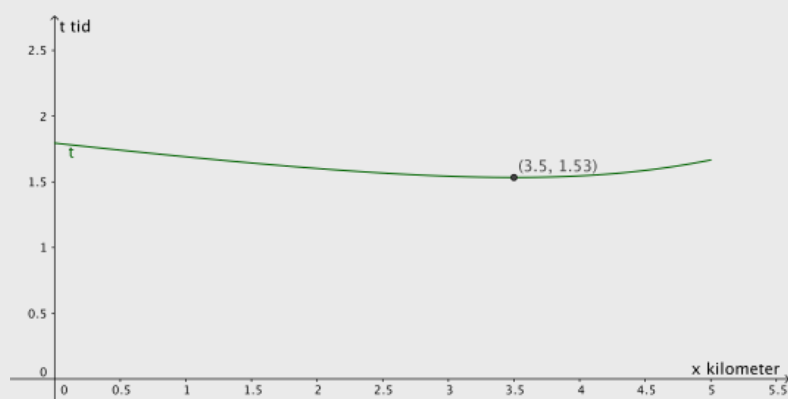
Vi skal se hvordan vi kan løse oppgaven grafisk. I den alternative løsningen ser vi hvordan vi kan løse den ved å finne den deriverte til t .

Vi begynner med å skrive funksjonen inn i GeoGebra. Vi har at x må ligge mellom 0 og 5. Da skriver vi inn

$$t(x) = \text{Funksjon}[x/5 + \text{sqrt}(2^2 + (5 - x)^2)/3, 0, 5]$$

i "Skriv inn"-feltet.

For å finne bunnpunktet til grafen skriver vi inn $\text{Min}[t, 0, 5]$. Da får vi opp grafen med punktet (3,5, 1,53)



Anne vil bruke minst tid når $x = 3,5$, altså når hun velger punktet B 3,5 km fra P . Da bruker hun 1,53 timer, ca 1 time og 30 min.

ALTERNATIV

Svar: Hun må velge punktet B 3,5 km fra P , da bruker hun 1,53 timer.



Oppgave 4 (6 poeng) Nettkode: E-4P44

En partikkel beveger seg i en bane gitt ved

$$\vec{r}(t) = [t^3 - 3t + 3, t - 1], \quad -2 \leq t \leq 2$$

a)

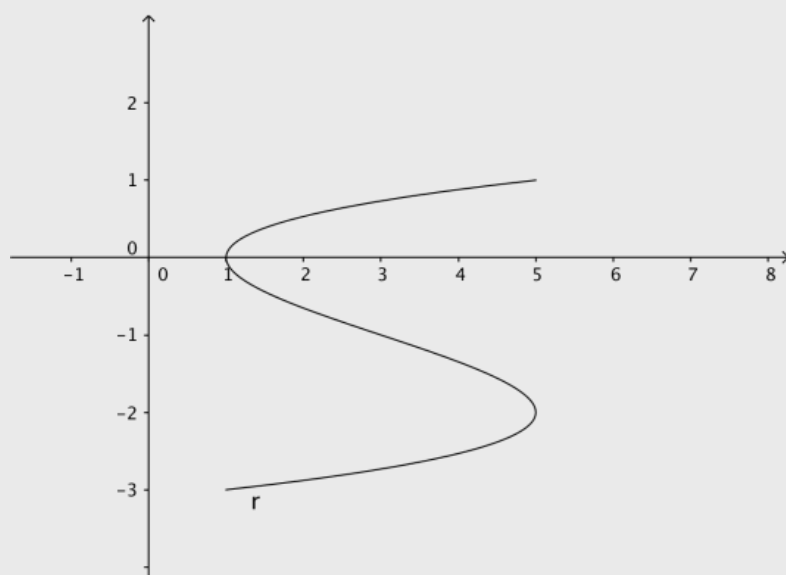
Bruk graftegner til å tegne grafen til $\vec{r}$ i et koordinatsystem.

Løsningsforslag a)

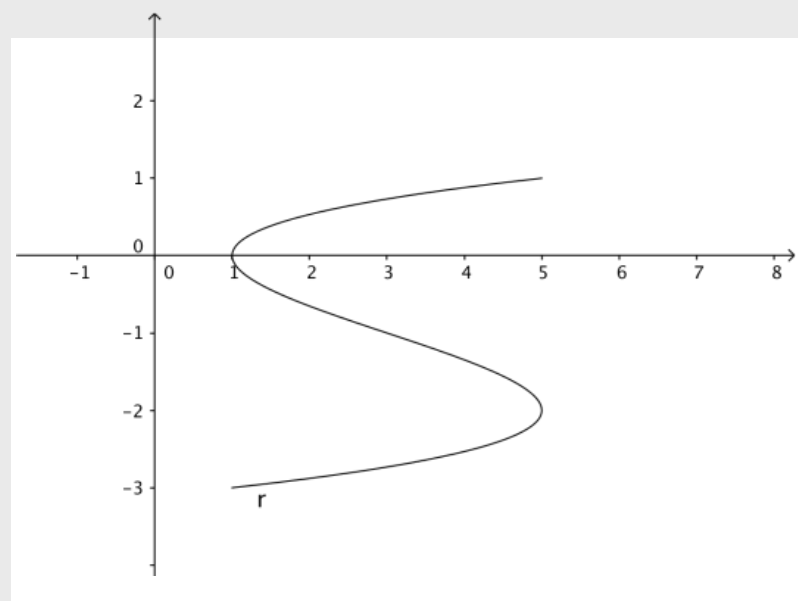
For å tegne grafen til $\vec{r}$ kan vi bruke kommandoen kurve i GeoGebra. Da skriver vi inn

$$r = \text{kurve}[t^3 - 3t + 3, t - 1, t, -2, 2]$$

i "Skriv inn"-feltet. Dette gir grafen



Svar:



b)

Bestem posisjonen, banefarten og akselerasjonen når $t = 1$.

Løsningsforslag b)

Vi kan finne posisjon, banefart og akselerasjon ved regning.

Vi begynner med posisjonen til partikkelen. Da kan vi sette inn for $t = 1$ i $\vec{r}(t)$. Da får vi

$$\vec{r}(1) = [1^3 - 3 \cdot 1 + 3, 1 - 1] = [1 - 3 + 3, 0] = [1, 0]$$

Posisjonen til partikkelen når $t = 1$ er punktet $(1, 0)$.

For å finne fartsvektoren, $\vec{v}(t)$ når $t = 1$ må vi derivere $\vec{r}(t)$. Da må vi derivere x - og y -komponenten hver for seg. Dette gir at

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = [(t^3 - 3t + 3)', (t - 1)'] = [3t^2 - 3, 1]$$

Vi setter inn for $t = 1$ og får

$$\vec{v}(1) = [3 \cdot 1^2 - 3, 1] = [3 - 3, 1] = [0, 1]$$

For å finne banefarten må vi regne ut absoluttverdien $|\vec{v}(t)|$.

$$|\vec{v}(1)| = |[0, 1]| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

Banefarten er 1.

Akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t)$ er den deriverte av $\vec{v}(t)$, så for å finne akselerasjonsvektoren må vi derivere $\vec{v}(t)$ komponentvis

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = [(3t^2 - 3)', (1)'] = [6t, 0]$$

Vi setter inn for $t = 1$ og får

$$\vec{a}(1) = [6 \cdot 1, 0] = [6, 0]$$

Vi finner akselerasjonen ved å finne absoluttverdien av $\vec{a}(t)$.

$$|\vec{a}(1)| = |[6, 0]| = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6$$

Akselerasjonen er 6.

ALTERNATIV

Svar: Posisjonen til partikkelen er $(1, 0)$, banefarten er 1 og akselerasjonen er 6.



c)

Bestem de punktene på grafen der fartsvektoren $\vec{v}(t)$ er parallell med y-aksen

Løsningsforslag c)

Vi vil at fartsvektoren $\vec{v}(t)$ skal være parallell med y-aksen som har retningsvektor $[0,1]$. For at de skal være parallelle må vi ha at

$$\vec{v}(t) = [3t^2 - 3, 1] = k[0, 1]$$

Vi ser at andre komponenten i begge vektorene er 1. For at vektorene skal være parallelle må vi da ha at

$$3t^2 - 3 = 0$$

Vi vil løse ligningen for t og da får vi

$$3t^2 - 3 = 0$$

$$3t^2 = 3$$

$$t^2 = 1$$

$$t = 1 \quad \vee \quad t = -1$$

Fartsvektoren er altså parallell med y-aksen når $t = 1$ og når $t = -1$. Vi setter inn for $t = -1$ i $\vec{r}(t)$ og får

$$\vec{r}(-1) = [(-1)^3 - 3(-1) + 3, -1 - 1] = [5, -2]$$

Fra deloppgave b) vet vi at $\vec{r}(1) = [2, 1]$.

Svar: I punktene $(2, 1)$ og $(5, -2)$



Oppgave 5 (2 poeng) Nettkode: E-4P4B

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 + 2x - 11$$

Noen punkter på grafen til f har avstand 5 fra origo. Bruk CAS til å bestemme de eksakte verdiene for x -koordinatene til disse punktene.

Løsningsforslag

Vi kan finne de punktene på grafen f som har avstand 5 fra origo ved å finne skjæringspunktene til f og sirkelen s , med sentrum i origo og radius 5. En sirkel kan skrives på formen $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, der (x_0, y_0) er sentrum og r er radius. Sirkelen s har sentrum $(0,0)$ og $r = 5$, og kan da skrives på formen

$$s : x^2 + y^2 = 5^2 = 25$$

Vi definerer $f(x)$ og s i CAS ved å skrive

$$f(x) := x^2 + 2x - 11$$

$$s := x^2 + y^2 = 25$$

For å finne skjæringspunktene mellom f og s skriver vi `Skjæring[f, s]`. For at vi skal få eksakte løsninger må vi ha "="-tegnet markert i CAS.

Da får vi

CAS	
1	$f(x) := x^2 + 2x - 11$ → $f(x) := x^2 + 2x - 11$
2	$s := x^2 + y^2 = 25$ → $s : x^2 + y^2 = 25$
3	<code>Skjæring[f, s]</code> → $\left\{ (3, 4), (-4, -3), \left(\frac{\sqrt{41}-3}{2}, \frac{-\sqrt{41}-3}{2} \right), \left(\frac{-\sqrt{41}-3}{2}, \frac{\sqrt{41}-3}{2} \right) \right\}$

Svar: Skjæringspunktene er $(3, 4)$, $(-4, -3)$, $\left(\frac{\sqrt{41}-3}{2}, \frac{-\sqrt{41}-3}{2} \right)$ og $\left(\frac{-\sqrt{41}-3}{2}, \frac{\sqrt{41}-3}{2} \right)$

