www.matematikk.org

REA3022 2015 Vår

Eksamenstid:
5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 3 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Del 1 har 9 oppgaver. Del 2 har 5 oppgaver.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
- vurderer om svar er rimelige

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.:

- Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng) Nettkode: E-4D6G

Deriver funksjonene

a)

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$

Løsningsforslag a)

$$\left(x^3\right)' + \left(2x^2\right)' + (-3x)' = 3x^2 + 2 \cdot 2x^1 + \left(-3\right) = 3x^2 + 4x - 3.$$

$$f'\left(x\right) = 3x^2 + 4x - 3.$$

Svar:

$$\underline{\underline{f'\left(x\right) = 3x^2 + 4x - 3.}}$$

b)

$g(x) = \ln(x-2)$

Løsningsforslag b)

Ved å velge kjernen $h(x) = x - 2$, og huske at den deriverte til $\ln x$ er $\frac{1}{x}$ se at

$g'(x) = (\ln(h(x)))' = \frac{1}{h(x)} \cdot h'(x) = \frac{1}{x-2} \cdot 1 = \frac{1}{x-2}$

Svar:

$$\underline{\underline{g'(x) = \frac{1}{x-2}.}}$$

c)

$h(x) = \left(2x^2 - 1\right)^3$

Løsningsforslag c)

Kjerneregelen sier at $(f(u(x)))' = f'(u(x))u'(x)$. Husk at $\left(u^3\right)' = 3 \cdot u^{3-1} = 3u^2$ følger det da at

$$h'(x) = \left(\left(2x^2 - 1\right)^3\right)' = 3 \cdot \left(2x^2 - 1\right)^2 \cdot \left(2x^2 - 1\right)' = 3\left(2x^2 - 1\right)^2 \cdot 2 \cdot 2x = 12x\left(2x^2 - 1\right)^2$$

Svar:

$$\underline{\underline{h'\left(x\right) = 12x\left(2x^2 - 1\right)^2.}}$$

Oppgave 2 (5 poeng) Nettkode: E-4D6K

Polynomfunksjonen P er gitt ved

$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

a)
Vis at $(x-2)$ er en faktor i $P(x)$.

Løsningsforslag a)

Siden

$$\begin{aligned} P(2) &= 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 6 \\ &= 8 + 8 - 10 - 6 = 0 \end{aligned}$$

har vi funnet at $P(2) = 0$ og dermed er $x - 2$ en faktor i polynomet.

Svar: $x - 2$ er en faktor.

b)
Bruk blant annet polynomdivisjon til å faktorisere $P(x)$ med lineære faktorer.

Løsningsforslag b)

Vi utfører polynomdivisjonen $\left(x^3 + 2x^2 - 5x - 6\right) : \left(x - 2\right)$.

$$\begin{array}{l} (\quad x^3 + 2x^2 - 5x - 6\,) : (x-2) = x^2 + 4x + 3 \\ \underline{-\,x^3 + 2x^2} \\ \qquad\quad 4x^2 - 5x \\ \qquad \underline{-\,4x^2 + 8x} \\ \qquad\qquad\quad 3x - 6 \\ \qquad\qquad \underline{-\,3x + 6} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Vi får at $P(x) = (x-2)(x^2 + 4x + 3)$, men vi leter etter lineære faktorer. Derfor forsøker vi å faktorisere $\left(x^2 + 4x + 3\right)$. Vi gjør dette ved å finne nullpunktene til $\left(x^2 + 4x + 3\right)$ med annengradsformelen. Vi får da at

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

som gir de to røttene

$x_1 = -3 \quad \text{og} \quad x_2 = -1$

Det betyr at vi kan skrive

$$x^2 + 4x + 3 = \left(x + 3\right)\left(x + 1\right).$$

Vi har altså funnet at

$$P(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 3).$$

$$P(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$$

Svar:

$$\underline{\underline{P(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 3)}}$$

c)

Bestem $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x - 2}$

Løsningsforslag c)

Fra oppgave $2b$) har vi at

$$x^3 + 2x - 5x - 6 = \left(x - 2\right)\left(x + 1\right)\left(x + 3\right)$$

som betyr at vi kan skrive

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x - 5x - 6}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 1)(x + 3)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \left(x + 1\right)\left(x + 3\right) = \left(2 + 1\right)\left(2 + 3\right) \\ &= 3 \cdot 5 = 15. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x - 5x - 6}{x - 2} = 15.$$

Svar: $\underline{\underline{\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x - 2} = 15}}$

Oppgave 3 (3 poeng) Nettkode: E-4D6O

Skriv så enkelt som mulig

$\frac{x-2}{x^2+2x} + \frac{2}{x} + \frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{3x}{x^2-4}$

Løsningsforslag

Vi begynner med å observere at

$$\begin{aligned}
&\frac{x-2}{x^2+2x} + \frac{2}{x} + \frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{3x}{x^2-4} \\
&= \frac{x-2}{x(x+2)} + \frac{2}{x} + \frac{x+2}{x(x-2)} - \frac{3x}{(x-2)(x+2)},
\end{aligned}$$

som betyr at minste felles nevner er gitt ved

$$x(x-2)(x+2).$$

Dermed har vi at

$$\begin{aligned}
&\frac{x-2}{x^2+2x} + \frac{2}{x} + \frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{3x}{x^2-4} \\
&= \frac{x-2}{x(x+2)} + \frac{2}{x} + \frac{x+2}{x(x-2)} - \frac{3x}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{(x-2)^2}{x(x+2)(x-2)} + \frac{2(x+2)(x-2)}{x(x+2)(x-2)} + \frac{(x+2)^2}{x(x-2)(x+2)} - \frac{3x^2}{x(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{\left(x-2\right)^2+2\left(x+2\right)\left(x-2\right)+\left(x+2\right)^2-3x^2}{x(x+2)(x-2)} \\
&= \frac{\left(x^2-4x+4\right)+2\left(x^2-4\right)+\left(x^2+4x+4\right)-3x^2}{x(x+2)(x-2)} \\
&= \frac{4x^2-3x^2}{x(x+2)(x-2)} = \frac{x^2}{x(x+2)(x-2)} \\
&= \frac{x}{(x+2)(x-2)}.
\end{aligned}$$

$= \frac{x}{x^2-4}.$

Svar: $\underline{\underline{\frac{x}{x^2-4}}}$

Oppgave 4 (2 poeng) Nettkode: E-4D6Q

En sirkel er gitt ved likningen

$x^2 - 2x + y^2 + 4y - 20 = 0$

Bestem sentrum S og radius r i sirkelen.

Løsningsforslag

Likningen for sirkelen kan skrives

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 20,$$

og ved å fullføre kvadratet for x kan vi skrive

$$\left(x-1\right)^2 - 1 + y^2 + 4y = 20.$$

Ved å gjøre det tilsvarende for y ser vi at uttrykket forenkles til

$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = 20,$$

som kan skrives

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

Dette betyr at sirkelen har radius $r = \sqrt{25} = 5$ og sentrum i punktet

$$S = (1, -2).$$

Svar: Sirkelen har radius 5, og sentrum i $(1, -2)$.

Oppgave 5 (5 poeng) Nettkode: E-4D6S

Vektoren $\vec{v} = [3, 4]$ er gitt.

a)

Bestem en vektor $\vec{u}$ som er parallell med $\vec{v}$ og motsatt rettet.

Løsningsforslag a)

Siden vektoren $\vec{u}$ skal være parallell med $\vec{v}$ må det finnes en konstant $C \neq 0$ slik at$\vec{u} = C\vec{v}$. Siden $\vec{u}$ skal være motsatt rettet må C være et negativt tall. Det betyr at vi kan velge $C = -1$, som gir

$$\vec{u} = -1 \cdot \vec{v} = -1 \cdot [3, 4] = [-3, -4].$$

ALTERNATIV LØSNING

Svar:

$$\vec{u} = [-3, -4]$$

(svaret er ikke unikt)

b)

Bestem en vektor $\vec{w} \neq \vec{0}$ som står vinkelrett på $\vec{v}$.

Løsningsforslag b)

Hvis $\vec{w} = [x, y] \neq [0, 0]$ er en vektor som står vinkelrett på vektoren $\vec{v} = [3, 4]$ må vi ha

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 3x + 4y = 0.$$

Ved å løse for y ser vi at dette gir

$$y = -\tfrac{3}{4}x.$$

Vi kan altså velge vektoren

$$\vec{w} = [x, -\tfrac{3}{4}x]$$

uansett verdi av $x \neq 0$. For å bli kvitt brøken kan vi for eksempel velge $x = 4$. Det gir

$$\vec{w} = [4, -3].$$

Svar:

$$\vec{w} = [4, -3].$$

c)

Bestem konstantene k og t slik at

$\overrightarrow{v} = k \cdot \overrightarrow{u} + t \cdot \overrightarrow{w}$

Løsningsforslag c)

I deloppgaven a) fant vi vektoren $\vec{u}$ slik at ved å sette $\vec{u} = -\vec{v}$ følger det at

$$\vec{v} = -\vec{u}$$

og dermed

$$\vec{v} = \left(-1\right) \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{w}.$$

ALTERNATIV LØSNING

Svar: $\underline{\underline{\overrightarrow{v} = (-1) \cdot \overrightarrow{u} + 0 \cdot \overrightarrow{w}}}$

d)

Bestem en vektor $\overrightarrow{x}$ som har samme retning som $\overrightarrow{v}$ og som har lengde lik 7.

Løsningsforslag d)

Siden $\vec{x}$ har samme retning som $\vec{v}$ kan vi skrive

$$\vec{x} = C\vec{v} = C\left[3, 4\right] = \left[3C, 4C\right]$$

for en eller annen $C > 0$. Lengden til $\vec{x}$ er videre gitt ved

$$\left|\vec{x}\right| = \sqrt{(3C)^2 + (4C)^2} = \sqrt{C^2\left(9 + 16\right)} = C\sqrt{25} = 5C.$$

Siden $\vec{x}$ skal ha lengde lik 7 betyr dette at

$$5C = 7,$$

og dermed $C = \frac{7}{5}$. Koordinatene til vektoren $\vec{x}$ er altså gitt ved

$$\vec{x} = \left[\tfrac{7}{5} \cdot 3, \tfrac{7}{5} \cdot 4\right] = \left[\tfrac{21}{5}, \tfrac{28}{5}\right]$$

Svar:

$$\underline{\underline{\vec{x} = \left[\tfrac{21}{5}, \tfrac{28}{5}\right]}}$$

Oppgave 6 (4 poeng) Nettkode: E-4D6X

Binomialkoeffisientene er gitt ved $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$

a)

Bestem $\binom{12}{2}$. Vis at $\binom{n}{1} = n$.

Løsningsforslag a)

Fra definisjonen av binominalkoeffisientene har vi at

$$\begin{aligned}\binom{12}{2} &= \frac{12!}{(12-2)!2!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(10\cdot 9\cdot \ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1)\,1\cdot 2}\\ &= \frac{12\cdot 11\cdot \cancel{10\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\left(\cancel{10\cdot 9\cdot \ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\right)1\cdot 2}\\ &= \frac{12\cdot 11}{2} = 6\cdot 11 = 66.\end{aligned}$$

Siden vi alltid kan skrive at $n! = n\cdot(n-1)!$ kan vi videre skrive

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}1} = n.$$

Svar:

$$\binom{12}{2} = 66 \quad og \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}1} = n.$$

b)

Bruk det du fant i oppgave a) til å løse likningen $\frac{\binom{x}{1}\cdot\binom{12-x}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{6}{11}$

Løsningsforslag b)

Fra oppgave $6a)$ har vi at

$$\frac{\binom{x}{1}\cdot\binom{12-x}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{x(12-x)}{66}.$$

Det betyr at likningen kan skrives

$$\frac{x(12-x)}{66} = \frac{6}{11}.$$

Ved å multiplisere begge sider av likningen med 66 får vi

$$x\left(12-x\right) = 66 \cdot \frac{6}{11} = 6^2 = 36.$$

Når vi multipliserer ut parentesen kan vi altså skrive

$$12x - x^2 = 36$$

eller, ved å trekke fra $12x - x^2$ på begge sider,

$$x^2 - 12x + 36 = 0.$$

Denne likningen kan enten løses ved å bruke annengradslikningen eller ved å gjenkjenne den andre kvadratsetningen. Vi finner uansett at uttrykket kan skrives

$$(x-6)^2 = 0,$$

som betyr at likningen bare har én løsning, nemlig $x = 6$.

Svar:

$\underline{\underline{x = 6.}}$

Oppgave 7 (5 poeng) Nettkode: E-4D70

Funksjonen f er gitt ved

$f(x) = 3x \cdot e^{-x}$, $x \in \langle -1, 4 \rangle$

a)

Bruk $f'(x)$ til å avgjøre hvor $f(x)$ vokser og hvor $f(x)$ avtar. Bestem x-verdien til eventuelle topp- eller bunnpunkter.

Løsningsforslag a)

Ifølge produktregelen for derivasjon, som sier at $(uv)' = u'v + uv'$, har vi at

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(3xe^{-x}\right)' = (3x)'e^{-x} + 3x\left(e^{-x}\right)' \\ &= 3e^{-x} + 3x\left(e^{-x}\right)'. \end{aligned}$$

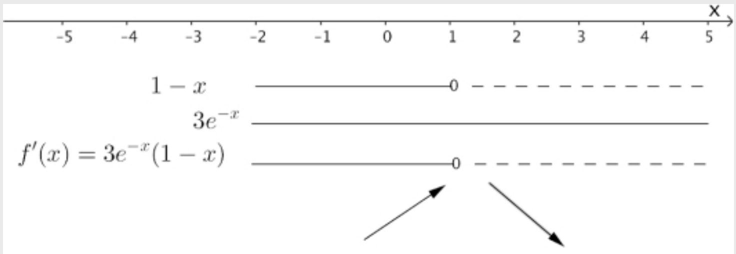
Videre gir kjerneregelen, som sier at $(g(u(x)))' = u'(x)g'(u)$, med kjerne lik $u = -x$ at

$$3e^{-x} + 3x\left(e^{-x}\right)' = 3e^{-x} + 3x(-x)'e^{-x} = 3e^{-x} - 3xe^{-x}.$$

Den deriverte av $f(x)$ er altså gitt ved

$$f'(x) = 3e^{-x} - 3xe^{-x} = 3e^{-x}(1 - x).$$

Siden $3e^{-x}$ alltid er et positivt tall er fortegnet til $f'(x)$ lik fortegnet til faktoren $(1 - x)$. Siden faktoren $(1 - x)$ er negativ for $x > 1$ og positiv $x < 1$ har vi at $f(x)$ er voksende for $x < 1$ og avtagende for $x > 1$. Ettersom $f'(x)$ går fra å være positiv til å bli negativ i punktet $x = 1$ må $f(x)$ ha et toppunkt i $x = 1$. Se fortegnskjema:



Svar: $f(x)$ er voksende for $x < 1$, avtagende for $x > 1$ og har et toppunkt i $x = 1$.

b)
Bruk $f''(x)$ til å bestemme x-verdien til eventuelle vendepunkter på grafen til f.

Løsningsforslag b)

Ifølge produktregelen har vi at

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(3e^{-x}\left(1-x\right)\right)' = \left(3e^{-x}\right)'\left(1-x\right) + 3e^{-x}\left(1-x\right)' \\ &= 3\left(-1\right)e^{-x}\left(1-x\right) + 3e^{-x}\left(0-1\right) = -3e^{-x}\left(1-x\right) - 3e^{-x} \\ &= 3e^{-x}\left(-\left(1-x\right)-1\right) = 3e^{-x}\left(x-2\right). \end{aligned}$$

Det betyr at vendepunktene til $f(x)$ er nøyaktig de punktene som tilfredsstiller likningen

$$f''\left(x\right) = 3e^{-x}\left(x-2\right) = 0.$$

Siden $3e^{-x}$ ikke kan være skyld i at $f''(x) = 0$ må vi da ha

$$x - 2 = 0,$$

som betyr at $f(x)$ har et vendepunkt i $x = 2$.

Svar: $f(x)$ har et vendepunkt i $x = 2$.

c)
Lag en skisse av grafen til f.

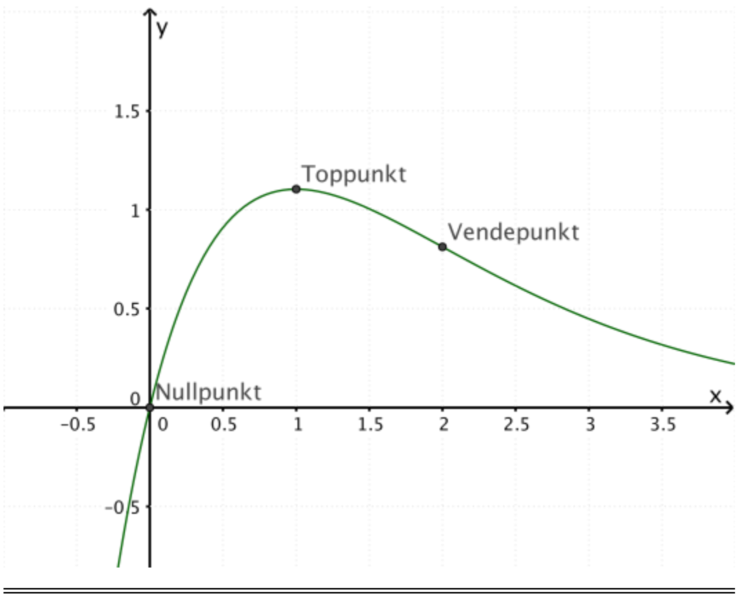
Løsningsforslag c)

Vi begynner med å se at nullpunktene til $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) = 3xe^{-x} = 0$$

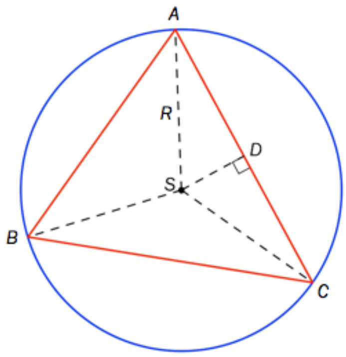
som, siden $3e^{-x}$ aldri blir null, må være gitt av $x = 0$. Vi har altså at grafen til f er voksende og negativ frem til $x = 0$, der den er null. Deretter fortsetter den å vokse frem til den når det eneste toppunktet på grafen, som ligger ved $x = 1$. Grafen fortsetter så å avta med krumning nedover helt til den passerer punktet $x = 2$. Da fortsetter grafen å avta, men nå med krumning oppover.

Svar:



Oppgave 8 (6 poeng) Nettkode: E-4D75

En vilkårlig ΔABC er gitt. En sirkel har radius R og sentrum i S og omskriver ΔABC. En normal fra S til siden AC har fotpunkt D. Se skissen nedenfor.



a)
Forklar at $\angle B = \angle DSA$

Løsningsforslag a)

Oppgaveteksten sier at ΔABC er vilkårlig, men vi må anta at ΔABC er spissvinklet. Hvis ikke er ikke resultatet i oppgave a) riktig. Siden vinklene $\angle B$ og $\angle CSA$ spenner ut samme sirkelbue, der $\angle B$ er en periferivinkel og $\angle CSA$ er en sentralvinkel, kan vi skrive

$$2\angle B = \angle CSA.$$

Siden linjestykket SD står vinkelrett på linjestykket AC må D dele linjestykket AC i to like store deler. Ettersom $\triangle DSA$ og $\triangle DSC$ er kongruente må også vinkelen $\angle CSA$ deles i to like store deler av punktet D. Vi har altså at

$$\angle DSA = \frac{1}{2}\angle CSA.$$

Siden vi allerede vet at $2\angle B = \angle CSA$ følger det dermed at

$$\angle B = \frac{1}{2}\angle CSA = \angle DSA,$$

som er det vi ønsket å vise.

b)

Vi setter $AC = b$.

Vis at $\frac{b}{\sin\ B} = 2R$

Løsningsforslag b)

Siden $\triangle\ DSA$ er rettvinklet må vi ha at

$$\sin(\angle DSA) = \frac{DA}{SA} = \frac{\frac{1}{2}AC}{R} = \frac{b}{2R}.$$

Fra oppgave $8a)$ har vi at

$$\angle B = \angle DSA,$$

som betyr at vi kan skrive

$$\sin B = \frac{b}{2R}.$$

Ved å multiplisere begge sider av likningen med $2R/\sin B$ ser vi at

$$\frac{b}{\sin B} = 2R.$$

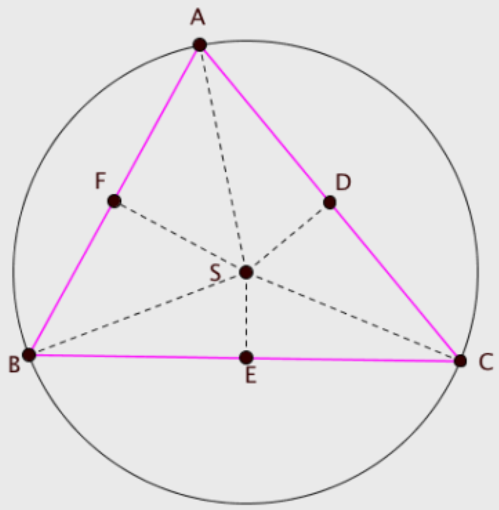
c)
Vi setter $BC = a$ og $AB = c$.

Bruk tilsvarende resonnement som i oppgave b) til å vise at

$$\frac{a}{\sin\ A} = \frac{b}{\sin\ B} = \frac{c}{\sin\ C} = 2R$$

Løsningsforslag c)

Vi tegner inn et fotpunkt E på linjen BC og et fotpunkt F på linjen AB. Situasjonen er da som vist i figuren under



Ved å gjenta argumentasjonen fra oppgave $8a)$ får vi da at

$$\angle C = \angle FSB \quad \text{og} \quad \angle A = \angle ESC$$

Ved deretter å gjenta argumentasjonen i oppgave $8b)$ for hver av de to vinklene $\angle A$ og $\angle C$ får vi at

$$\frac{a}{\sin(A)} = 2R \quad \text{og} \quad \frac{c}{\sin(C)} = 2R$$

Siden radius R i sirkelen er den samme for alle de tre punktene får vi dermed at

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

som er det vi ønsket å vise.

Oppgave 9 (2 poeng) Nettkode: E-4D79

Løs likningen

$9^x - 3^x - 12 = 0$

Løsningsforslag

Siden

$$9^x = \left(3^2\right)^x = (3^x)^2,$$

kan vi skrive likningen på formen

$$(3^x)^2 - 3^x - 12 = 0,$$

som ved å sette $u = 3^x$ kan skrives

$$u^2 - u - 12 = 0.$$

Annengradsformelen gir deretter de to løsningene

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-12)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}.$$

Dette tilsvarer

$u_1 = -3 \quad \text{og} \quad u_2 = 4$

Siden $u = 3^x$ må vi altså løse likningene

$3^x = -3 \quad \text{og} \quad 3^x = 4$

Den første likningen må imidlertid elimineres ettersom det ikke finnes et løsning. Uansett hva x er må nemlig 3^x være et positivt tall – da kan ikke $3^x = -3$. Den andre likningen løser vi ved å ta logaritmen av begge sider av likningen. Da får vi

$$\ln(3^x) = x \ln(3) = \ln(4).$$

Vi har altså funnet at løsningen av likningen er gitt som

$$x = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} = \frac{\ln\left(2^2\right)}{\ln(3)} = \frac{2\ln(2)}{\ln(3)}.$$

Svar:

$$x = \frac{2\ln(2)}{\ln(3)}.$$

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng) Nettkode: E-4D7D

En sirkel har følgende egenskaper:

- Sentrum i sirkelen ligger på linjen $y = x$

- Sentrum i sirkelen ligger like langt fra origo som fra punktet $A\,(6,\,0)$

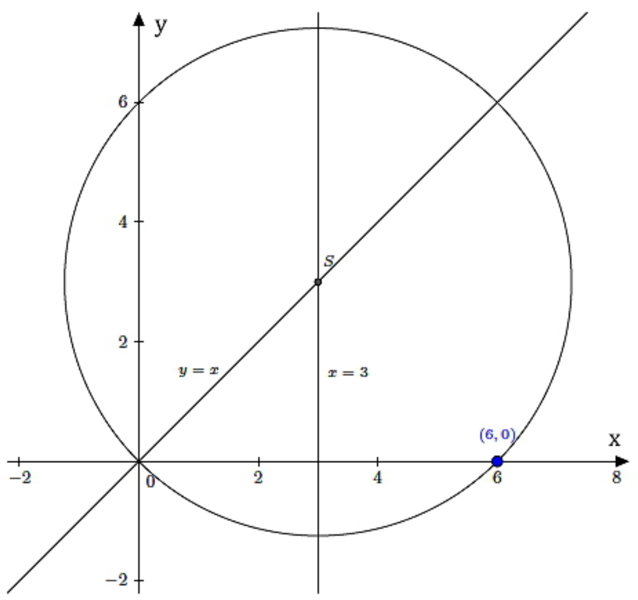
- Origo og punktet A ligger begge på sirkelperiferien

a)
Tegn sirkelen i et koordinatsystem.

Løsningsforslag a)

Vi tegner linjen $y = x$ i Geogebra. Vi vet at sentrum skal ligge på denne linjen, og like langt fra $(6, 0)$ som fra $(0, 0)$. Alle punkt som er like langt fra $(6, 0)$ som fra $(0, 0)$ er på linjen $x = 3$. Sentrum av sirkelen er ved skjæringspunktet mellom linjen $x = 3$ og $y = x$. Geogebra har et sirkeltegneverktøy som tegner en sirkel gjennom et definert sentrum, hvor man stiller inn radiusen selv.

Svar:



b)

Bestem en likning for sirkelen.

Løsningsforslag b)

Vi har et bilde av sirkelen og vi skal finne et uttrykk for den. Vi vet at alle sirkler kan skrives på formen $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ der (a, b) er sentrum av sirkelen, og r er radiusen.

Sentrum er der $x = 3$ og $x = y$, så $(3, 3)$.

Vi kan regne ut radiusen med Pytagoras læresetning, på trekanten med hjørner $(0, 0), (3, 0), (3, 3)$.
Avstanden fra origo til sentrum av sirkelen er da

$\sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Likningen for sirkelen er $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 18$.

Svar: $\underline{\underline{(x-3)^2 + (y-3)^2 = 18}}$

Oppgave 2 (6 poeng) Nettkode: E-4D7K

Bilene i en bilkø holder en fart på v km/h. Ifølge køteori vil antall biler N som passerer et bestemt sted per minutt være gitt ved modellen

$$N(v) = \frac{16{,}7v}{4+0{,}25v+0{,}006v^2}$$

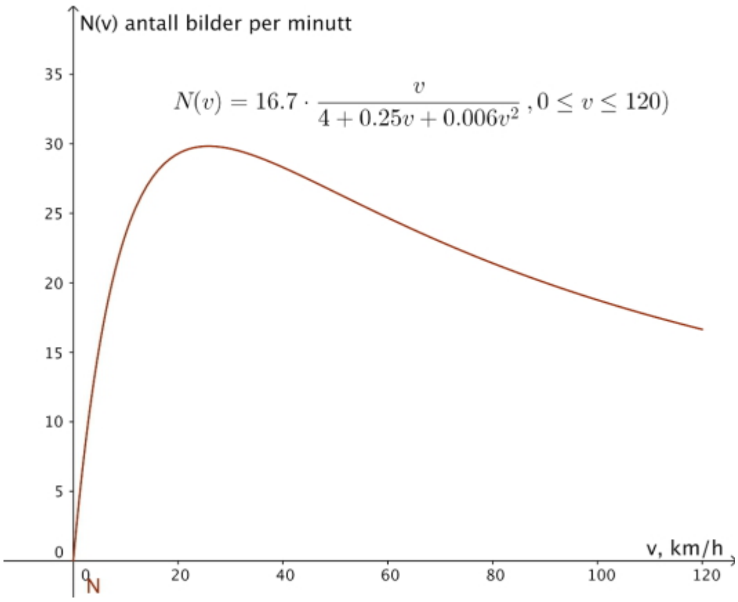
a)

Bruk graftegner til å tegne grafen til N for $v \in [0,\ 120]$.

Løsningsforslag a)

Bruk **Funksjon[<Funksjon>, <Start>, <Slutt>]** i GeoGebra slik at vi begrenser oss til intervallet $v \in [0, 120]$. Vi tilpasser aksene så hele grafen synes, med minimalt med tomrom.

Svar:

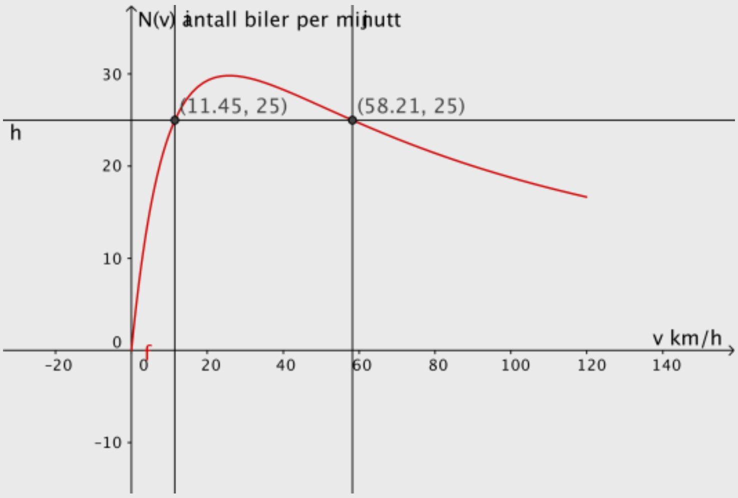


b)

Bestem grafisk hva farten bør være for at minst 25 biler skal kunne passere stedet per minutt.

Løsningsforslag b)

Vi tegner $N = 25$ i Geogebra, og bruker knappen i verktøylinjen 'Skjæring mellom to objekter' og leser av skjæringspunktene. Vi ser at en fart v mellom $11,45$ og $58,21$ km/h gir en flyt på mer enn 25 biler i minuttet.



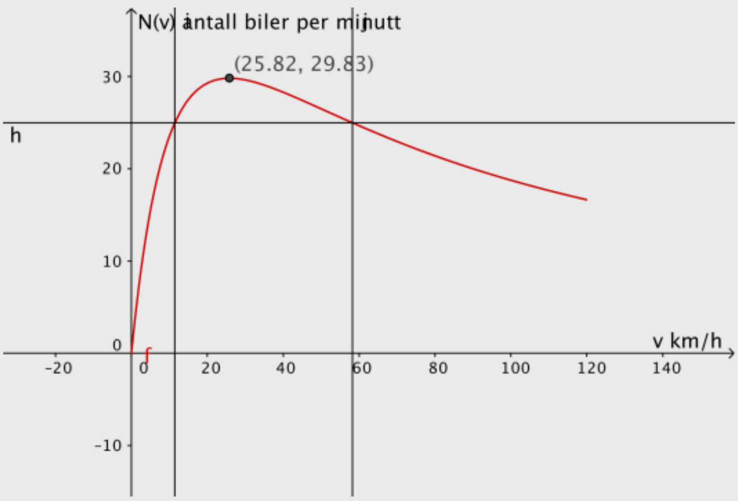
Svar: Det passerer minst 25 biler i minutter når farten er mellom $11{,}45$ km/h og $58{,}21$ km/h.

c)

Bestem grafisk hva farten må være for at flest mulig biler skal kunne passere stedet per minutt. Hvor mange biler passerer stedet per minutt da?

Løsningsforslag c)

Vi kan bruke kommandoen **Ekstremalpunkt** i Geogebra og lese av at toppunktet er på $v = 25,82$, som gir $N = 29,83$. ALtså passerer det nesten 30 biler per minutt.



Svar: Det passerer flest biler om farten er $25,82$ km/h. Da passerer det nesten 30 biler i minuttet.

Oppgave 3 (6 poeng) Nettkode: E-4D7P

Posisjonen til to båter A og B er gitt ved

$\vec{r}_A(t) = [18t - 8,\ 10 - 3t]$

$\vec{r}_B(t) = [10t,\ 20 - 6t]$

Alle lengdemål er gitt i kilometer, og tiden t er gitt i timer.

a)
Bestem farten (banefarten) til hver av båtene.

Løsningsforslag a)

$$\vec{r}_A(t) = [18t - 8, 10 - 3t]$$

$$\vec{r}_A{}'(t) = \vec{v}_A(t) = [18, -3]$$

$$\left|\vec{v}_A(t)\right| = \sqrt{18^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{37}$$

$$\vec{r}_B(t) = [10t, 20 - 6t]$$

$$\vec{r}_B{}'(t) = \vec{v}_B(t) = [10, -6]$$

$$\left|\vec{v}_B(t)\right| = \sqrt{10^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{34}$$

Svar: Båt A har fart $3\sqrt{37} \approx 18,2$ km/h. Båt B har fart $2\sqrt{34} \approx 11,7$ km/h.

b)

Forklar at avstanden d mellom båtene er gitt ved

$$d(t) = \sqrt{(8t-8)^2 + (3t-10)^2}$$

Løsningsforslag b)

Avstandsvektoren mellom båt A og båt B er gitt ved

$$\vec{d}\left(t\right) = \vec{r_A}\left(t\right) - \vec{r_B}\left(t\right) = \left[18t - 8 - 10t, 10 - 3t - \left(20 - 6t\right)\right]$$

$$\vec{d}\left(t\right) = \left[8t - 8, -10 + 3t\right]$$

Avstanden mellom båtene er lengden av avstandsvektoren.

$$\left|\vec{d}\left(t\right)\right| = \sqrt{(8t-8)^2 + (3t-10)^2} = d\left(t\right)$$

c)

Når er denne avstanden minst? Hvor langt fra hverandre er båtene da?

Løsningsforslag c)

Vi finner når $d'(t) = 0$ i CAS. Vi kan eventuellt plotte $d(t)$ i Geogebra, og bruke minimumsverktøyet. Vi finner et bunnpunkt når $t = \frac{94}{73} \approx 1,29$. Vi finner

$$d\left(\frac{94}{73}\right) = \frac{56}{\sqrt{73}} \approx 6,55$$

Svar: Etter ca $1{,}29$ timer (1 time, 17 minutter og 24 sekunder) er avstanden minst. Båt A og båt B er da $6{,}55$ km fra hverandre.

Oppgave 4 (4 poeng) Nettkode: E-4D7X

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

Om denne funksjonen vet vi at

- f har nullpunkt i $x = 1$

- $x = 2$ er x-koordinaten til vendepunktet på grafen til f

- Grafen til f går gjennom punktet $(3,\ 4)$

a)
Sett opp tre likninger som svarer til opplysningene ovenfor.

Løsningsforslag a)

f har nullpunkt i $x = 1$. Dette vil si at $f(1) = 0$. Dette gir oss ligningen $1 + a + b + c + 1 = 0$, eller $a + b + c + 2 = 0$.

f har vendepunkt i $x = 2$. Det vil si at $f''(2) = 0$. Dette gir oss ligningen $48 + 12a + 2b = 0$ som forenkles til $24 + 6a + b = 0$.

Den siste ligningen får vi av at f går gjennom $(3,4)$. Altså er $f(3) = 4$. Dette gir oss ligningen $81 + 27a + 9b + 3c + 1 = 4$, eller $78 + 27a + 9b + 3c = 0$. Deler vi på 3 får vi $26 + 9a + 3b + c = 0$

Svar: $\underline{\underline{a + b + c + 2 = 0}}$, $\underline{\underline{24 + 6a + b = 0}}$, $\underline{\underline{26 + 9a + 3b + c = 0}}$

b)
Bruk CAS til å bestemme konstantene a, b og c.

Løsningsforslag b)

Vi skriver inn $\{a + b + c + 2 = 0, 24 + 6a + b = 0, 26 + 9a + 3b + c = 0\}$ i CAS og bruker solve-verktøyet. Vi får svaret $a = -6, b = 12, c = -8$. Dette svaret kan sjekkes ved innsetting.

Svar:

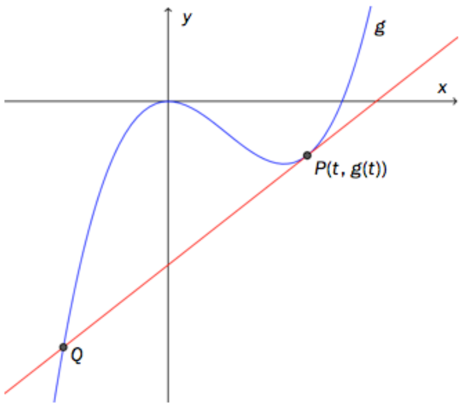
$\underline{\underline{a = -6, b = 12, c = -8}}$.

Oppgave 5 (4 poeng) Nettkode: E-4D82

Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = ax^3 - x^2 \quad , \quad D_g = \mathbb{R}$$

Grafen til g har en tangent i punktet $P(t,\ g(t))$. Tangenten skjærer grafen til g i et annet punkt Q. Se skissen nedenfor.



a)

Vis at tangenten har likningen

$$y = \left(3at^2 - 2t\right)x + t^2 - 2at^3$$

Løsningsforslag a)

Tangenten har likning $y = \alpha \cdot x + b$ der α er stigningstallet til $g(x)$ i punktet P, og b er konstantleddet til linjen. $g'\left(t\right) = 3a \cdot t^2 - 2t$, så tangenten har ligningen $y = \left(3at^2 - 2t\right)x + b$.

Vi kan finne b siden vi vet at tangenten går gjennom punktet $P = \left(t, g\left(t\right)\right) = \left(t, at^3 - t^2\right)$.

Vi setter inn t for x og $at^3 - t^2$ for y i likningen for tangenten.

$$y = \left(3at^2 - 2t\right)x + b$$
$$at^3 - t^2 = 3at^3 - 2t^2 + b$$
$$-2at^3 + t^2 = b$$

Setter vi dette sammen har tangenten ligning $y = \left(3at^2 - 2t\right)x + t^2 - 2at^3$.

Dette er uttrykket vi skulle komme frem til.

Med CAS:

CAS

1	g(x):=a*x^3-x^2 → $g(x) := a\,x^3 - x^2$
2	P:=(t,g(t)) → $P := \left(t, a\,t^3 - t^2\right)$
3	Tangent[P, g] → $y = -2\,a\,t^3 + 3\,a\,t^2\,x + t^2 - 2\,t\,x$

b)

Bruk CAS til å bestemme koordinatene til Q, uttrykt ved a og t.

Løsningsforslag b)

Vi løser $g(x) = \left(3at^2 - 2t\right)x + t^2 - 2at^3$ i GeoGebra.

Den ene løsningen er $x = t$, altså tangeringspunktet P.

Den andre er når $x = \frac{-2at+1}{a}$. Vi regner ut $g\left(\frac{-2at+1}{a}\right)$ i CAS:

CAS

4 f(x):=HøyreSide[$3]

→ $f(x) := -2\,a\,t^3 + 3\,a\,t^2\,x + t^2 - 2\,t\,x$

5 g(x)=f(x)

Løs: $\left\{x = t, x = \frac{-2\,a\,t + 1}{a}\right\}$

6 g(HøyreSide[$5,2])

→ $\frac{-8\,a^2\,t^3 + 8\,a\,t^2 - 2\,t}{a}$

Svar: $Q = \left(\frac{-2at+1}{a}, \frac{-8a^2t^3+8at^2-2t}{a}\right)$