REA3022 2014 Vår

Eksamenstid:

5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.

- Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng) Nettkode: E-4CZW

Deriver funksjonene

a)

$f\,(x) = \ln\left(x^2 + x\right)$

Løsningsforslag a)

$\left(\ln\left(x^2 + x\right)\right)' = \left(x^2 + x\right)' \cdot \frac{1}{x^2+x}$

Svar: $\underline{\underline{\frac{2x+1}{x^2+x}}}$

b)

$g\,(x) = x \cdot e^x$

Løsningsforslag b)

$(uv)' = u'v + uv'$

$(x \cdot e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1 + x)$

Svar: $\underline{\underline{e^x(1 + x)}}$

c)

$h\,(x) = \left(x^2 + 3\right)^4$

Løsningsforslag c)

$\left(\left(x^2 + 3\right)^4\right)' = \left(x^2 + 3\right)' \cdot 4\left(x^2 + 3\right)^3$

$\left(2x\right) \cdot 4\left(x^2 + 3\right)^3$

Svar: $\underline{\underline{8x\left(x^2 + 3\right)^3.}}$

Oppgave 2 (5 poeng) Nettkode: E-4D00

Polynomfunksjonen P er gitt ved

$P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8 \quad , \quad D_P = \mathbb{R}$

a)

Det kan vises at alle heltallige løsninger av $P(x) = 0$ går opp i konstantleddet (-8).

Bruk dette til å finne et nullpunkt.

Løsningsforslag a)

Vi setter inn 1 først.
$P(1) = 1 - 7 + 14 - 8 = 0$

$x = 1$ gir et nullpunkt. Vi trenger bare ett nullpunkt, så vi er ferdige. Hadde ikke $x = 1$ passet hadde vi prøvd $x = -1, x = 2, x = -2$ osv.

Svar: $\underline{\underline{x = 1 \text{ gir et nullpunkt av } P(x).}}$

b)

Faktoriser $P(x)$ i førstegradsfaktorer.

Løsningsforslag b)

Vi utfører polynomdivisjonen $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 : x - 1$

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 - 7x^2 + 14x - 8 \right) : \left(x - 1 \right) = x^2 - 6x + 8 \\
\underline{\;-x^3 \;\; + x^2\;} \\
\qquad\quad -6x^2 + 14x \\
\qquad\quad \underline{\;\;6x^2 \;\; - 6x\;} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; 8x - 8 \\
\qquad\qquad\qquad\; \underline{-8x + 8} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}
$$

Vi vet da at $P\left(x\right) = \left(x - 1\right)\left(x^2 - 6x + 8\right)$
Vi faktoriserer $\left(x^2 - 6x + 8\right)$ ved å løse $x^2 - 6x + 8 = 0$ med abc-formelen.
$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = 3 \pm 1$

Altså er $x = 2$ og $x = 4$ nullpunkter av $x^2 - 6x + 8$ og dermed også av $P(x)$.
Dette gir oss faktorene $(x - 2)$ og $(x - 4)$

Svar: $\underline{\underline{P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 4)}}$

c)

Løs ulikheten $\frac{x^3-7x^2+14x-8}{x^2-1} \geq 0$

Løsningsforslag c)

Vi deler opp ulikheten i lineære faktorer.

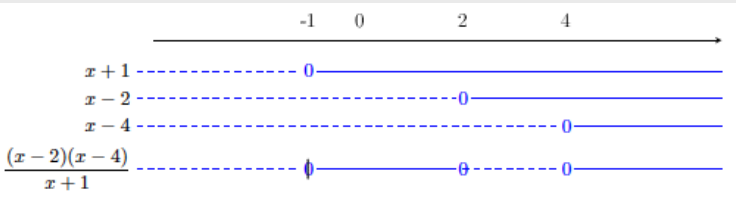
$$\frac{x^3-7x^2+14x+8}{x^2-1} \geq 0$$

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{(x-2)(x-4)}{x+1} \geq 0$$

Vær obs på at når $x = -1$ OG $x = 1$ er ikke funksjonen definert.

Vi tegner fortegnslinjen for uttrykket.



Husk, $x = -1$ og $x = 1$ er ikke en løsning, da funksjonen ikke er definert der.

Svar: $\frac{(x-2)(x-4)}{x+1} \geq 0$ når $x \in \langle -1, 1\rangle \cup \langle 1, 2] \cup [4, \rightarrow\rangle$

Oppgave 3 (4 poeng) Nettkode: E-4D04

Vektorene $\vec{a} = [-2, 1]$, $\vec{b} = [3, 6]$ og $\vec{c} = [k-1, 4]$ er gitt, der $k \in \mathbb{R}$.

a)

Bestem $-2\vec{a} + \vec{b}$ og $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ved regning.

Løsningsforslag a)

$-2\vec{a} + \vec{b} = -2\left[-2, 1\right] + \left[3, 6\right] = \left[7, 4\right]$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 3 + 1 \cdot 6 = 0$

Svar: $\underline{\underline{-2\vec{a} + \vec{b} = \left[7, 4\right]}}$ og $\underline{\underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0}}$

b)

Bestem k slik at $\vec{b} \parallel \vec{c}$

Løsningsforslag b)

$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

$[-2, 1] \cdot [k-1, 4] = -2(k-1) + 4 = 0$

$-2k = -6$

$k = 3$

Svar: $\underline{\underline{k = 3}}$.

c)

Bestem k slik at $\left|\vec{c}\right| = \left|2\vec{a}\right|$

Løsningsforslag c)

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{(k-1)^2 + 4^2} = \sqrt{16 + (k-1)^2}$$

$$\left|2\vec{a}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 2^2}$$

$|\vec{c}| = |2\vec{a}|$ når $(k-1)^2 = 2^2$

$k^2 - 2k + 1 = 4$

$k^2 - 2k - 3 = 0$

$$k = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot(-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2$$

Svar: $k = -1$ og $k = 3$.

Oppgave 4 (4 poeng) Nettkode: E-4D08

Funksjonen f er gitt ved

$f(x) = 3x^4 - 6x^2 \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$

a)

Bestem nullpunktene til f .

Løsningsforslag a)

Vi faktoriserer $f(x)$.

$f\left(x\right) = 3x^2\left(x^2 - 2\right)$

Vi deler $x^2 - 2$ opp i lineære faktorer, enten ved abc-formelen eller ved direkte bruk av konjugatsetningen.

$f\left(x\right) = 3x^2\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$

Vi får nullpunktene $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$ og $x = 0$. Merk at fjerdegradspolynomet bare har tre forskjellige røtter, fordi $x = 0$ er en rot av multiplisitet 2.

Svar: f har nullpunkter i $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$ og $x = 0$

b)

Bestem $f'(x)$. Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

Løsningsforslag b)

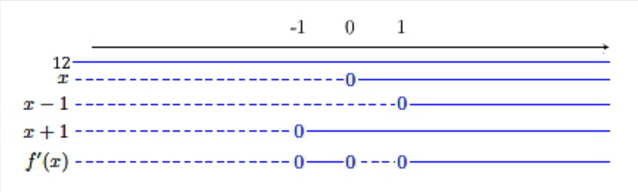
$f'\left(x\right) = 4 \cdot 3x^3 - 2 \cdot 6x$

$f'\left(x\right) = 12x^3 - 12x = 12x\left(x^2 - 1\right)$

Vi faktoriserer $x^2 - 1$ på samme måte som vi faktoriserte $x^2 - 2$ i deloppgave **a)**.

$f'(x) = 12x(x - 1)(x + 1)$

Vi tegner fortegnslinjen til $f'(x)$.



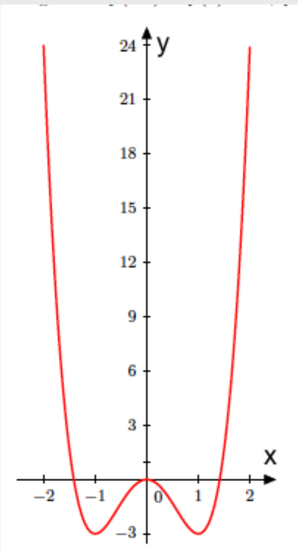
Fra fortegnslinjen ser vi at $x = -1$ og $x = 1$ gir bunnpunkt, og $x = 0$ gir et toppunkt. Vi regner ut funksjonsverdien i punktene. $f(1) = -3, f(-1) = -3, f(0) = 0$

Svar: $f'(x) = 12x^3 - 12x$. f har toppunkt i $(0,0)$ og bunnpunkt i $(-1,-3)$ og $(1,-3)$.

c)
Tegn en skisse av grafen til f for $x \in \langle -2, 2 \rangle$.

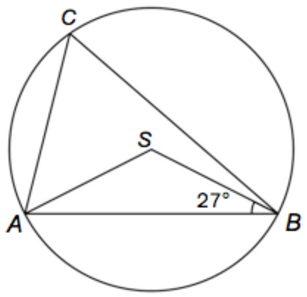
Løsningsforslag c)

Vi regner ut $f(-2) = f(2) = 24$, $f(-1) = f(1) = -3$, og $f(0) = 0$.



Oppgave 5 (2 poeng) Nettkode: E-4D0D

En ΔABC er innskrevet i en sirkel med sentrum S der $\angle ABS = 27^\circ$. Bestem $\angle ACB$ ved et geometrisk resonnement.



Løsningsforslag

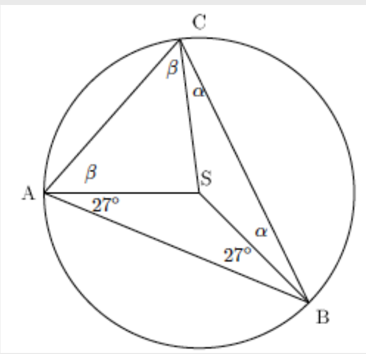
Alternativ 1, løsning og svar:

$\angle BSA = 180^\circ - 27^\circ - 27^\circ = 126^\circ$

Sentralvinkelteoremet gir oss at $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle BSA = 63^\circ$

Alternativ 2, løsning og svar:

Vi trekker linjen CS og gir de ukjente vinklene navn, som vist under.



Vinkelsummen av $\triangle ABC = 180^\circ = 27^\circ + 27^\circ + 2\alpha + 2\beta$

$90^\circ - 27^\circ = \alpha + \beta$

$\angle ACB = \alpha + \beta = 63^\circ$

Oppgave 6 (3 poeng) Nettkode: E-4D0F

La p være et oddetall større enn 1.

a)

Forklar at $\frac{p+1}{2}$ og $\frac{p-1}{2}$ begge er hele tall.

Løsningsforslag a)

Svar: Vi får oppgitt at $p > 1$ og at p er et oddetall. Siden p er et oddetall er både $p + 1$ og $p - 1$ partall. Altså er begge tallene dividerbar med 2, så $\frac{p+1}{2}$ og $\frac{p-1}{2}$ er heltall.

b)

Regn ut $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$.

Bruk resultatet til å skrive 151 som differansen mellom to kvadrattall.

Løsningsforslag b)

$$\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{(p+1)^2-(p-1)^2}{4} = \frac{p^2+2p+1-\left(p^2-2p+1\right)}{4}$$

Vi stryker felles ledd og står bare igjen med $\frac{4p}{4} = p$

$$\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = p$$

Vi skal skrive 151 som differansen mellom to kvadrattall. Vi merker oss at 151 er et oddetall som er rikelig større enn 1. Vi kan da sette inn 151 for p i formelen. Formelen holder uansett, men siden vi har et oddetall større enn 1 blir begge leddene heltall.

$$151 = \left(\frac{151+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{151-1}{2}\right)^2$$

$$151 = 76^2 - 75^2$$

Svar: $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = p$, og $151 = 76^2 - 75^2$.

Oppgave 7 (2 poeng) Nettkode: E-4D0I

Funksjonen h er gitt ved

$h(x) = x^x \quad , \quad x > 0$

a)
Forklar at vi kan skrive

$h(x) = e^{x \cdot \ln\ x}$

Løsningsforslag a)

I denne oppgaven betyr det at $x = e^{\ln x}$.

Svar: For alle funksjoner f er $e^{\ln(f)} = f$. Vi bruker også potensregelen $\ln(a^p)^q = a^{p \cdot q}$.
Vi har dermed også for $h(x)$ at

$x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x \ln x}$

b)
Bestem $h'(x)$.

Løsningsforslag b)

$h'(x) = \left(e^{x \cdot \ln(x)}\right)'$

Når vi deriverer e^f for en funksjon f får vi $f' \cdot e^f$. I vårt tilfelle er $f = x \ln x$.

$h'(x) = \left(x \cdot \ln(x)\right)' \cdot e^{x \cdot \ln(x)}$

$\left(x \cdot \ln(x)\right)' = 1 \cdot \ln\ x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln\ x + 1$

Vi setter inn dette i uttrykket for $h'(x)$.

$h'(x) = \left(\ln x + 1\right) \cdot e^{x \cdot \ln(x)} = \left(\ln x + 1\right) \cdot x^x$

Svar: $h'(x) = (\ln x + 1) \cdot x^x$

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng) Nettkode: E-4D0L

Tre punkter $A(1,\ 3)$, $B(5,\ -1)$ og $C(4,\ 4)$ er gitt.

a)

Bestem et punkt D på y-aksen slik at $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{BA}$.

Løsningsforslag a)

La $D(0, b)$ være et generelt punkt på y-aksen.

$$\vec{CD} = \left[-4, b-4\right]$$

$$\vec{BA} = \left[1-5, 3-\left(-1\right)\right] = \left[-4, 4\right]$$

Siden x-koordinatene er like i vektorene (og ikke null) må også y-koordinatene være like. Dermed er $b - 4 = 4$

$b = 8$.

Svar: $\underline{\underline{D(0, 8)}}$

b)

La M være midtpunktet på BC. Bestem koordinatene til M.

Løsningsforslag b)

Vektoren fra origo til M er lik vektorsummen vi får ved å først gå fra origo til B, og gå halve veien til C.

$$\vec{BC} = \left[4-5, 4-\left(-1\right)\right] = \left[-1, 5\right]$$

$$\vec{OB} = \left[5, -1\right]$$

$$\vec{OM} = \vec{OB} + \tfrac{1}{2}\vec{BC} = \left[5, -1\right] + \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2}\right]$$

$$\vec{OM} = \left[5 - \tfrac{1}{2}, -1 + \tfrac{5}{2}\right]$$

$$\vec{OM} = \left[\tfrac{9}{2}, \tfrac{3}{2}\right]$$

Svar: $\underline{\underline{M\left(\tfrac{9}{2}, \tfrac{3}{2}\right)}}$

c)

Punktet P er gitt slik at $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MP}$.

Bestem ved regning koordinatene til P.

Løsningsforslag c)

$\vec{AM} = \left[\frac{9}{2} - 1, \frac{3}{2} - 3\right] = \left[\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right]$

$3 \cdot \vec{AM} = \vec{MP}$

$\vec{MP} = \left[\frac{21}{2}, -\frac{9}{2}\right]$

La $P(\alpha, \beta)$ være et generelt punkt i planet. Da er $\vec{MP} = \left[\alpha - \frac{9}{2}, \beta - \frac{3}{2}\right]$

$\vec{MP} = \left[\frac{21}{2}, -\frac{9}{2}\right] = \left[\alpha - \frac{9}{2}, \beta - \frac{3}{2}\right]$

$\alpha - \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$ og $\beta - \frac{3}{2} = -\frac{9}{2}$

$\alpha = \frac{30}{2}$ og $\beta = -\frac{6}{2}$

$(\alpha, \beta) = \left(\frac{30}{2}, -\frac{6}{2}\right) = (15, -3)$

Svar: P har koordinater $(15, -3)$.

Oppgave 2 (6 poeng) Nettkode: E-4D0P

I en klasse er det 12 gutter og 16 jenter. Det skal trekkes ut en gruppe på 5 elever på en tilfeldig måte.

a

Bestem sannsynligheten for at det blir med akkurat én gutt i gruppen.

Løsningsforslag a

$$\frac{\binom{12}{1}\cdot\binom{16}{4}}{\binom{28}{5}} = \frac{2}{9} \approx 0{,}22$$

Svar: Sannsynligheten for akkurat 1 gutt er $\frac{2}{9}$

b)

Sannsynligheten er $\frac{44}{117}$ for at et bestemt antall gutter blir med i gruppen.

Hvor mange gutter blir det da med i gruppen?

Løsningsforslag b)

CAS:

CAS

1 nCr[12, x]*nCr[16, 5-x]/nCr[28, 5]=44/117

Løs: $\{x = 2, x = 2.19\}$

Bare den heltallige løsningen er relevant.

Svar: 2 gutter.

c)

Arne og Betsy går i klassen. Vi definerer følgende hendelser:

A: Arne blir med i gruppen.

B: Betsy blir med i gruppen.

Forklar at $P(A|B) = \dfrac{\binom{1}{1} \cdot \binom{26}{3}}{\binom{27}{4}}$ og bestem sannsynligheten.

Løsningsforslag c)

Det finnes akkurat $\binom{1}{1} = 1$ måte å velge Arne. Det finnes $\binom{26}{3}$ måter å velge tre andre elever fra de resterende 26 elevene som ikke er Arne eller Betsy.

$$P(A|B) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{26}{3}}{\binom{27}{4}} = \frac{4}{27}$$

Svar: $P(A|B) = \frac{4}{27}$

Oppgave 3 (6 poeng) Nettkode: E-4D0T

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 6x \cdot e^{-\frac{x^2}{8}} \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

a)

Bruk produktregelen og kjerneregelen til å vise at

$$f'(x) = \frac{3}{2}\left(4 - x^2\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$$

Løsningsforslag a)

$$f\left(x\right) = 6x \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$$

Når vi deriverer $e^{-\frac{x^2}{8}}$ bruker vi kjerneregelen. $(e^u)' = u' \cdot e^u$.
Vi har $u = -\frac{x^2}{8}$ som kjerne, med $u' = -\frac{x}{4}$

$$f'\left(x\right) = \left(6x\right)' \cdot e^{-\frac{x^2}{8}} + 6x \cdot \left(e^{-\frac{x^2}{8}}\right)'$$

$$f'\left(x\right) = 6 \cdot e^{-\frac{x^2}{8}} + 6x \cdot \left(-\frac{x}{4}\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$$

$$f'\left(x\right) = 6 \cdot e^{-\frac{x^2}{8}} - \frac{6x^2}{4} \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$$

$$f'\left(x\right) = \left(6 - \frac{3x^2}{2}\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$$

$$f'\left(x\right) = \frac{3}{2}\left(4 - x^2\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$$

b)

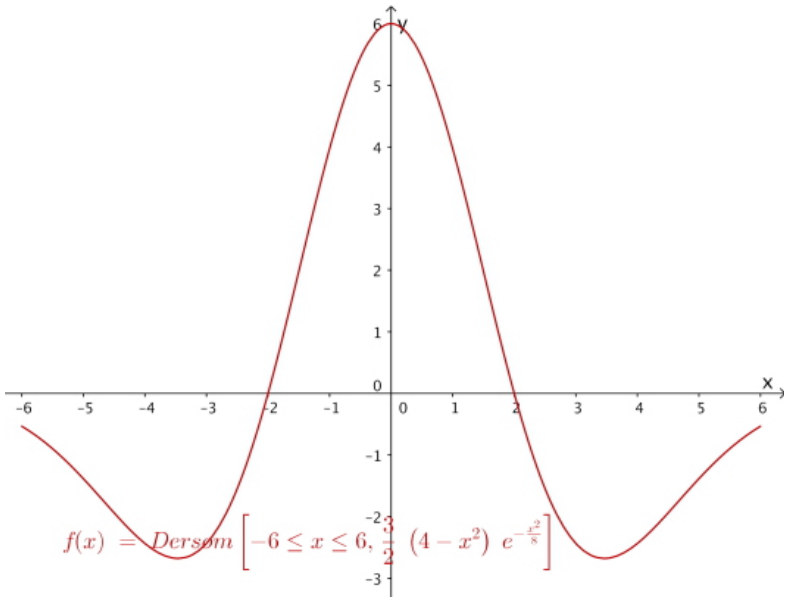
Tegn grafen til f' for $x \in \langle -6, 6 \rangle$.

Løsningsforslag b)

Vi skrive inn kommandoen **Funksjon[<Funksjon>, <Start>, <Slutt>]** inn i kommandofeltet.

Dessuten bytter vi ut **<Funksjon>** med $(3/2)\,(4 - x\text{^}2)e\text{^}(-((x\text{^}2)/8))$, og **<Start>** med -6 og **<Slutt>** med 6.

Svar:



c)

Bruk grafen til f' til å bestemme eventuelle topp-, bunn- og vendepunkter på grafen til f.

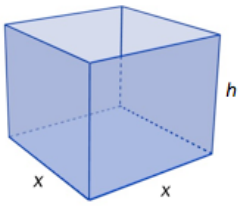
Løsningsforslag c)

Vi ser at $f' = 0$ i $x = -2$ og $x = 2$. Siden $f' < 0$ før $x = -2$ og $f' > 0$ etter $x = -2$ gir dette et bunnpunkt. Motsatt gir $x = 2$ et toppunkt. Der grafen til $f'(x)$ har ekstramalpunkt er $f''(x) = 0$. Det skjer i $x = 0$ og $x = \pm 3,46$.

Svar: f har toppunkt i $(2, f(2)) = (2, 7.28)$, og bunnpunkt i $(-2, f(-2)) = (-2, -7.28)$. f har tre vendepunkt i intervallet
1) $(0, f(0)) = (0, 0)$
2) $(-3.46, f(-3.46)) = (-3.46, -4.65)$
3) $(3.46, f(3.46)) = (3.46, 4.65)$

Oppgave 4 (6 poeng) Nettkode: E-4D0Y

Vi skal lage et kar med form som et rett prisme uten lokk. Grunnflaten skal være et kvadrat med side x dm, og karet skal ha høyde h dm. Vi vil lage karet slik at det samlede overflatearealet blir 12 dm^2 .



a)

Forklar at $x^2 + 4xh = 12$. Bestem et uttrykk for h .

Løsningsforslag a)

Overflatearealet til figuren er 12 dm^2. Overflaten består av en bunn, fire sider, og ikke noe tak. Altså er overflatearealet $A_{\text{bunn}} + 4A_{\text{side}}$
Bunnen har areal x^2 . En side har areal $x \cdot h$.
$12 = x^2 + 4xh$

Vi isolerer h.

$h = \frac{12-x^2}{4x}$

Svar: $h = \frac{12-x^2}{4x}$.

b)

Bestem hvilke verdier x kan ha.

Løsningsforslag b)

Vi skal løse $12 - x^2 > 0$. x kan ikke være null eller mindre. Om x er null blir det ingen boks. Det samme gjelder om $h = 0$. Om $x \geq \sqrt{12}$ blir $h \leq 0$. Dermed er $x \in < 0, \sqrt{12} >$

Svar: $x \in < 0, \sqrt{12} >$.

c)

Bestem et uttrykk for volumet $V(x)$ av karet.

Løsningsforslag c)

$V(x) = x^2 \cdot h$

Vi setter inn uttrykket for h som vi fant i oppgave **a)**.

$$V\left(x\right) = x^2 \cdot \left(\frac{12-x^2}{4x}\right)$$

$$V\left(x\right) = \frac{12x-x^3}{4}$$

Svar: $\underline{\underline{V\left(x\right) = \frac{12x-x^3}{4}}}$.

d)

Vi ønsker å fylle vann i karet. Bestem ved regning x slik at karet rommer mest mulig vann.

Hvor mange liter blir det da plass til?

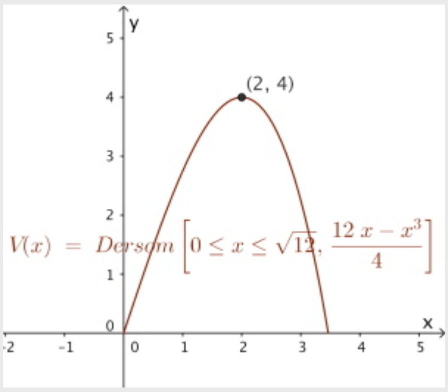
Løsningsforslag d)

Vi finner toppunktet til $V(x)$, enten i Geogebra, eller ved å løse $V'(x) = 0$.
$V'(x) = 3 - \frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{4}(4 - x^2) = \frac{3}{4}(2 - x)(2 + x)$
$x = \pm 2$, men vi ser bare etter positive x-verdier. $V(x)$ har et ekstremalpunkt i $(2, V(2)) = (2, 4)$.

Husk at $4\text{dm}^3 = 4\text{L}$, ettersom det spørres etter liter i oppgaven. For å se at det er et toppunkt kan vi tegne grafen i Geogebra, eller lage et fortegnsskjema. Vi tegner grafen i GeoGebra. Først skriver vi inn funksjonen og deretter velger

Ekstremalpunkt[<Funksjon>, <Start>, <Slutt>]

Vi får:

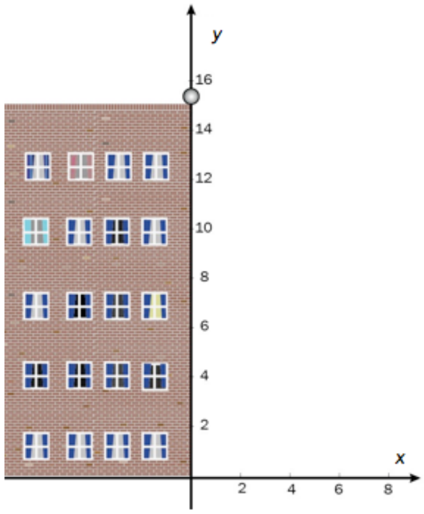


$V(x)$ har et toppunkt i $(2, V(2)) = (2, 4)$.

Svar: Volumet er størst når $x = 2$. Da er det plass til 4L vann i karet.

Oppgave 5 (7 poeng) Nettkode: E-4D14

En liten ball triller horisontalt utfor et flatt tak, 15,0 m over bakken.



Posisjonsvektoren til ballen t sekunder etter at den har forlatt taket, er

$\vec{r}\,(t) = \left[3t,\ 15 - 4{,}9t^2\right]$

a)
Hvor lang tid tar det før ballen treffer bakken?

Løsningsforslag a)

Vi løser ligningen $15 - 4,9t^2 = 0$
$t = \pm 1,75$

Vi ser bare etter positive løsninger, altså treffer ballen bakken etter $1{,}75$ sekunder.

Svar: Ballen treffer bakken etter $1{,}75$ sekunder.

b)

Tegn grafen til $\vec{r}$.

Løsningsforslag b)

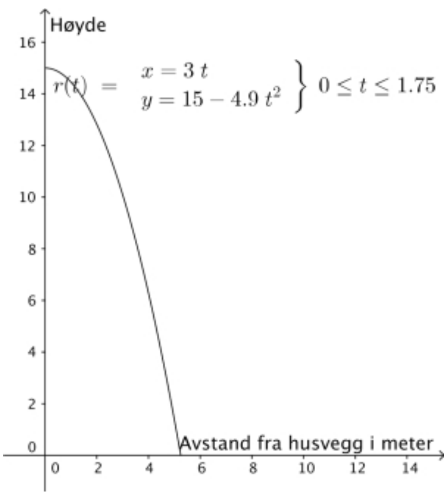
Vi tegner den parametriske kurven i GeoGebra med kommandoen

Kurve[<Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt>]

$$\text{Kurve}\left[3t, 15 - 4.9t^2, t, 0, 1.75\right]$$

Husk å stille inn antall desimaler.

Svar:



c)

Bestem farten til ballen etter $0,\ 8$ s. Tegn inn fartsvektoren $\vec{v}\ (0,\ 8)$ i det aktuelle punktet på grafen til $\vec{r}$.

Løsningsforslag c)

Vi finner $\vec{r}\,'(t) = \vec{v}(t) = [3, -2 \cdot 4,9t] = [3, -9,8t]$

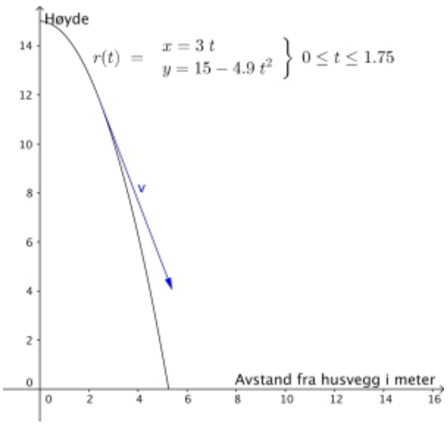
$\vec{v}(0,8) = [3, -7.84]$

Farten til ballen etter $0{,}8$ sekund er $|\vec{v}(0,8)| \approx 8,39$ m/s For å tegne fartsvektoren i GeoGebra trenger vi et start, og sluttpunkt. Vi starter i $\vec{r}(0,8)$, og slutter i $\vec{r}(0,8) + \vec{v}(0,8)$. På denne måten får vektoren riktig størrelse, i tillegg til retning.

Vektor$[r(0.8), r(0.8) + (3, -7.84)]$

$$\left|\vec{v}\left(0,8\right)\right| = \sqrt{3^2 + \left(-7,84\right)^2} \approx 8,39$$

Svar: Farten etter $0{,}8$ sekund er $|\vec{v}(0,8)| \approx 8,39$ m/s.



d)

Bestem akselerasjonen $\overrightarrow{a}\ (t)$. Tegn inn akselerasjonsvektoren $\overrightarrow{a}\ (0,\ 8)$ i det aktuelle punktet på grafen til $\overrightarrow{r}$.

Løsningsforslag d)

$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = [0, -9,8]$.

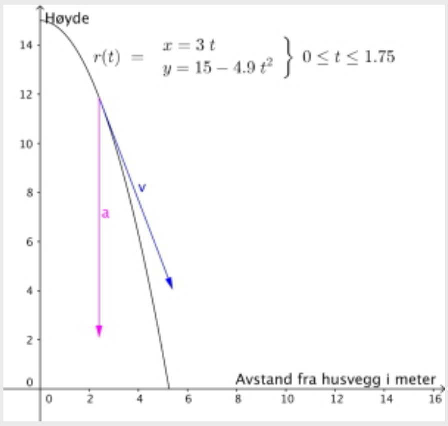
For å tegne inn akselerasjonsvektoren bruker vi samme fremgangsmåte som for fartsvektoren.

Vi trenger et startpunkt og et sluttpunkt. Vi starter i $\vec{r}(0,8)$ og ender i $\overrightarrow{r} = (0,8) + \overrightarrow{a}\ (0,8)$.

I GeoGebra velger vi kommandoen

Vektor[<Startpunkt>, <Sluttpunkt>]

Vi skriver inn Vektor$[r(0.8), r(0.8) + (0, -9.8)]$ for å plotte vektoren.



Svar: $\vec{a}(t) = [0, -9,8]$.

Oppgave 6 (5 poeng) Nettkode: E-4D19

Vi skal løse likningen nedenfor med hensyn på x

$n^n \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{\lg\ x} = x^n \quad , \quad x > 0\,,\ n > 0$

a)

Vis at denne likningen kan omformes til

$\lg\left(\frac{x}{n}\right)^{\lg\ x} = \lg\left(\frac{x}{n}\right)^n$

Løsningsforslag a)

Svar: $n^n\left(\frac{x}{n}\right)^{\lg x} = x^n$

Vi deler på n^n på begge sider. $\left(\frac{x}{n}\right)^{\lg x} = \left(\frac{x}{n}\right)^n$

Tar vi logaritmen av hver side har vi uttrykket vi leter etter. lg$\lg\left(\frac{x}{n}\right)^{\lg x} = \lg\left(\frac{x}{n}\right)^n$

b)

Vis at likningen videre kan skrives

$(\lg\ x - n) \cdot (\lg\ x - \lg\ n) = 0$

Løsningsforslag b)

Svar: Vi bruker først at $\lg a^b = b \cdot \lg a$. Likningen vår omformes slik:

$\lg\left(\frac{x}{h}\right)^{\lg x} = \lg\left(\frac{x}{n}\right)^n \lg x \cdot \lg\frac{x}{n} = n \cdot \lg\frac{x}{n}$

$\lg x \cdot \lg\frac{x}{n} - n \cdot \lg\frac{x}{n} = 0$

$(\lg x - n) \cdot \lg\frac{x}{n} = 0$

Vi bruker nå logaritmeregelen at $\lg\frac{a}{b} = \lg a - \lg b$ til å skrive om $\lg\frac{x}{n}$.

$(\lg x - n) \cdot (\lg x - \lg n) = 0$

c)

Bruk likningen i oppgave b) til å bestemme x uttrykt ved n .

Løsningsforslag c)

Vi løser $(\lg x - n) \cdot (\lg x - \lg n) = 0$.

Uttrykket er bare null om en av parentesene er null. Altså enten når

1) $\lg x - n = 0$ eller
2) $\lg x - \lg n = 0$

1):

$\lg x - n = 0$

$\lg x = n$

$x = 10^n$

2):

$\lg x = \lg n$

$x = n$

Svar: Likningen har to løsninger, $\underline{\underline{x = 10^n \text{ og } x = n}}$.