REA3022 2013 Vår

Eksamenstid:

5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.

- Hippokrates (Utdanningsdirektoratet)
- Alle grafer og figurer (Utdanningsdirektoratet)

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng) Nettkode: E-4CWU

Formlene for arealet A av en sirkel og volumet V av en kule med radius r er gitt ved

$A(r) = \pi r^2$ og $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

Bestem $A'(r)$ og $V'(r)$.

Oppgave 2 (3 poeng) Nettkode: E-4CWW

Deriver funksjonene

a)
$g(x) = 3\ln\left(x^2 - 1\right)$

b)
$h(x) = \frac{2x^2}{e^x}$

Oppgave 3 (5 poeng) Nettkode: E-4CWZ

Polynomfunksjonen P er gitt ved

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

a)
Vis at $P(1) = 0$

b)
Bruk blant annet polynomdivisjon til å faktorisere $P(x)$ i førstegradsfaktorer.

c)
Løs ulikheten $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leq 0$

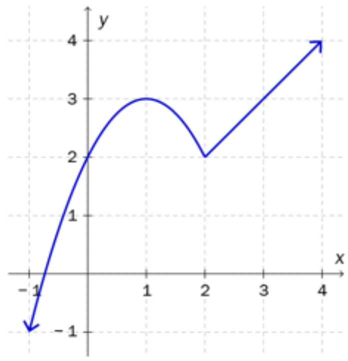
Oppgave 4 (2 poeng) Nettkode: E-4CX3

Skriv så enkelt som mulig

$\ln\left(a^2 \cdot b\right) - 2\ln\, a - \ln\left(\frac{1}{b}\right)$

Oppgave 5 (2 poeng) Nettkode: E-4CX6

Figuren nedenfor viser grafen til en funksjon f der $D_f = \langle -1, 4 \rangle$



Avgjør for hvilke x-verdier f er kontinuerlig, og for hvilke x-verdier f er deriverbar.

Oppgave 6 (3 poeng) Nettkode: E-4CX8

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 2$$

Vis at grafen til f har en vendetangent i punktet $(-2, f(-2))$ med likning $y = -12x - 10$

Oppgave 7 (3 poeng) Nettkode: E-4CXA

Vektorene $\vec{a} = [2, 3]$, $\vec{b} = [-6, 4]$ og $\vec{c} = [3, 11]$ er gitt.

a)

Undersøk om $\vec{a} \perp \vec{b}$

b)

Bestem ved regning to tall k og t slik at $\vec{c} = k\vec{a} + t\vec{b}$

Oppgave 8 (4 poeng) Nettkode: E-4CXE

Hippokrates fra Khios (ca. 470–410 f.Kr.) var trolig den første greske matematikeren som skrev en lærebok i geometri, 100 år før Euklid.

Grekerne forsøkte å konstruere et kvadrat som hadde like stort areal som en sirkel (*sirkelens kvadratur*).

Hippokrates-månen (i blå farge nedenfor) var en del av dette forsøket.

Kilde: Proclus, *Kommentar til Euklid I*

På figuren nedenfor er ACB en halvsirkel med sentrum i O, og AEC er en halvsirkel med sentrum i D. $\angle CAB = \angle ABC = 45^\circ$

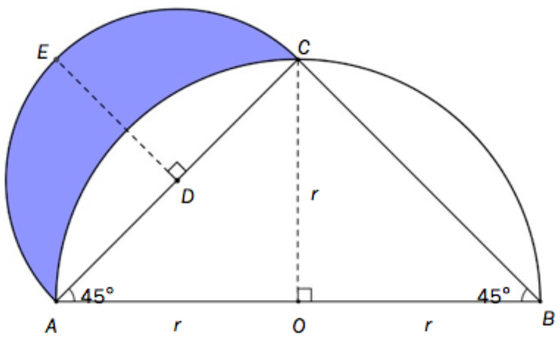
a)

Konstruer figuren nedenfor når du setter $r = 5{,}0$ cm . Ta med konstruksjonsforklaring.

b)

På figuren nedenfor har Hippokrates-månen blå farge.

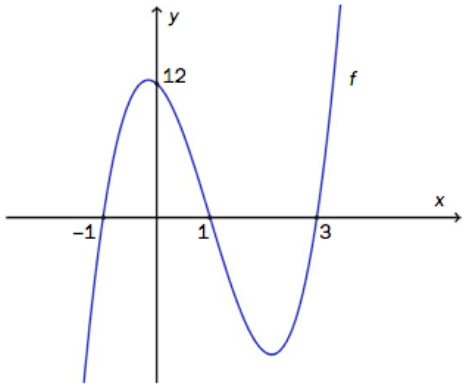
Vis ved regning at arealet av Hippokrates-månen er lik arealet av ΔAOC når radien i halvsirkelen ACB er r.



DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (7 poeng) Nettkode: E-4CXK

Figuren nedenfor viser grafen til en tredjegradsfunksjon f.



a)
Forklar at $f(x)$ er delelig med $(x-1)$, $(x+1)$ og $(x-3)$.

Begrunn at vi da kan skrive

$f(x) = a\left(x^2-1\right)(x-3)$, der a er en konstant.

Bestem a når punktet $(0,\ 12)$ ligger på grafen til f .

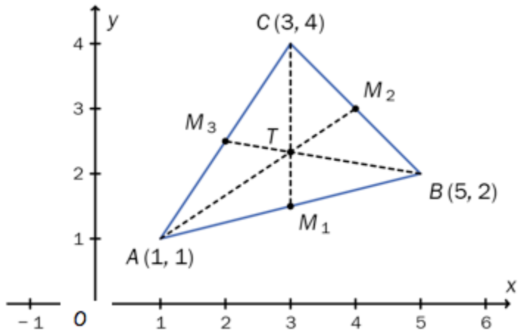
b)
Bestem likningen til tangenten i punktet $(0,\ 12)$.

c)
Denne tangenten skjærer grafen til f i et annet punkt.

Bestem ved regning koordinatene til dette punktet.

Oppgave 2 (6 poeng) Nettkode: E-4CXP

Se skissen nedenfor.



a)

Midtpunktene på sidekantene i ΔABC er M_1 , M_2 og M_3.

Vis ved regning at M_1 har koordinatene $\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$. Bestem koordinatene til M_2 og M_3 ved regning.

b)

Bestem en parameterframstilling til linjen gjennom A og M_2 og en parameterframstilling til linjen gjennom C og M_1 .

c)

Tyngdepunktet T i trekanten er skjæringspunktet mellom medianene.

Bestem koordinatene til T .

Oppgave 3 (7 poeng) Nettkode: E-4CXT

En partikkel har posisjonsvektoren

$$\vec{r}(t) = \left[\ln t,\ t^2 - 4t\right], \quad t > 0$$

a)

Tegn grafen til $\vec{r}$ og bestem skjæringspunktene med koordinataksene ved regning

b)

Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og bruk denne til å bestemme eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til $\vec{r}$. Tegn inn $\vec{v}(1)$ på grafen.

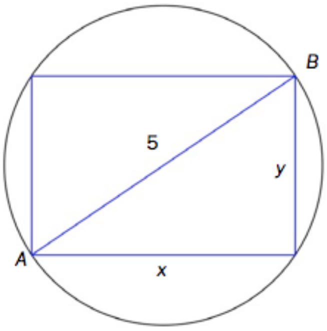
c)

Vis at akselerasjonsvektoren er $\vec{a}(t) = \left[-\frac{1}{t^2},\ 2\right]$. Bestem $\vec{a}(t)$ når $t \to \infty$.

Kommenter svaret.

Oppgave 4 (8 poeng) Nettkode: E-4CXY

Et rektangel med sider x og y er innskrevet i en sirkel med diameter $AB = 5$.



a)

Vis at arealet T av rektangelet er gitt ved

$$T(x) = x \cdot \sqrt{25 - x^2}$$

Forklar hvilke verdier x kan ha.

b)

Bestem x og y når arealet er størst mulig.

Kommenter svaret.

c)

Vis at omkretsen til rektangelet er gitt ved

$$O(x) = 2 \cdot \sqrt{25 - x^2} + 2x$$

Bruk $O'(x)$ og bestem x når omkretsen er størst mulig.

Kommenter svaret.

Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4CY2

Vi har røde og svarte kuler i en eske. Vi skal trekke tilfeldig to kuler uten tilbakelegging. Vi definerer følgende hendelser:

A: Vi trekker to kuler med ulik farge.

B: Vi trekker to kuler med samme farge.

Anta at vi har 6 røde og 4 svarte kuler i esken.

a)
Bestem $P(A)$.

b)
Bestem $P(B)$.

c)
Anta at vi har 6 røde og et ukjent antall svarte kuler i esken, og at hendelsene A og B skal ha lik sannsynlighet.

Hvor mange svarte kuler kan det være i esken?

Oppgave 6 (2 poeng) Nettkode: E-4CY6

Løs likningen

$$n^2 \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{\lg x} = x^2 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$