# MAT1015 2016 Vår

**Eksamenstid:**

5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

**Hjelpemidler:**

Del 1:

Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

**Framgangsmåte:**
Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Bruk av digitale verktøy som graftegner og regneark skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.

**Veiledning om vurderingen:**
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
- vurderer om svar er rimelige

**Andre opplysninger:**

Kilder for bilder, tegninger osv.

- Solkurve: http://suncurves.com/(15.10.2015)
- Lufttrykk:
  http://skolediskusjon.no/Forums/Thread.aspx?id=1160 (27.06.2015)
  http://www.yr.no/artikkel/mindre-trykk-og-varme-i-hoyden-1.7297472 (27.06.2015) http://www.yr.no/artikkel/hvordan-beregnes-lufftrykket_-1.7150434 (17.10.2015)
  http://naturfag.info/5jorden/b_atmosf.htm (17.10.2015)
- Andre bilder, tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

# DEL 1 Uten hjelpemidler

## Oppgave 1 (3 poeng) Nettkode: E-4CSZ

| Dato | Temperatur |
|---|---|
| 01.03. | $2^\circ\text{C}$ |
| 02.03. | $0^\circ\text{C}$ |
| 03.03. | $-4^\circ\text{C}$ |
| 04.03. | $-6^\circ\text{C}$ |
| 05.03. | $2^\circ\text{C}$ |
| 06.03 | $6^\circ\text{C}$ |

Guro målte temperaturen utenfor hytta de seks første dagene i mars. Se tabellen ovenfor.

Bestem variasjonsbredden, gjennomsnittet og medianen for temperaturmålingene.

**Løsningsforslag**

Vi starter med *variasjonsbredden*, og da må vi finne den høyeste og den laveste målingen. Det var kaldest den $4$. mars; da var temperaturen $-6^\circ\text{C}$. Den $6$. mars var den varmeste dagen med en temperatur på $6^\circ\text{C}$. Variasjonsbredden er forskjellen mellom disse to målingene, altså $12^\circ\text{C}$.

Videre finner vi gjennomsnittet, som vi regner ut ved å legge sammen alle målingene og dividere med antall målinger. Guro målte temperaturen seks ganger, så gjennomsnittet er

$$\begin{aligned}\text{gjennomsnitt} &= \frac{2^\circ\text{C}+0^\circ\text{C}-4^\circ\text{C}-6^\circ\text{C}+2^\circ\text{C}+6^\circ\text{C}}{6} \\ &= \frac{0^\circ\text{C}}{6} = 0^\circ\text{C}.\end{aligned}$$

Til slutt finner vi medianen. Det gjør vi ved å sette opp målingene i stigende (eller synkende) rekkefølge, og ta gjennomsnittet av de to midterste verdiene. Vi setter opp i stigende rekkefølge: $-6^\circ\text{C},\ -4^\circ\text{C},\ 0^\circ\text{C},\ 2^\circ\text{C},\ 2^\circ\text{C},\ 6^\circ\text{C}$De to midterste målingene er $0^\circ\text{C}$ og $2^\circ\text{C}$, så medianen er $\frac{0^\circ\text{C}+2^\circ\text{C}}{2} = 1^\circ\text{C}$.

**Svar:** Variasjonsbredden er $12^\circ\text{C}$, gjennomsnittet er $0^\circ\text{C}$ og medianen er $1^\circ\text{C}$.

## Oppgave 2 (2 poeng) Nettkode: E-4CT2

Det er ca. 7,5 milliarder mennesker på jorda. Anta at hvert menneske trenger 2 L drikkevann hver dag.

Omtrent hvor mange liter drikkevann vil da alle menneskene på jorda til sammen trenge hver måned? Skriv svaret på standardform.

### Løsningsforslag

Et *tall på standardform* er på formen $a \cdot 10^n$ der $a$ er et tall mellom $1$ og $10$, og $n$ er et heltall.

Vi antar at det er $30$ dager i en måned. Det er $7,5$ milliarder, eller $7,5 \cdot 10^9$, mennesker på jorda. Hvis hvert av disse menneskene trenger $2\,\mathrm{L}$ vann per dag, blir det

$$2 \cdot 7,5 \cdot 10^9$$

liter vann per dag, eller

$$30 \cdot 2 \cdot 7,5 \cdot 10^9$$

liter per måned. Dette tallet skal vi skrive på standardform. Det første vi gjør er å gjøre om $30$ til $3 \cdot 10 = 3 \cdot 10^1$, og flytter alt som har med $10$ å gjøre på høyre side i stykket.

$$\left(3 \cdot 2 \cdot 7,5\right) \cdot \left(10^1 \cdot 10^9\right)$$

Deretter regner vi ut hver parentes for seg. Først ser vi at $10^1 \cdot 10^9 = 10^{1+9} = 10^{10}$. Videre ser at $2 \cdot 7,5 = 15$, så $3 \cdot 2 \cdot 7,5 = 3 \cdot 15 = 45$, eller $4,5 \cdot 10^1$. Dermed kan tallet over skrives som

$$4,5 \cdot 10^1 \cdot 10^{10}.$$

Igjen bruker vi potensreglene for potenser med samme grunntall, og vi får

$$4,5 \cdot 10^{1+10} = 4,5 \cdot 10^{11}.$$

**Svar:** $4,5 \cdot 10^{11}$ liter vann per måned, gitt at én måned er 30 dager.

## Oppgave 3 (2 poeng) Nettkode: E-4CT4

I butikk A koster en vare 150 kroner. I butikk B koster den samme varen 120 kroner.

**a)**
Hvor mange prosent høyere er prisen i butikk A sammenliknet med prisen i butikk B?

**Løsningsforslag a)**

I butikk $\mathrm{A}$ koster varen $\frac{150}{120}$ av det den koster i butikk $\mathrm{B}$. Vi kan regne om brøken ved å faktorisere teller og nevner, og deretter forkorte.

$$\frac{150}{120} = \frac{15}{12} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Det er det samme som $125\ \%$. Derfor koster varen $125\ \% - 100\ \% = 25\ \%$ mer i butikk $\mathrm{A}$ enn i butikk $\mathrm{B}$.

**Svar:** $25\ \%$.

**b)**
Hvor mange prosent lavere er prisen i butikk B sammenliknet med prisen i butikk A?

**Løsningsforslag b)**

I butikk $\mathrm{B}$ koster varen $\frac{120}{150}$ av det den kostet i butikk $\mathrm{A}$. Vi regner ut brøken på samme måte som i forrige oppgave, og får

$$\frac{120}{150} = \frac{12}{15} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Det er det samme som $80\ \%$, så prisen til varen i butikk $\mathrm{B}$ er $80\ \%$ av prisen i butikk $\mathrm{A}$. Dermed er prisen i butikk $\mathrm{B}$ $100\ \% - 80\ \% = 20\ \%$ lavere enn i butikk $\mathrm{A}$.

**Svar:** $20\ \%$ lavere.

## Oppgave 4 (1 poeng) Nettkode: E-4CT7

Merverdiavgiften på klær er 25 %. En jakke koster 750 kroner med merverdiavgift.

Hvor mange kroner betaler vi i merverdiavgift dersom vi kjøper denne jakken?

**Løsningsforslag**

Vi viser to metoder å løse oppgaven på. Vi viser metoden der vi bruker *likninger*. Alternativ løsning viser løsningen når vi går veien om 1. Begge løsningsmetodene går ut på det samme, men gir forskjellige innfallsvinkler.

La oss si at jakken i utgangspunktet kostet $x$ kroner. *Merverdiavgiften* er på $25\ \%$, så vi må legge $x \cdot 0,25$ til prisen for å finne utsalgsprisen. Dermed må utsalgsprisen være $x + x \cdot 0,25 = 1,25x$. Vi vet allerede at utsalgsprisen er $750\ \mathrm{kr}$, så vi må ha at

$$1,25x = 750.$$

For å finne den opprinnelige prisen $x$, dividerer vi med $1,25$ på begge sider og forkorter. Da får vi

$$\tfrac{1{,}25x}{1{,}25} = \tfrac{750}{1{,}25}, x = \tfrac{750}{1{,}25}.$$

Vi kan regne ut brøken for hånd, men det kan spare oss tid å se at $1,25 = \frac{5}{4}$ og at $750 = 10 \cdot 75 = 10 \cdot 15 \cdot 5$. Da får vi nemlig at

$$\frac{750}{1,25} = \frac{10 \cdot 15 \cdot 5}{5/4} = \frac{10 \cdot 15 \cdot 5 \cdot 4}{5} = 10 \cdot 15 \cdot 4 = 600.$$

Dermed kostet jakken opprinnelig $600$ kroner. Utsalgsprisen var $750$ kroner, så merverdiavgiften er på $750 - 600 = 150$ kroner.

**ALTERNATIV LØSNING**

**Svar:** 150 kroner.

# Oppgave 5 (5 poeng) Nettkode: E-4CTD

| Alder | Frekvens |
|---|---|
| $[0,10\rangle$ | 40 |
| $[10,20\rangle$ | 20 |
| $[20,30\rangle$ | 60 |
| $[30,50\rangle$ | 20 |
| $[50,60\rangle$ | 20 |
| $[60,80\rangle$ | 40 |
| Sum | 200 |

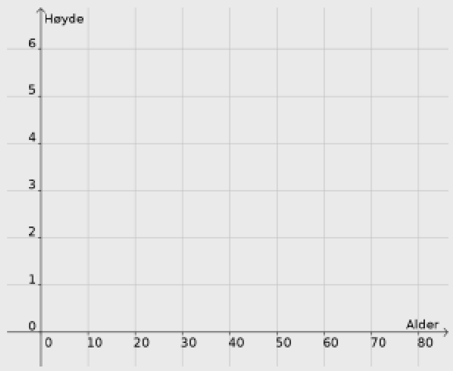
Tabellen ovenfor viser aldersfordelingen for de 200 personene som bor i blokk Z på Tirilltoppen.

**a)**
Lag et histogram som viser aldersfordelingen for personene som bor i blokk Z.

## Løsningsforslag a)

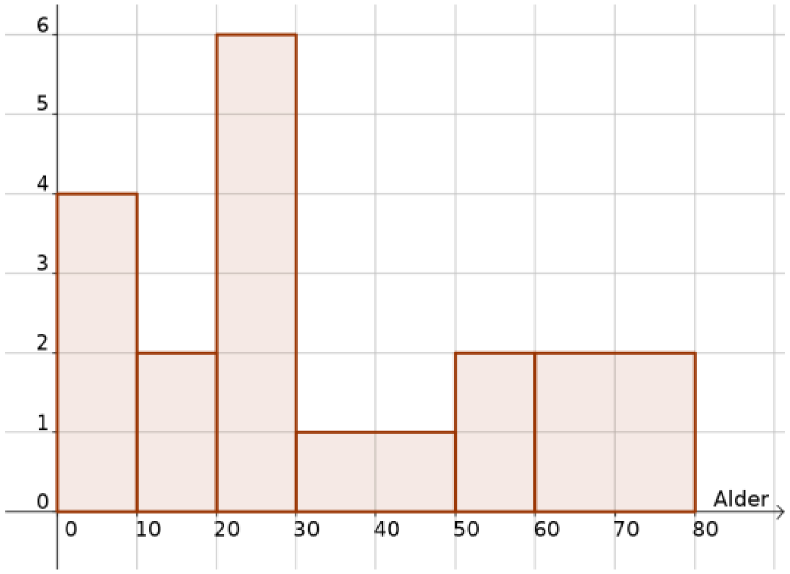
Husk at det er *arealet* til stolpene i *histogrammet* som gir oss informasjon, ikke bare høyden.

Det aller første vi gjør, er å tegne opp et passende *koordinatsystem*. På $x$-aksen skal det være alder, og på *y-aksen* har vi høyden på stolpene. (Høyden til stolpene skal være $\frac{\text{frekvens}}{\text{klassebredde}}$.) Hvis vi er gode til å lage histogrammer, ser vi fort at den høyeste stolpen i diagrammet skal ha $6$ i høyde; derfor tegner vi aksene som under.




Nå skal vi lage søylene våre. I aldersgruppen $[0, 10\rangle$ er det $40$ personer. Det betyr at vi skal lage en søyle som har grunnlinje $10$ (fordi det er så stort aldersintervallet er), og den skal ha areal $40$ (fordi det er $40$ personer i denne aldersgruppen). Da må høyden til søylen være $4$. Tilsvarende må høyden på søylene til aldersgruppene $[10, 20\rangle$ og $[20, 30\rangle$ være henholdsvis $2$ og $6$. I aldersgruppen $[30, 50\rangle$ er det $20$ personer. Denne søylen skal ha grunnlinje $20$ og areal $20$, og da må høyden være $1$. På samme måte regner vi ut at søylen tilhørende intervallet $[50, 60\rangle$ skal ha høyde $2$, og at søylen tilhørende intervallet $[60, 80\rangle$ skal ha høyde $2$. Resultatet er vist under.

**Svar:**




**b)**

Bestem gjennomsnittsalderen for personene som bor i blokka.

## Løsningsforslag b)

At dataene er jevnt fordelt innenfor gruppene, betyr for eksempel at gjennomsnittalderen av alle som er i intervallet $[20, 30\rangle$ er $\frac{20+30}{2} = 25$.

Det er $40$ personer som er mellom $0$ og $10$ år. Vi antar at gjennomsnittsalderen av disse er $\frac{0+10}{2} = 5$ år. Når vi skal regne ut *gjennomsnittet* av alle personene, kan vi anta at alle disse $40$ personene er $5$ år. Tilsvarende antar vi at $20$ personer er $15$ år, $60$ personer er $25$ år, $20$ personer er $40$ år, $20$ personer er $55$ år og $40$ personer er $70$ år. Det er totalt $200$ personer som bor på Tirilltoppen, og gjennomsnittsalderen blir derfor cirka

$$
\begin{aligned}
&\frac{40 \cdot 5 \text{ år} + 20 \cdot 15 \text{ år} + 60 \cdot 25 \text{ år} + 20 \cdot 40 \text{ år} + 20 \cdot 55 \text{ år} + 40 \cdot 70 \text{ år}}{200} \\
&= \frac{200 + 300 + 1\ 500 + 800 + 1\ 100 + 2\ 800}{200} \text{ år} \\
&= \frac{6\ 700}{200} \text{ år} = \frac{67}{2} \text{ år} = 33,5 \text{ år}.
\end{aligned}
$$

**Svar:** Cirka $33,5$ år

**c)**

Aurora bor i blokk Z. Hun er 32 år. Hun vet at de yngste i blokka er nyfødte, og at den eldste er 79 år. Hun påstår derfor at hennes alder er lavere enn medianalderen.

Vurder om Auroras påstand er riktig.

**Løsningsforslag c)**

Aurora tenker sannsynligvis det følgende: Den yngste som bor i blokken er $0$ år, mens den eldste er $79$ år. Hvis vi setter disse to tallene opp i stigende rekkefølge og tar *gjennomsnittet* av de to midterste (og eneste) tallene, får vi $\frac{79+0}{2} = 39,5$. Aurora påstår at dette er *medianen*, og dermed at hennes alder på $32$ år er under medianalderen.

Auroras påstand er feil, fordi vi glemmer bort alle de andre som bor i blokken, for eksempel Aurora selv. Det er $200$ personer som bor i blokk $\mathrm{Z}$, og medianalderen er derfor gjennomsnittet av person nr. $100$ og person nr. $101$, hvis vi setter dem opp med stigende alder. Vi ser fra tabellen at både person nr. $100$ og person nr. $101$ er mellom $20$ og $30$ år, så medianalderen er også det. Siden Aurora er over $30$ år, er hun over medianalderen.

**Svar:** Auroras påstand er feil fordi den ikke tar hensyn til alle de andre personene som bor i blokken.

## Oppgave 6 (4 poeng) Nettkode: E-4CTH

Marte er telefonselger. Hun har en fast grunnlønn per time. I tillegg får hun et fast beløp for hvert produkt hun selger.

En time solgte hun 2 produkter. Hun tjente da til sammen 170 kroner.

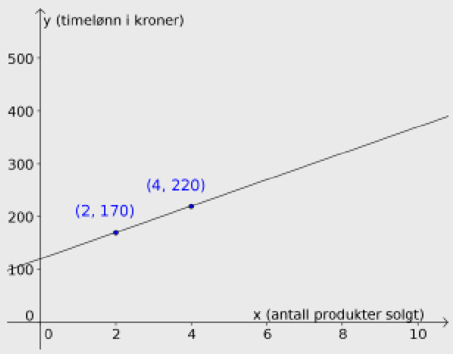
Den neste timen solgte hun 4 produkter. Denne timen tjente hun til sammen 220 kroner.

**a)**

Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom hvor mange produkter Marte selger i løpet av en time, og hvor mye hun tjener denne timen.

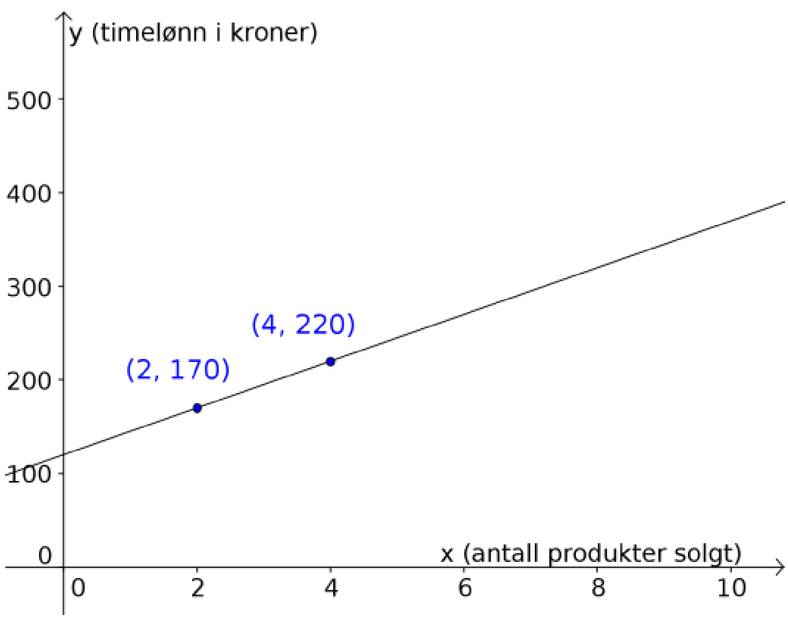
### Løsningsforslag a)

Vi lager en graf. På *x-aksen* har vi antall produkter Marte selger per time, og på *y-aksen* har vi timelønnen. Vi vet at *grafen* skal være en rett linje, for timelønnen skal øke med et bestemt beløp per produkt Marte selger. Derfor er alt vi trenger å gjøre å finne to punkter på grafen, og deretter trekke en rett linje mellom de to. Vi vet at $2$ solgte produkter gir en timeslønn på $170$ kroner, så $(2, 170)$ er et punkt på grafen; tilsvarende er $(4, 220)$ et annet punkt.




Her har vi passet på å sette på navn på aksene.

**Svar:**



**b)**

Bruk den grafiske framstillingen til å bestemme Martes grunnlønn per time og det beløpet hun får for hvert produkt hun selger.

**Løsningsforslag b)**

Først finner vi grunnlønnen. Dette er lønnen som Marte får hvis hun ikke selger noen produkter. I den grafiske framstillingen vår representerer $x$-aksen antall solgte produkter, og derfor vil vi finne ut hva timelønnen blir når $x = 0$. Vi ser at grafen krysser $y$-aksen cirka der $y = 120$, så grunnlønnen til Marte er $120$ kroner.

Videre vil vi finne hvor mye Marte får i ekstra lønn per produkt hun selger. Dette tolkes som hvor mye vi stiger i $y$-retning langs linjen hvis vi går $1$ i $x$-retning, eller med andre ord, stigningstallet til linjen. Vi vet at Marte tjener $170$ kroner hvis hun selger $2$ produkter. Grunnlønnen hennes er $120$ kroner, og det betyr at de 2 produktene gav henne $170\ \mathrm{kr} - 120\ \mathrm{kr} = 50\ \mathrm{kr}$ ekstra lønn. Det blir $25$ kroner per produkt.

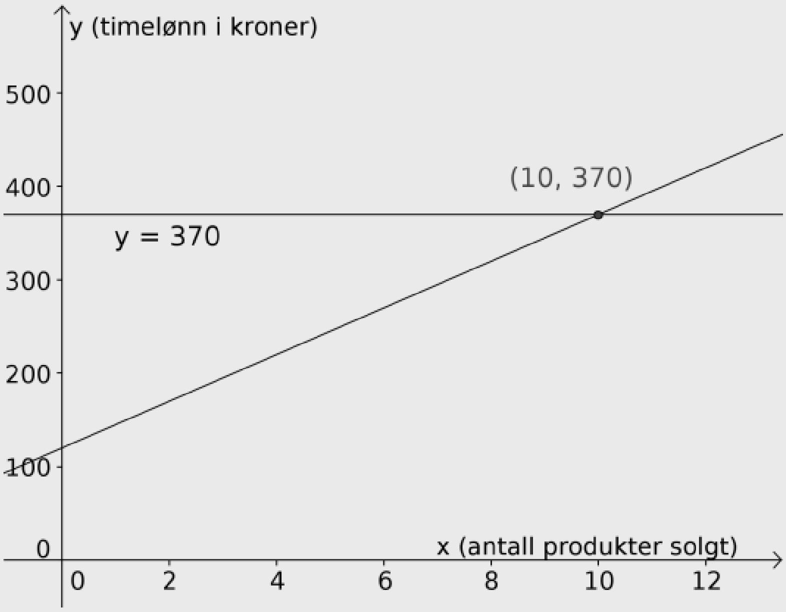
**Svar:** Grunnlønnen til Marte er $120$ kroner per time, og hun får $25$ kroner ekstra per produkt hun selger.

**c)**

Hvor mange produkter må Marte selge i løpet av en time dersom hun skal tjene 370 kroner denne timen?

**Løsningsforslag c)**

Vi bruker *grafen* vi har tegnet. Alternativ løsning er der vi viser hvordan vi kan løse oppgaven ved regning. Vi vil finne ut når grafen vi tegnet tidligere, treffer linjen $y = 370$. Det gjør vi ved å tegne opp denne linjen, og se på *koordinatene* til *skjæringspunktet*.




Her ser vi at skjæringspunktet har koordinater $(10, 370)$. Det betyr at Marte må selge $10$ produkter for å få en timeslønn på $370$ kroner.

**ALTERNATIV LØSNING**

**Svar:** Marte må selge 10 produkter.

# Oppgave 7 (2 poeng) Nettkode: E-4CTR

**a)**

Forklar hva det vil si at en størrelse øker eksponentielt.

**Løsningsforslag a)**

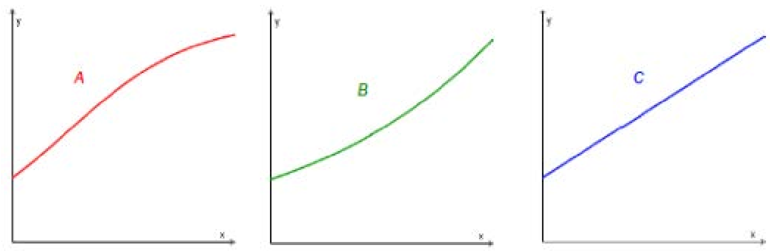
En størrelse som øker *eksponentielt*, vil øke mer og mer etter hvert som tiden går. Mer presist skal størrelsen øke med en viss prosentandel hele tiden. Et godt eksempel er hvis man setter inn $100\,000$ kroner i banken på en konto med $3\,\%$ rente per år; da vil beløpet på kontoen øke med $3\,\%$ hvert år.

Man kan også forklare eksponentiell økning mer algebraisk. Størrelsen $f(x)$ øker eksponentielt hvis den kan skrives på formen $f(x) = a \cdot r^x$, der $r$ er et tall større enn $1$. (Hvis $r$ hadde vært mindre enn $1$, ville størrelsen ha avtatt eksponentielt.)

**Svar:** En størrelse øker eksponentielt hvis den hele tiden øker med en viss prosentandel.

**b)**

Nedenfor ser du tre ulike grafer. Hvilken eller hvilke av disse grafene illustrerer eksponentiell vekst? Begrunn svaret ditt.




**Løsningsforslag b)**

*Graf* $A$ starter som en rett linje, og deretter slaker den ut. *Eksponentiell* vekst skal bli større og større, og aldri slake ut; derfor illustrerer ikke denne grafen eksponentiell vekst.

Graf $B$ øker mer og mer etter hvert som $x$-verdien blir større. Det er dette vi er ute etter i eksponentiell vekst, og det er ingenting annet som tyder på at grafen ikke illustrerer eksponentiell vekst. Derfor er $B$ riktig svar.

Graf $C$ øker likt uansett hvor vi er på $x$-aksen. Med eksponentiell vekst skal grafen øke mer og mer hele tiden, så $C$ illustrerer ikke eksponentiell vekst.

**Svar:** Graf $B$ er riktig, fordi den er den eneste av grafene som vokser mer og mer etter hvert som $x$-verdien øker.

## Oppgave 8 (2 poeng) Nettkode: E-4CTV

Sorter tallene i stigende rekkefølge

$0{,}046 \cdot 10^{11}$ $\quad \frac{46}{1000000}$ $\quad 46 \cdot 10^{-7}$

$4600000$ $\quad 4{,}6 \cdot 10^{8}$ $\quad 0{,}46 \cdot 10^{-6}$

### Løsningsforslag

Vi skriver om alle tallene til *tall på standardform*. Et tall på standardform er på formen $\pm r \cdot 10^n$, der $n$ er et heltall og $1 \leq r < 10$.

$0,046 \cdot 10^{11}$**:**

Dette tallet er nesten på standardform. Det eneste som mangler er at tallet før tierpotensen skal være mellom 1 og 10. Vi skriver $0,046$ som $4,6 \cdot 10^{-2}$, og da får vi

$$0,046 \cdot 10^{11} = 4,6 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{11} = 4,6 \cdot 10^{-2+11} = 4,6 \cdot 10^{9}.$$

Her har vi brukt potensregelen som sier at vi kan legge sammen *eksponentene* (i dette tilfellet $-2$ og $11$) når vi multipliserer to *potenser* med samme *grunntall*.

$\frac{46}{1\ 000\ 000}$:

Her bruker vi at $1\ 000\ 000 = 10^6$ (fordi det er $6$ nuller i $1\ 000\ 000$, så $1\ 000\ 000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$). Da kan vi skrive brøken som $\frac{46}{10^6}$. Vi vil flytte tierpotensen opp fra nevneren, og da multipliserer vi med den omvendte potensen $10^{-6}$ over og under brøkstreken. Vi får

$$\frac{46}{10^6} = \frac{46 \cdot 10^{-6}}{10^6 \cdot 10^{-6}} = \frac{46 \cdot 10^{-6}}{10^0} = \frac{46 \cdot 10^{-6}}{1} = 46 \cdot 10^{-6}.$$

Her har vi brukt at $a^0 = 1$ for alle tall $a$ som er forskjellige fra $0$. Nå er vi i samme situasjon som over, nemlig at tallet før tierpotensen ikke er mellom $1$ og $10$. Derfor skriver vi $46$ som $4,6 \cdot 10$, og vi får

$$46 \cdot 10^{-6} = 4,6 \cdot 10^1 \cdot 10^{-6} = 4,6 \cdot 10^{-5}.$$

Her har vi brukt de samme reglene som i forrige tall, og at $10$ er det samme som $10^1$.

$46 \cdot 10^{-7}$: Som tidligere skriver vi $46$ som $4,6 \cdot 10$, og vi får

$$46 \cdot 10^{-7} = 4,6 \cdot 10^{1} \cdot 10^{-7} = 4,6 \cdot 10^{-6}.$$

$4\,600\,000$:

I dette tallet er det $6$ siffer i tillegg til det første, og de fem bakerste er $0$. Derfor kan vi se med én gang at tallet kan skrives som $4,6 \cdot 10^{6}$. Alternativt kan vi se at tallet er $46$ med $5$ nuller bak, altså $46 \cdot 10^{5}$, og deretter gjøre som i de tidligere oppgavene.

$4,6 \cdot 10^{8}$: Dette tallet er allerede på standardform.

$0,46 \cdot 10^{-6}$:

Vi skriver $0,46$ som $4,6 \cdot 10^{-1}$. Da får vi

$$0,46 \cdot 10^{-6} = 4,6 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-6} = 4,6 \cdot 10^{-7}.$$

Disse tallene er det lett å sette opp i stigende rekkefølge. Jo høyere eksponenten er, jo større er tallet. Stigende rekkefølge med tallene på standardform er

$$4,6 \cdot 10^{-7} - 4,6 \cdot 10^{-6} - 4,6 \cdot 10^{-5} - 4,6 \cdot 10^{6} - 4,6 \cdot 10^{8} - 4,6 \cdot 10^{9}.$$

Med de opprinnelige tallene er rekkefølgen
$0,46 \cdot 10^{-6} - 46 \cdot 10^{-7} - \frac{46}{1\,000\,000} - 4\,600\,000 - 4,6 \cdot 10^{8} - 0,046 \cdot 10^{11}$.

**Svar:** Stigende rekkefølge med tallene på standardform er

$$4,6 \cdot 10^{-7} - 4,6 \cdot 10^{-6} - 4,6 \cdot 10^{-5} - 4,6 \cdot 10^{6} - 4,6 \cdot 10^{8} - 4,6 \cdot 10^{9}.$$

Med de opprinnelige tallene er rekkefølgen
$0,46 \cdot 10^{-6} - 46 \cdot 10^{-7} - \frac{46}{1\,000\,000} - 4\,600\,000 - 4,6 \cdot 10^{8} - 0,046 \cdot 10^{11}$.

## **Oppgave 9 (3 poeng)** Nettkode: E-4CTZ

| Antall land | Frekvens | Relativ frekvens | Kumulativ frekvens |
|---|---|---|---|
| $[1,6\rangle$ | 5 | | |
| $[6,11\rangle$ | | | 15 |
| $[11,16\rangle$ | 2 | 0,1 | |
| $[16,21\rangle$ | | | 19 |
| $[21,26\rangle$ | | | 20 |

Ole har undersøkt hvor mange land hver elev i en 2P-gruppe har besøkt. Han har satt opp en tabell. Ovenfor ser du noen av tallene i tabellen.

Tegn av tabellen, gjør beregninger, og fyll inn tallene som mangler.

### **Løsningsforslag**

*Frekvensen* til et intervall, er antall elever som har besøkt antall land i dette intervallet. Siden frekvensen til $[1, 6\rangle$ er $5$, er det fem elever som har besøkt mellom $1$ og $6$ land. Den relative frekvensen til et intervall er hvor stor andel av elevene som har besøkt antall land i dette intervallet. At en *relative frekvensen* for$[11, 16\rangle$ er $0, 1$, betyr at $0, 1 = 10\ \%$ av elevene besøkte mellom $11$ og $16$ land. *Kumulativ frekvens* for et intervall er antall elever som har besøkt antall land i intervallet, eller et lavere intervall. At den kumulative frekvensen for $[16, 21\rangle$ er $19$, betyr at $19$ elever har besøkt mellom $1$ og $21$ land.

Det første vi gjør er å skrive av tabellen slik den er.

| Antall land | Frekvens | Relativ frekvens | Kumulativ frekvens |
|---|---|---|---|
| $[1,6)$ | $5$ | | |
| $[6,11)$ | | | $15$ |
| $[11,16)$ | $2$ | $0,1$ | |
| $[16,21)$ | | | $19$ |
| $[21,26)$ | | | $20$ |

Det kan være lurt å fylle inn tabellen ovenfra og ned, og vi starter med den relative frekvensen for $[1, 6\rangle$. Vi skal altså finne ut hvor stor andel av elevene som har besøkt mellom $1$ og $6$ land. Frekvensen for intervallet er $5$, så $5$ elever faller innenfor denne kategorien. Det neste vi må vite er antall elever i klassen. Det kan vi gjøre ved å se på den kumulative frekvensen for $[21, 26\rangle$. Den er $20$, og det betyr at det er $20$ elever som har besøkt $26$ land eller færre. Men ingen elever har besøkt mer enn $26$ land, så da må det være totalt $20$ elever i klassen! Vi vet at $5$ av disse er i intervallet $[1, 6\rangle$, og da er den relative frekvensen til $[1, 6\rangle$ lik $\frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0, 25$. Vi skriver dette inn i tabellen.

| Antall land | Frekvens | Relativ frekvens | Kumulativ frekvens |
|---|---|---|---|
| [1,6) | 5 | 0,25 | |
| [6,11) | | | 15 |
| [11,16) | 2 | 0,1 | |
| [16,21) | | | 19 |
| [21,26) | | | 20 |

Videre finner vi den kumulative frekvensen for $[1,6\rangle$, altså antall elever i klassen som har besøkt mellom $1$ og $6$ land. Det vet vi allerede er $5$, så det er den kumulative frekvensen. (Dette stemmer mer generelt: Frekvens og kumulativ frekvens er lik i det første intervallet.) Vi fyller inn.

| Antall land | Frekvens | Relativ frekvens | Kumulativ frekvens |
|---|---|---|---|
| [1,6) | 5 | 0,25 | 5 |
| [6,11) | | | 15 |
| [11,16) | 2 | 0,1 | |
| [16,21) | | | 19 |
| [21,26) | | | 20 |

Nå begynner vi på andre rad. Vi ser at den kumulative frekvensen for $[6,11\rangle$ er $15$, så $15$ elever har besøkt opp til $11$ land. Fra første rad ved vi at $5$ av disse har besøkt $6$ land eller færre, og da står vi igjen med $15-5=10$ elever i intervallet $[6,11\rangle$. Dermed er frekvensen til intervallet lik $10$. Vi fant ut over at det er $20$ elever i klassen, og da blir relativ frekvens lik $\frac{10}{20}=0,5$. Vi fyller inn.

| Antall land | Frekvens | Relativ frekvens | Kumulativ frekvens |
|---|---|---|---|
| [1,6) | 5 | 0,25 | 5 |
| [6,11) | 10 | 0,5 | 15 |
| [11,16) | 2 | 0,1 | |
| [16,21) | | | 19 |
| [21,26) | | | 20 |

Vi starter på tredje rad, med den kumulative frekvensen til intervallet $[11,16\rangle$. Vi ser fra tabellen at det er $15$ elever som har besøkt opp til $11$ land, og $2$ elever har besøkt mellom $11$ og $16$ land. Da må den kumulative frekvensen til $[11,16\rangle$ være $15+2=17$.

Vi fortsetter med fjerde rad. Kumulativ frekvens øker fra $17$ til $19$ fra $[11, 16\rangle$ til $[16, 21\rangle$, så det er $19 - 17 = 2$ elever i intervallet $[16, 21\rangle$. Det utgjør $\frac{2}{20} = 0,1$ av alle elevene. Vi fyller inn i henholdsvis "frekvens"- og "relativ frekvens"-ruten.

| Antall land | Frekvens | Relativ frekvens | Kumulativ frekvens |
|---|---|---|---|
| $[1,6)$ | $5$ | $0{,}25$ | $5$ |
| $[6,11)$ | $10$ | $0{,}5$ | $15$ |
| $[11,16)$ | $2$ | $0{,}1$ | $17$ |
| $[16,21)$ | $2$ | $0{,}1$ | $19$ |
| $[21,26)$ | | | $20$ |

Den siste raden tar vi på samme måte som forrige. Kumulativ frekvens øker med $1$, så frekvensen er $1$. Dette utgjør $\frac{1}{20} = 0,05$ av klassen. Den ferdige utfylte tabellen er vist nedenfor.

**Svar:**

| Antall land | Frekvens | Relativ frekvens | Kumulativ frekvens |
|---|---|---|---|
| $[1,6)$ | $5$ | $0{,}25$ | $5$ |
| $[6,11)$ | $10$ | $0{,}5$ | $15$ |
| $[11,16)$ | $2$ | $0{,}1$ | $17$ |
| $[16,21)$ | $2$ | $0{,}1$ | $19$ |
| $[21,26)$ | $1$ | $0{,}05$ | $20$ |

## DEL 2 Med hjelpemidler

# Oppgave 1 (2 poeng) Nettkode: E-4CUC

Ved en skole er det 440 elever. Elevene ble spurt om hvor ofte de bruker sykkelhjelm. Tabellen nedenfor viser resultatene.

| | |
|---|---|
| Alltid | 88 |
| Nesten alltid | 176 |
| Noen ganger | 110 |
| Aldri | 22 |
| Sykler ikke | 44 |

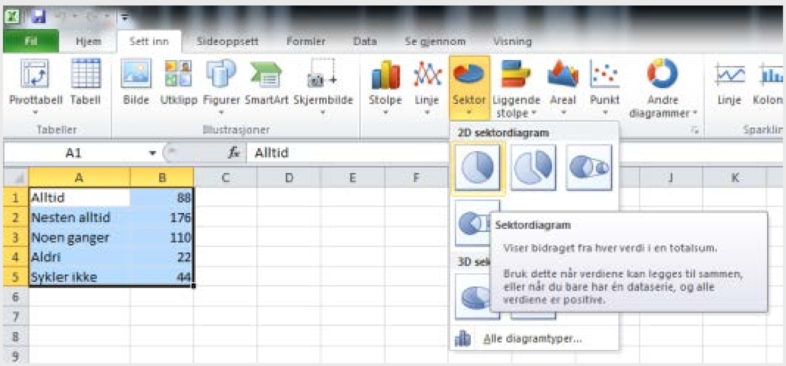
Bruk regneark til å lage et sektordiagram som illustrerer opplysningene i tabellen ovenfor. Det skal gå klart fram av diagrammet hvor mange prosent hver sektor utgjør.

### Løsningsforslag

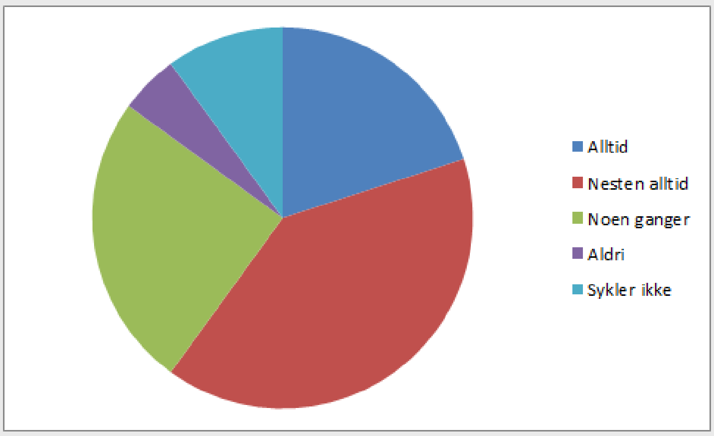
Vi bruker Excel. Det første vi gjør er å skrive av tabellen.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | Alltid | 88 |
| 2 | Nesten alltid | 176 |
| 3 | Noen ganger | 110 |
| 4 | Aldri | 22 |
| 5 | Sykler ikke | 44 |

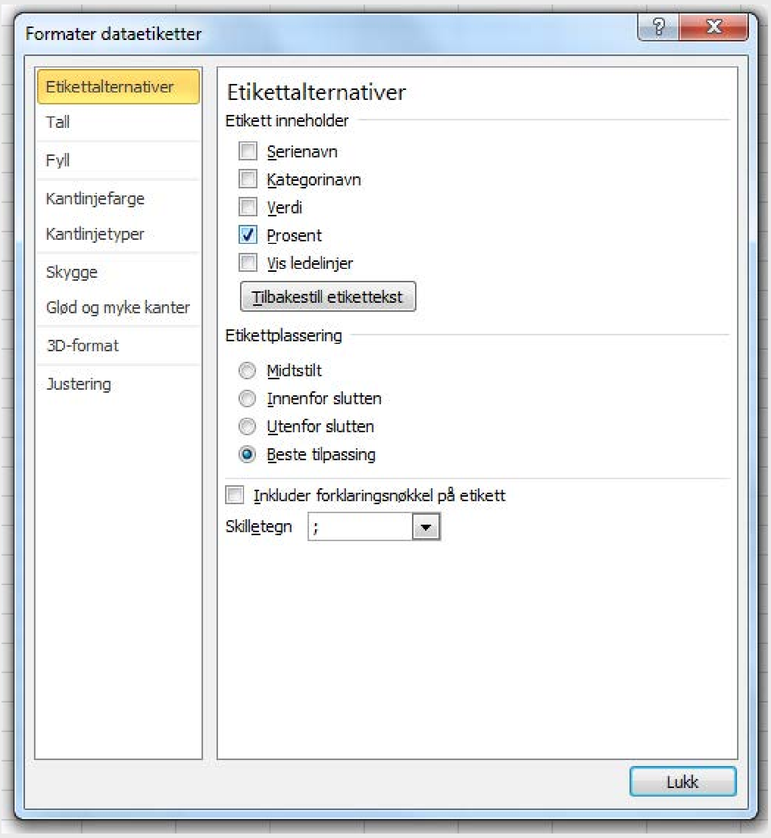
Deretter markerer vi tabellen, velger «Sett inn»-menyen og klikker på «Sektor». Der velger vi et passende diagram.




Vi får følgende diagram.

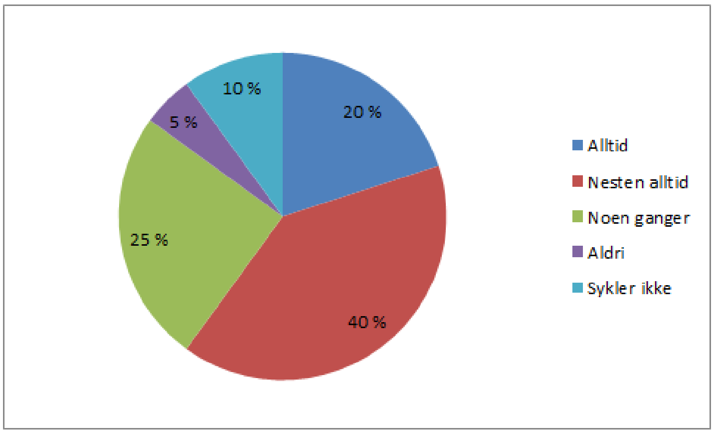


Det skal gå klart fram hvor mange prosent hver sektor utgjør. For å få til dette, høyreklikker vi på diagrammet og velger «Legg til dataetiketter». Så høyreklikker vi igjen og velger «Formater dataetiketter».




Det resulterende diagrammet er vist under.

**Svar:**



## Oppgave 2 (3 poeng) Nettkode: E-4CUE

Hans og Grete går til Høgfjell hver dag. Nedenfor ser du hvor mange minutter Hans har brukt på hver tur de to siste ukene.

25 30 26 24 32 25 27 30 28 31 24 35 32 33

**a)**

Bestem gjennomsnitt og standardavvik for datamaterialet.

### Løsningsforslag a)

Vi legger inn all informasjonen i Excel.

| | A |
|---|---|
| 1 | Data |
| 2 | 25 |
| 3 | 30 |
| 4 | 26 |
| 5 | 24 |
| 6 | 32 |
| 7 | 25 |
| 8 | 27 |
| 9 | 30 |
| 10 | 28 |
| 11 | 31 |
| 12 | 24 |
| 13 | 35 |
| 14 | 32 |
| 15 | 33 |

Først regner vi ut *gjennomsnittet*. Informasjonen ligger i cellene $\mathrm{A2}$ til og med $\mathrm{A15}$, og derfor skriver vi

$$= \mathrm{GJENNOMSNITT}\,(\mathrm{A2{:}A15})$$

Tilsvarende finner vi *standardavviket* ved å skrive

$$= \mathrm{STDAV.P}\,(\mathrm{A2{:}A15})$$

Vi bruker $\mathrm{STDAV.P}$ fordi vi vil regne ut standardavviket for hele datasettet. Hvis vi hadde brukt $\mathrm{STDAV}$, ville vi fått estimerte verdier basert på utvalg. Regnearket ser nå slik ut.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | Data | Gjennomsnitt | Standardavvik |
| 2 | 25 | 28,71428571 | 3,493434074 |
| 3 | 30 | | |
| 4 | 26 | | |
| 5 | 24 | | |
| 6 | 32 | | |
| 7 | 25 | | |
| 8 | 27 | | |
| 9 | 30 | | |
| 10 | 28 | | |
| 11 | 31 | | |
| 12 | 24 | | |
| 13 | 35 | | |
| 14 | 32 | | |
| 15 | 33 | | |

Vi ser at gjennomsnittet er cirka $28,7$, mens standardavviket er cirka $3,5$.

**Svar:** Gjennomsnittet er cirka $28,7$, og standardavviket er cirka $3,5$.

**b)**

Grete har i gjennomsnitt brukt like lang tid som Hans per tur de siste 14 dagene, men standardavviket hennes er 1,2.

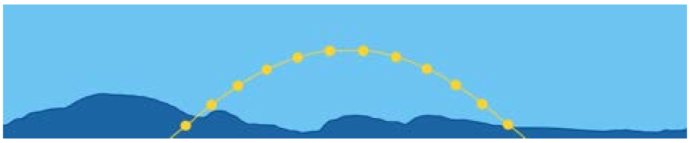
Hva kan du ut fra dette si om tidene Grete har brukt på turene, sammenliknet med tidene Hans har brukt?

## Løsningsforslag b)

Både Hans og Grete har i gjennomsnitt gått på cirka $29$ minutter. *Standardavviket* til Grete er $1,2$, mens standardavviket til Hans er $3,5$, altså cirka tre ganger høyere. Standardavviket sier noe om hvor varierende tid de bruker på gåturene. Hans har høyere standardavvik enn Grete, så gåtidene til Hans varierer mer enn Gretes.

**Svar:** Gåtidene til Hans varierer mer enn Gretes gåtider.

## Oppgave 3 (6 poeng) Nettkode: E-4CUI



Funksjonen $B$ gitt ved

$$B(x) = 0{,}006x^4 - 0{,}33x^3 + 5{,}7x^2 - 32{,}1x + 59{,}3 \qquad 5 \leq x \leq 23$$

viser hvor mange grader $B(x)$ sola stod over horisonten $x$ timer etter midnatt i Bergen 21. juni 2015.

**a)**
Bruk graftegner til å tegne grafen til $B$.

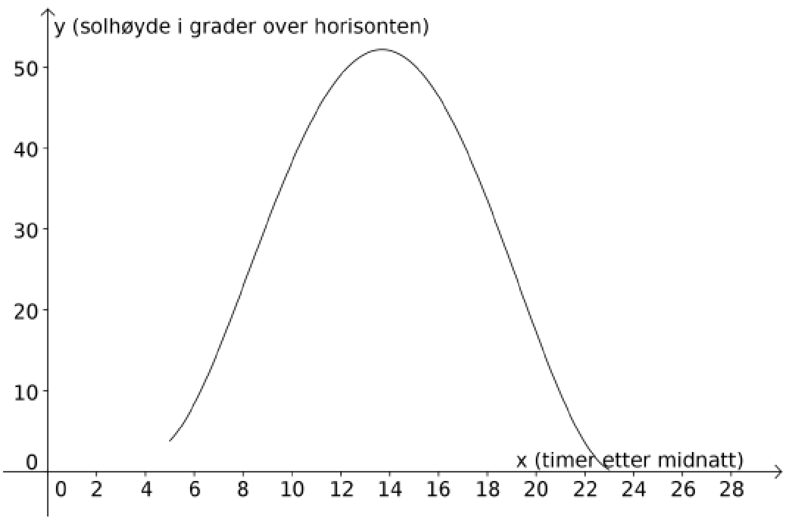
**Løsningsforslag a)**

Vi bruker *GeoGebra*. For å tegne funksjonen skriver vi

$$\text{B} = \text{Funksjon}\left[0.006\text{x\^{}4 - }0.33\text{x\^{}3} + 5.7\text{x\^{}2 - }32.1\text{x} + 59.3,\ 5,\ 23\right]$$

i «Skriv inn»-vinduet. Vi må tilpasse aksene slik at vi ser hele grafen, og vi må sette på passende navn på *aksene*. Et forslag er vist under.

**Svar:**



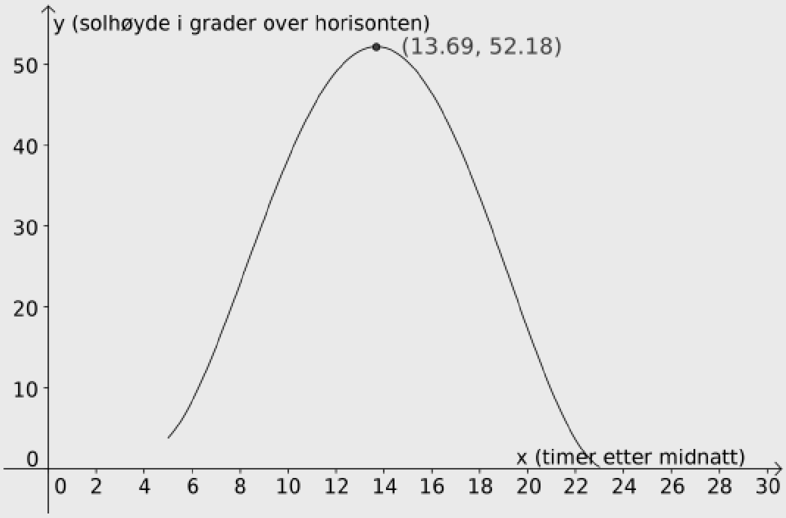
**b)**
Hvor mange grader stod sola over horisonten da den var på sitt høyeste?

**Løsningsforslag b)**

Vi skal finne ut når solen stod høyest på himmelen, og det vil være der grafen når sitt høyeste punkt. Vi kan finne *toppunktet* til grafen ved å skrive

$$\text{Ekstremalpunkt}[\text{B}, 5, 25]$$

i «Skriv inn»-vinduet.




Koordinatene til toppunktet er $(13.69, 52.18)$. Det betyr at solen var $52,18$ grader over horisonten $13,69$ timer etter midnatt, og det var det høyeste den kom.

**Svar:** $52,18$ grader.

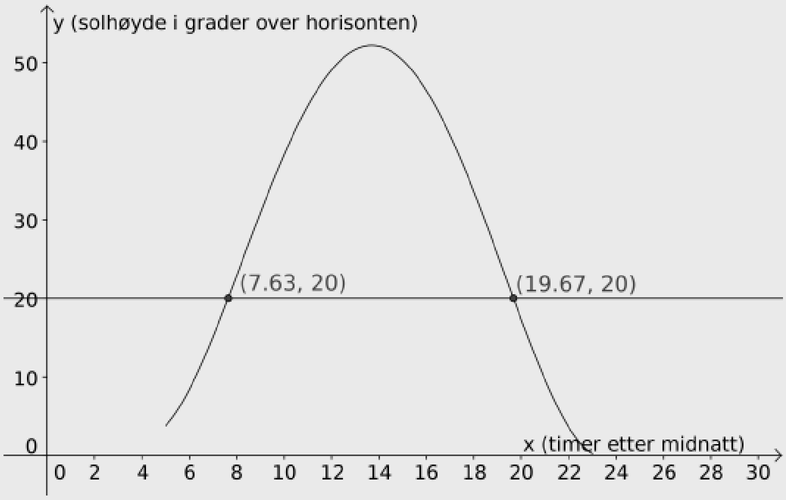
**c)**
Når stod sola 20 grader over horisonten?

**Løsningsforslag c)**

Vi vil finne ut hva $x$ skal være for at $B(x) = 20$. Det gjør vi ved å finne *skjæringspunktet* mellom $B$ og linjen $y = 20$. Dette gjør vi enkelt i *GeoGebra* ved å skrive

$$\text{y=20}$$

i «Skriv inn»-vinduet, og deretter bruke skjæringsverktøyet til å finne skjæringspunktene.




Her ser vi at skjæringspunktene har koordinater $(7.63, 20)$ og $(19.67, 20)$. Det betyr at $7,63$ og $19,67$ timer etter midnatt, så var solen $20$ grader over horisonten. Det tilsvarer henholdsvis cirka klokken $07.40$ og $19.40$.

**Svar:** $7,63$ og $19,67$ timer etter midnatt, eller cirka klokken $07.40$ og $19.40$.

**d)**

Hvor mange grader steg sola i gjennomsnitt per time fra klokka 05.00 til klokka 12.00?

## Løsningsforslag d)

Vi kan gjøre dette både grafisk og ved regning. Vi viser her ved regning, mens i alternativ løsning viser vi det grafisk.

Klokken $05.00$ var solen $B(5)$ grader over horisonten (fordi $05.00$ er $5$ timer etter midnatt). Vi kan regne ut hva dette tallet er ved å skrive

$\mathrm{B}\,(5)$

i «Skriv inn»-vinduet. Da får vi $B(5) = 3,8$. Klokken $12.00$ var solen $B(12) = 49,08$ grader over horisonten. Solen har dermed økt fra $3,8$ grader til $49,08$ grader på $12 - 5 = 7$ timer; det gir en gjennomsnittlig økning på

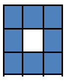
$$\frac{49,08 - 3,8}{7} \approx 6,47$$

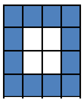
grader per time.

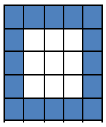
**ALTERNATIV LØSNING**

**Svar:** Cirka $6,47$ grader per time.

## Oppgave 4 (6 poeng) Nettkode: E-4CUP


Figur 1


Figur 2


Figur 3

Tenk deg at du skal lage figurer av blå og hvite rektangler som vist ovenfor.

**a)**

Skriv av tabellen nedenfor, og fyll den ut.

| Figur | Antall hvite rektangler | Antall blå rektangler | Antall rektangler totalt |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| *n* | | | |

**Løsningsforslag a)**

Det aller første vi gjør er å skrive av tabellen slik den står.

Det første vi gjør er å skrive av tabellen slik den er.

| Figur | Antall hvite rektangler | Antall blå rektangler | Antall rektangler totalt |
|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $8$ | $9$ |
| $2$ | $4$ | | |
| $3$ | | | |
| $4$ | | | |
| $n$ | | | |

Vi vil fylle ut rad nummer $2$. Da teller vi antall blå rektangler i Figur $2$, og det blir $12$. Det $4$ hvite rektangler i figuren, og da blir det totale antallet rektangler lik $12 + 4 = 16$. På tilsvarende måte teller vi at det er $9$ hvite rektangler i Figur $3$, $16$ blå og $25$ totalt. Vi fyller dette inn i tabellen vår.

| Figur | Antall hvite rektangler | Antall blå rektangler | Antall rektangler totalt |
|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $8$ | $9$ |
| $2$ | $4$ | $12$ | $16$ |
| $3$ | $9$ | $16$ | $25$ |
| $4$ | | | |
| $n$ | | | |

Når vi skal finne ut hva som skal stå i rad $4$, kan vi ikke lenger telle antall kvadrater. Det vi kan (og skal) gjøre, er å se på mønsteret som figurene er bygget etter. I Figur $1$ er det $1 \cdot 1 = 1$ hvitt rektangel, i Figur $2$ er det $2 \cdot 2 = 4$ hvite rektangler, og i Figur $3$ er det $3 \cdot 3 = 9$ hvite rektangler. Vi ser dette fordi de hvite rektanglene danner et stort rektangel i midten. I Figur $4$ skal det derfor være $4 \cdot 4 = 16$ hvite rektangler i midten. Nå kunne vi begynt å regne ut antallet blå rektangler, men det vil være lettere å regne ut antall rektangler totalt først. Vi ser nemlig at rektanglene i hver figur danner et stort rektangel med lik bredde som høyde, målt i antall rektangler. Figur $1$ er $3$ rektangler i høyden og i bredden, Figur $2$ er $4$ rektangler i høyden og i bredden, og Figur $3$ er $5$ i høyden og i bredden. Derfor skal Figur $4$ være $6$ rektangler i høyden og i bredden, som gir et totalt antall rektangler på $6 \cdot 6 = 36$. Vi vet at $16$ av disse er hvite, og da må $36 - 16 = 20$ av dem være blå. Vi fyller ut.

| Figur | Antall hvite rektangler | Antall blå rektangler | Antall rektangler totalt |
|---|---|---|---|
| 1 | $1$ | $8$ | $9$ |
| 2 | $4$ | $12$ | $16$ |
| 3 | $9$ | $16$ | $25$ |
| 4 | $16$ | $20$ | $36$ |
| $n$ | | | |

Så skal vi fylle ut den siste raden. Det vanskelige arbeidet gjorde vi faktisk da vi fant ut systemet i rad

4. Vi ser at i Figur $n$, så må det være $n \cdot n = n^2$ hvite rektangler, fordi det er et stort hvitt rektangel med bredde og høyde $n$ inne i figuren. Totalt må det være $\left(n+2\right) \cdot \left(n+2\right) = \left(n+2\right)^2 = n^2 + 4n + 4$ rektangler, fordi hele figuren er et rektangel med bredde og høyde $n + 2$. Da står vi igjen med

$$n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4n + 4$$

blå rektangler. Den ferdig utfylte tabellen er vist under.

**Svar:**

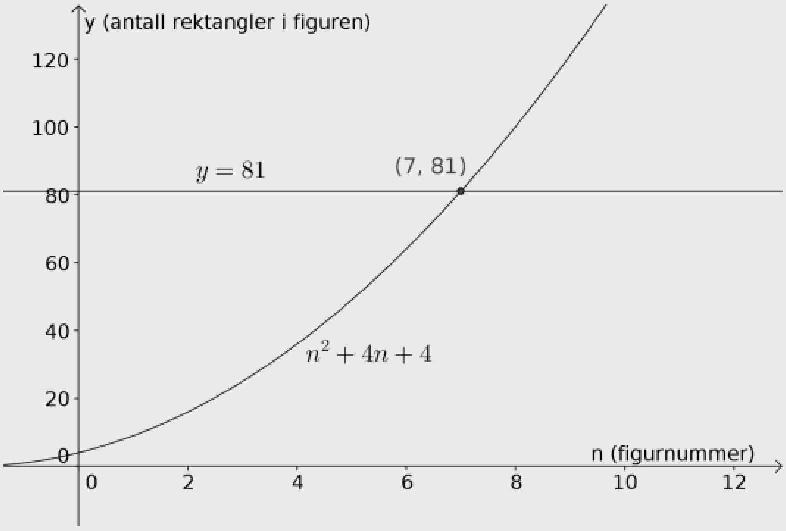
| Figur | Antall hvite rektangler | Antall blå rektangler | Antall rektangler totalt |
|---|---|---|---|
| 1 | $1$ | $8$ | $9$ |
| 2 | $4$ | $12$ | $16$ |
| 3 | $9$ | $16$ | $25$ |
| 4 | $16$ | $20$ | $36$ |
| $n$ | $n^2$ | $4n + 4$ | $n^2 + 4n + 4$ |

**b)**

Hvor mange hvite rektangler trenger du dersom du skal lage en figur med totalt 81 rektangler?

## Løsningsforslag b)

I Figur $n$ er det totalt $n^2 + 4n + 4$ eller $(n+2)^2$ rektangler totalt. I vår figur er det $81 = 9 \cdot 9$ rektangler; det betyr at $n + 2$ må være det samme som $9$, så $n + 2 = 9$ eller $n = 7$. Dermed er det Figur $7$ som har 81 rektangler. Dette kunne vi også funnet grafisk ved å finne skjæringspunktet mellom funksjonen $n^2 + 4n + 4$ og linjen $y = 81$, som vist under.




Videre vet vi fra tabellen vår at det skal være $n^2$ hvite rektangler i Figur $n$, og det betyr at det skal være $7^2 = 49$ hvite rektangler i Figur $7$. Derfor er svaret $49$.

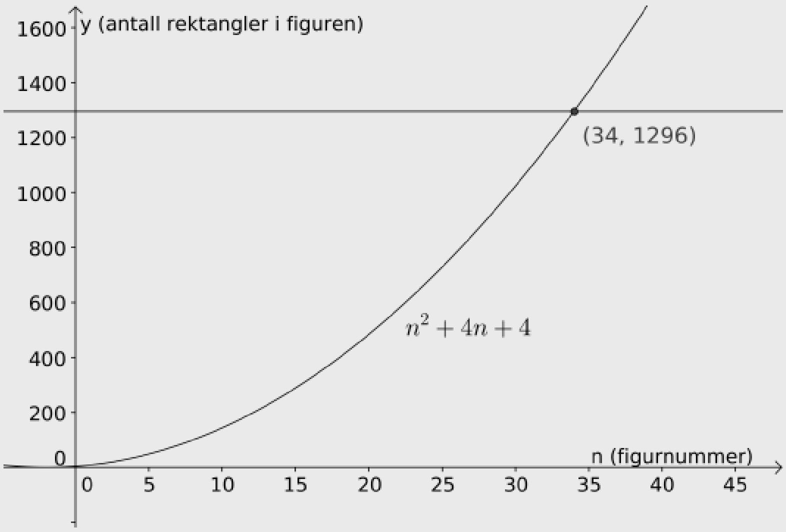
**Svar:** $49$ hvite rektangler.

**c)**

Hvor mange blå rektangler trenger du dersom du skal lage en figur med totalt 1 296 rektangler?

## Løsningsforslag c)

Som i forrige oppgave, starter vi med å finne ut hvilken figur som har $1\,296$ rektangler totalt. Figur $n$ har totalt $n^2 + 4n + 4$ rektangler, og vi vil finne ut hva $n$ skal være for at dette skal bli $1\,296$. Dette kan vi gjøre ved å prøve oss fram, eller løse ligningen $n^2 + 4n + 4 = 1\,296$ grafisk som i forrige oppgave.




Fra figuren over ser vi at det er Figur $34$ som har $1\,296$ rektangler. Vi vet at Figur $n$ har $4n + 4$ blå rektangler, og da vil Figur $34$ ha $4 \cdot 34 + 4 = 140$ blå rektangler.

**Svar:** $140$ blå rektangler.

# Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4CUT

En bedrift slapp ut 20 000 tonn $CO_2$ i 2015. Myndighetene krever at bedriften reduserer utslippet av $CO_2$ med 8 % hvert år de neste 10 årene.

**a)**

Bruk regneark til å lage en oversikt som viser antall tonn CO2 bedriften kan slippe ut hvert år de neste 10 årene.

## Løsningsforslag a)

Vi setter opp en tabell vi skal fylle ut. Venstre side viser årstallet, mens høyre side viser antall tonn tillatte $CO_2$-utslipp. I $2015$ slapp bedriften ut $20\,000$ tonn, og vi skriver inn dette som vårt utgangspunkt. I $2016$ skulle utslippet sunket med $8\ \%$. Det gir en *vekstfaktor* på $0,92$, og derfor skriver vi det følgende for $2016$.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | År etter 2015 | Antall tonn $CO_2$ |
| 2 | 0 | 20000 |
| 3 | 1 | =B2*0,92 |
| 4 | 2 | |
| 5 | 3 | |
| 6 | 4 | |
| 7 | 5 | |
| 8 | 6 | |
| 9 | 7 | |
| 10 | 8 | |
| 11 | 9 | |
| 12 | 10 | |

For $2017$ skal bedriften senke utslippene $8\ \%$ ytterligere; derfor skal vi skrive

$$=\text{B3*0,92}$$

på neste linje igjen. Slik fortsetter vi helt til slutten av tabellen. Vi kan gjøre det raskt ved å markere rutene vi allerede har skrevet inn, og deretter dra nedover. Resultatet er vist under.

**Svar:**

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | År etter 2015 | Antall tonn $CO_2$ |
| 2 | 0 | 20000,0 |
| 3 | 1 | 18400,0 |
| 4 | 2 | 16928,0 |
| 5 | 3 | 15573,8 |
| 6 | 4 | 14327,9 |
| 7 | 5 | 13181,6 |
| 8 | 6 | 12127,1 |
| 9 | 7 | 11156,9 |
| 10 | 8 | 10264,4 |
| 11 | 9 | 9443,2 |
| 12 | 10 | 8687,8 |

**b)**

Hvor mange prosent vil bedriften totalt ha redusert utslippet med i løpet av denne perioden?

**Løsningsforslag b)**

Etter $10$ år har bedriften lov til å slippe ut $8\,687,8$ tonn $CO_2$. Det er en reduksjon på $20\,000 - 8\,687,8 = 11\,312,2$ tonn. Av $20\,000$ er dette $\frac{11\,312{,}2}{20\,000} \approx 0,57 = 57\,\%$, så reduksjonen er på totalt $56\,\%$.

**ALTERNATIV LØSNING**

**Svar:** Cirka $57\,\%$

**c)**

En annen bedrift slapp ut 30 000 tonn $CO_2$ i 2015. Myndighetene krever at denne bedriften halverer utslippet i løpet av 5 år. Bedriften vil oppfylle myndighetenes krav ved å redusere utslippet av $CO_2$ med en fast prosentsats hvert år framover.

Bestem denne prosentsatsen.

**Løsningsforslag c)**

La oss si at bedriften reduserer utslippet med en vekstfaktor på $x$. (For eksempel, hvis $x = 0,89$, så må bedriften kutte utslippene med $100 - 100 \cdot 0,89 = 100 - 89 = 11$ prosent hvert år.) Etter ett år er tillatt utslipp da lik $30\,000 \cdot x$; etter to år er det $30\,000 \cdot x^2$, og så videre. Modellen vår for det tillatte utslippet er $30\,000 \cdot x^n$ etter $n$ år. Etter 5 år er tillatt utslipp lik $30\,000 \cdot x^5$. Vi vil at dette tallet skal være halvparten av utslippene i utgangspunktet, og da må vi ha at

$$x^5 = 0,5.$$

Dette er en likning vi skal løse for $x$. Vi kan gjøre det grafisk og med CAS, eller med regning. Vi gjør det sistnevnte, for det går relativt fort. Det eneste vi gjør er å opphøye begge sidene i $\frac{1}{5}$. Da får vi

$$\left(x^5\right)^{\frac{1}{5}} = 0,5^{\frac{1}{5}}.$$

Potensreglene sier at $\left(x^5\right)^{\frac{1}{5}} = x^{5\frac{1}{5}} = x^1 = x$. Derfor har vi at

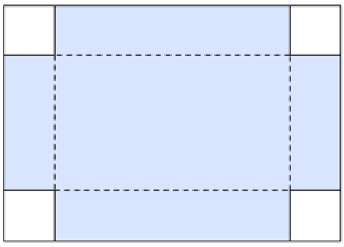
$$x = 0,5^{\frac{1}{5}} \approx 0,87.$$

Det betyr at den årlige prosentsatsen er cirka $1 - 0,87 = 0,13 = 13\,\%$.

**ALTERNATIV LØSNING**

**Svar:** Cirka $13\,\%$.

## Oppgave 6 (5 poeng) Nettkode: E-4CV1



Tenk deg at du har et stykke papp med form som et rektangel. Rektangelet er 20 cm langt og 14 cm bredt. I hvert hjørne av rektangelet skal du klippe bort et kvadrat. De fire kvadratene skal være like store. Du skal så brette langs de stiplede linjene og lage en eske (uten lokk).

**a)**

Gjør beregninger, tegn av, og fyll ut tabellen nedenfor.

| Lengden av hver side i kvadratene som klippes bort | Lengden av esken | Bredden av esken | Høyden av esken | Volumet av esken |
|---|---|---|---|---|
| 4 cm | | | | 288 cm$^3$ |
| 3 cm | | 8 cm | | |
| 2,5 cm | | | | |
| $x$ cm | | | | |

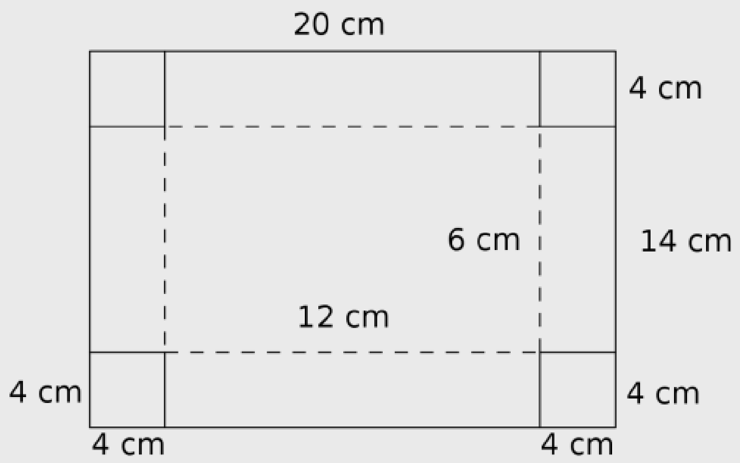
**Løsningsforslag a)**

Det første vi gjør er å skrive av tabellen slik den er.

| Lengden av hver side i kvadratene som klippes bort | Lengden av esken | Bredden av esken | Høyden av esken | Volumet av esken |
|---|---|---|---|---|
| $4\ \text{cm}$ | | | | $288\ \text{cm}^3$ |
| $3\ \text{cm}$ | | $8\ \text{cm}$ | | |
| $2{,}5\ \text{cm}$ | | | | |
| $x\ \text{cm}$ | | | | |

Vi starter med den første linjen. Vi skal finne lengden, bredden og høyden av boksen når vi klipper bort kvadrater med sidelengde $4\ \text{cm}$ i hver av hjørnene. Bunnen av esken er den stiplede firkanten markert i tegningen, og lengden av esken vil være lengden av de horisontale stiplede stripene. Vi vet at hele papprektangelet er $20\ \text{cm}$langt, og hvis vi klipper bort

$4 \text{ cm}$ i hvert hjørne, står vi igjen med $20 \text{ cm} - 2 \cdot 4 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$, og dette er lengden av boksen. Tilsvarende er papprektangelet $14 \text{ cm}$ bredt, og etter klippingen står vi igjen med $14 \text{ cm} - 2 \cdot 4 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$. Høyden til rektangelet er sidelengden i kvadratet vi klipper bort, altså $4 \text{ cm}$. Figuren under illustrerer situasjonen. (Målene på tegningen står ikke til de faktiske proposjonene.)




Dette kan vi fylle inn i tabellen vår.

| Lengden av hver side i kvadratene som klippes bort | Lengden av esken | Bredden av esken | Høyden av esken | Volumet av esken |
|---|---|---|---|---|
| $4 \text{ cm}$ | $12 \text{ cm}$ | $6 \text{ cm}$ | $4 \text{ cm}$ | $288 \text{ cm}^3$ |
| $3 \text{ cm}$ | | $8 \text{ cm}$ | | |
| $2{,}5 \text{ cm}$ | | | | |
| $x \text{ cm}$ | | | | |

Volumet i en boks med lengde $l$, bredde $b$ og høyde $h$ er $V = l \cdot b \cdot h$. I vårt tilfelle er $l = 12 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$ og$h = 4 \text{ cm}$, og vi kan merke oss at

$$12 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 288 \text{ cm}^3,$$

akkurat som det står i tabellen.

Vi går videre til neste rad, der vi skal klippe bort kvadrater med sidelengde $3 \text{ cm}$. Lengden av papprektangelet er fremdeles $20 \text{ cm}$, så da blir lengden av esken lik $20 \text{ cm} - 2 \cdot 3 \text{ cm} = 14 \text{ cm}$. Tilsvarende blir bredden $14 \text{ cm} - 2 \cdot 3 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$, slik som det står i tabellen. Høyden er $3 \text{ cm}$, og da blir volumet

$$14 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 336 \text{ cm}^3.$$

På samme vis regner vi ut raden med $2,5 \text{ cm}$. Lengden av esken blir da $20 \text{ cm} - 2 \cdot 2,5 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$, bredden blir $14 \text{ cm} - 2 \cdot 2,5 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$ og høyden er $2,5 \text{ cm}$. Volumet av esken er dermed $15 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm} \cdot 2,5 \text{ cm} = 337,5 \text{ cm}^3$.

Vi fyller dette inn i tabellen.

| Lengden av hver side i kvadratene som klippes bort | Lengden av esken | Bredden av esken | Høyden av esken | Volumet av esken |
|---|---|---|---|---|
| $4\ \text{cm}$ | $12\ \text{cm}$ | $6\ \text{cm}$ | $4\ \text{cm}$ | $288\ \text{cm}^3$ |
| $3\ \text{cm}$ | $14\ \text{cm}$ | $8\ \text{cm}$ | $3\ \text{cm}$ | $336\ \text{cm}^3$ |
| $2{,}5\ \text{cm}$ | $15\ \text{cm}$ | $9\ \text{cm}$ | $2{,}5\ \text{cm}$ | $337{,}5\ \text{cm}^3$ |
| $x\ \text{cm}$ | | | | |

Til slutt skal vi finne dimensjonene til eksen når vi klipper bort kvadratene med sidelengde $x$ cm. Vi gjør helt det samme som tidligere. Hvis vi klipper bort to kvadrater med sidelengde $x$ cm fra papprektangelet med lengde $20$ cm, står vi igjen med $(20 - 2x)$ cm, og dette er lengden til esken. Bredden blir helt tilsvarende $(14 - 2x)$ cm, og høyden er $x$ cm. Volumet til esken blir

$$\left(20 - 2x\right)\ \text{cm} \cdot \left(14 - 2x\right)\ \text{cm} \cdot x\ \text{cm} = \left(20 - 2x\right)\left(14 - 2x\right)x\ \text{cm}^3 .$$

Hvis vi løser opp parentesene, får vi $4x^3 - 68x^2 + 280x$. Den ferdig utfylte tabellen er vist under.

**Svar:**

| Lengden av hver side i kvadratene som klippes bort | Lengden av esken | Bredden av esken | Høyden av esken | Volumet av esken |
|---|---|---|---|---|
| $4\ \text{cm}$ | $12\ \text{cm}$ | $6\ \text{cm}$ | $4\ \text{cm}$ | $288\ \text{cm}^3$ |
| $3\ \text{cm}$ | $14\ \text{cm}$ | $8\ \text{cm}$ | $3\ \text{cm}$ | $336\ \text{cm}^3$ |
| $2{,}5\ \text{cm}$ | $15\ \text{cm}$ | $9\ \text{cm}$ | $2{,}5\ \text{cm}$ | $337{,}5\ \text{cm}^3$ |
| $x\ \text{cm}$ | $(20 - 2x)\ \text{cm}$ | $(14 - 2x)\ \text{cm}$ | $x\ \text{cm}$ | $\left(4x^3 - 68x^2 + 280x\right)\ \text{cm}^3$ |

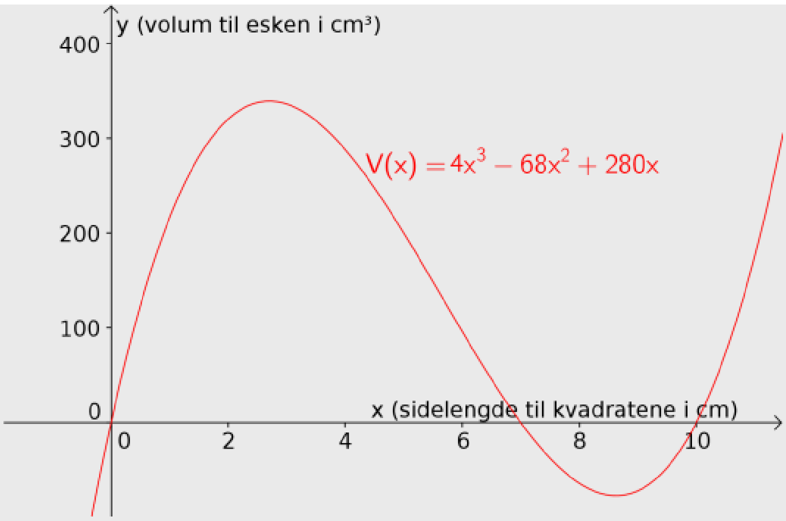
**b)**

Bruk graftegner til å bestemme hvor lang hver side i kvadratene som klippes bort, må være for at volumet av esken skal bli størst mulig.

Hvor stort blir volumet da?

## Løsningsforslag b)

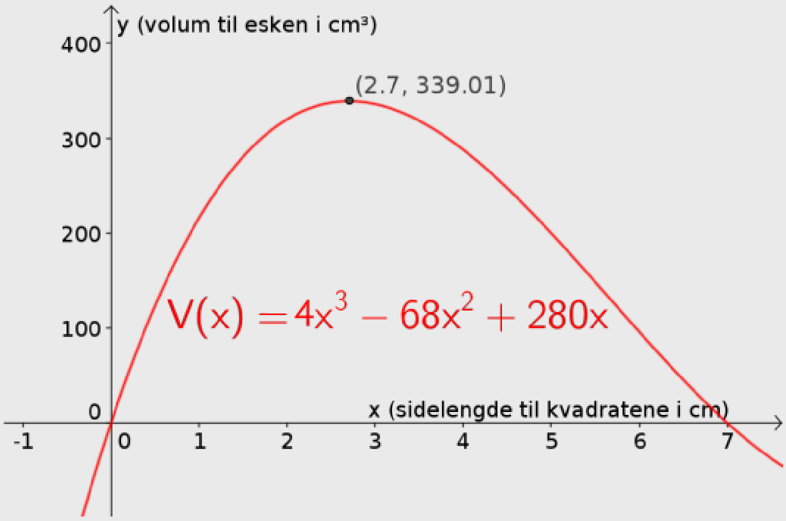
La $V(x)$ være *volumet* til esken i $\text{cm}^3$ hvis vi klipper bort kvadrater med sidelengde $x$ cm. Da fant vi ut i forrige oppgave at $V\left(x\right) = 4x^3 - 68x^2 + 280x$. Dette kan vi tegne inn i *GeoGebra*.




Vi vil finne ut når esken har størst volum, og det er der grafen til $V$ har et toppunkt. Vi finner *toppunktet* ved å skrive

$$\text{Ekstremalpunkt}[\text{V}]$$

i «Skriv inn»-vinduet.



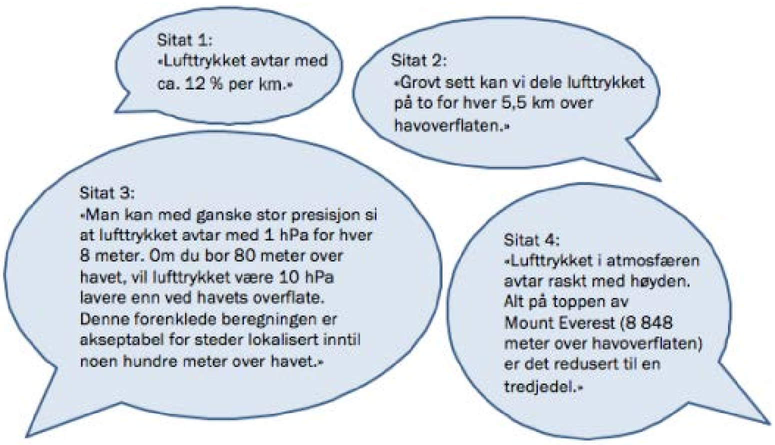

Her ser vi at toppunktet er $(2.7, 339.01)$. Det betyr at vi får det største volumet når vi klipper bort kvadrater med sidelengde $2,7\ \text{cm}$; da vil esken få et volum på cirka $339\ \text{cm}^3$.

**Svar:** Det største volumet får vi når vi klipper bort kvadrater med sidelengde $2,7\ \text{cm}$; da vil esken få et volum på $339\ \text{cm}^3$.

## Oppgave 7 (8 poeng) Nettkode: E-4CV6

Ved havets overflate er lufttrykket ca. 1 000 hPa (hektopascal).

I denne oppgaven skal vi bruke sitater fra ulike nettsider og se på noen modeller for hvor stort luftrykket er x kilometer over havets overflate.




**a)**

Forklar at vi ut fra sitat 1 kan sette opp en modell $f$ der $f(x) = 1000 \cdot 0{,}88^x$

Tegn grafen til $f$ for $0 \leq x \leq 10$

**Løsningsforslag a)**

Hvis lufttrykket skal avta fra $1\,000$ pHa med $12\,\%$ den første kilometeren over havet, vil lufttrykket én kilometer over havet være $1\,000 \cdot 0,88$. (Det er fordi en reduksjon på $12\,\%$ gir en *vekstfaktor* på $100\,\% - 12\,\% = 88\,\% = 0,88$.) Videre vil lufttrykket $2$ kilometer over havet være $1\,000 \cdot 0,88^2$, og generelt vil lufttrykket $x$ kilometer over havet være $1\,000 \cdot 0,88^x \text{ hPa}$. Nå har vi kommet fram til modellen

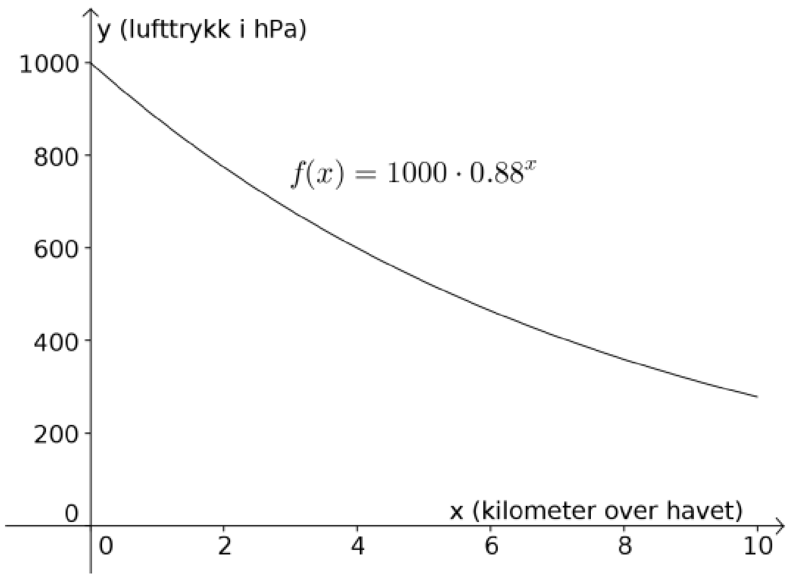
$$f(x) = 1\,000 \cdot 0,88^x.$$

Vi tegner den opp mellom $x = 0$ og $x = 10$ i *GeoGebra* ved å skrive

f=Funksjon[1000*0.88^x, 0, 10]

i «Skriv inn»-vinduet. Vi drar til aksene slik at vi ser hele *grafen*, og vi gir *aksene* passende navn. Resultatet er vist under.

**Svar:** Modellen $f(x) = 1\,000 \cdot 0,88^x$ gir mening fordi lufttrykket synker med $12\,\%$ per kilometer, som er eksponentiell reduksjon med vekstfaktor $0,88$.




**b)**

Forklar at sitat 2 gir tabellen nedenfor. Bruk regresjon, og vis at opplysningene i tabellen gir en modell som er tilnærmet lik modell $f$. Gi denne modellen navnet $g$.

Tegn grafen til $g$ for $0 \leq x \leq 10$ i samme koordinatsystem som grafen til $f$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Høyde over havoverflaten (km) | 0 | 5,5 | 11 | 16,5 |
| Lufttrykk (hPa) | 1000 | 500 | 250 | 125 |

## Løsningsforslag b)

Ved havoverflaten er trykket $1\,000$ hPa, og i følge sitatet skal trykket divideres med $2$ for hver $5,5\text{ km}$ vi beveger oss oppover. Det betyr at lufttrykket skal være $\frac{1\,000}{2} = 500$ hPa når vi er $5,5\text{ km}$ over havet, $\frac{500}{2} = 250$ hPa når vi er $5,5\text{ km} + 5{,}5\text{ km} = 11\text{ km}$ over havet, og $\frac{250}{2} = 125$ hPa når vi er $11\text{ km} + 5,5\text{ km} = 16,5\text{ km}$ over havet. Dette passer med tabellen.

Videre skal vi finne en modell for lufttrykket ved å bruke *regresjon*. Vi bruker *GeoGebra*. Da trykker vi på «Vis»-menyen og velger «Regneark»; deretter fyller vi inn informasjonen fra tabellen.

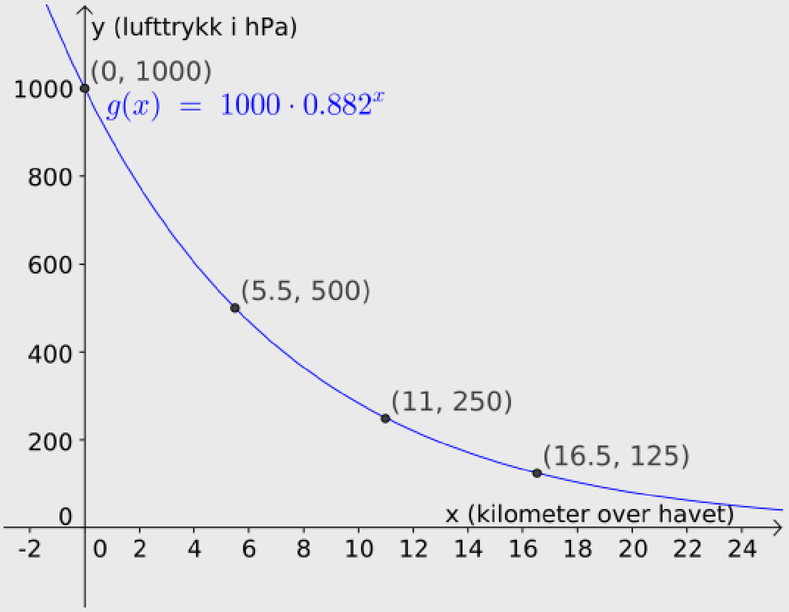
**Regneark**

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1000 |
| 2 | 5.5 | 500 |
| 3 | 11 | 250 |
| 4 | 16.5 | 125 |

Vi markerer tabellen, høyreklikker og velger «Tabell med punkt» i «Lag»-menyen. Listen blir hetende Liste1. Nå skal vi lage en ny modell ved regresjon, og da må vi velge hvilken type funksjon vi skal gjøre regresjonen med. At lufttrykket halveres per $5,5\ \mathrm{km}$ antyder at en eksponentiell modell vil være passende. Derfor skriver vi

$$\mathrm{g = RegEksp[Liste1]}$$

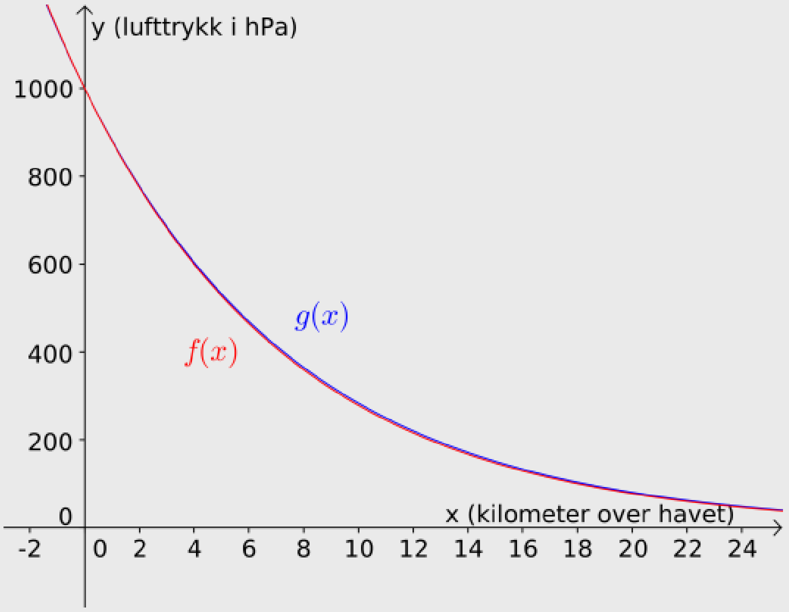
i «Skriv inn»-vinduet. Resultatet er vist under.




Hvis vi går på Innstillinger og velger $3$ desimaler under «Avrunding», så ser vi at den nye modellen $g$ er cirka

$$g(x) = 1\,000 \cdot 0,882^x,$$

altså nesten likt modellen fra forrige oppgave. Vi kan også se dette ved å tegne inn begge modellen i samme vindu, som vist under.




**Svar:** Tabellen passer med halvveringene beskrevet i sitatet. Den nye modellen er gitt ved (cirka) $g(x) = 1\,000 \cdot 0,882^x$, som er nesten likt modellen $f$ fra forrige oppgave.

**c)**
Bruk sitat 3 til å bestemme en modell $h$. Tegn grafen til $h$ for $0 \leq x \leq 10$ i samme koordinatsystem som du har brukt tidligere i oppgaven.

Kommenter siste setning i sitat 3.

**Løsningsforslag c)**

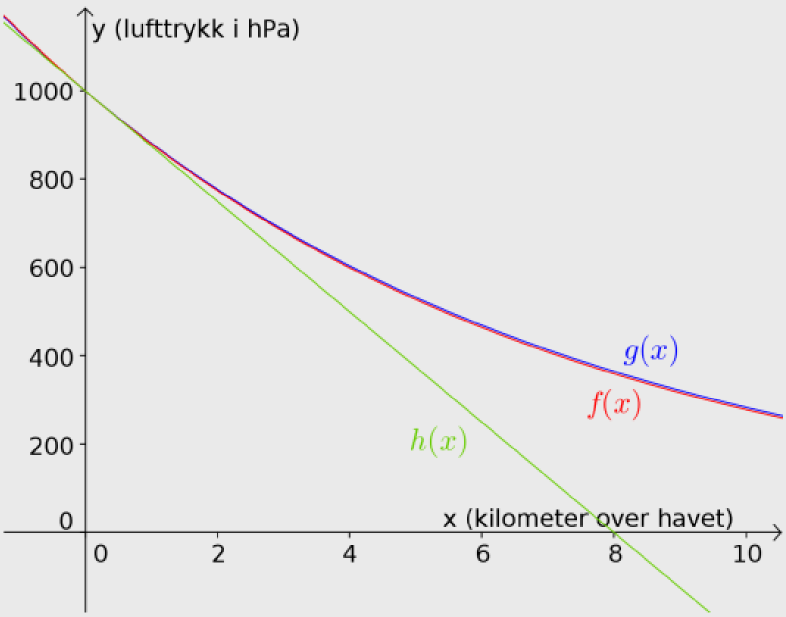
Sitat $3$ sier at lufttrykket vil avta like fort uansett hvor høyt oppe man er. Det betyr at lufttrykket er en *lineær funksjon* av høyden over havet. Derfor er modellen $h$ på formen $h(x) = ax + b$. Vi vet at lufttrykket starter på $1\,000$ hPa; derfor er $b = 1\,000$. Videre skulle lufttrykket avta med $1$ hPa per $8$ meter. Dette vil vi regne om til kilometer, fordi modellen skal vise lufttrykk der vi er $x$ kilometer over havet. Vi får at lufttrykket minker med

$$\frac{1\,000}{8} = 125$$

hPa per kilometer. Derfor er *stigningstallet* $a = -125$, så modellen vår er

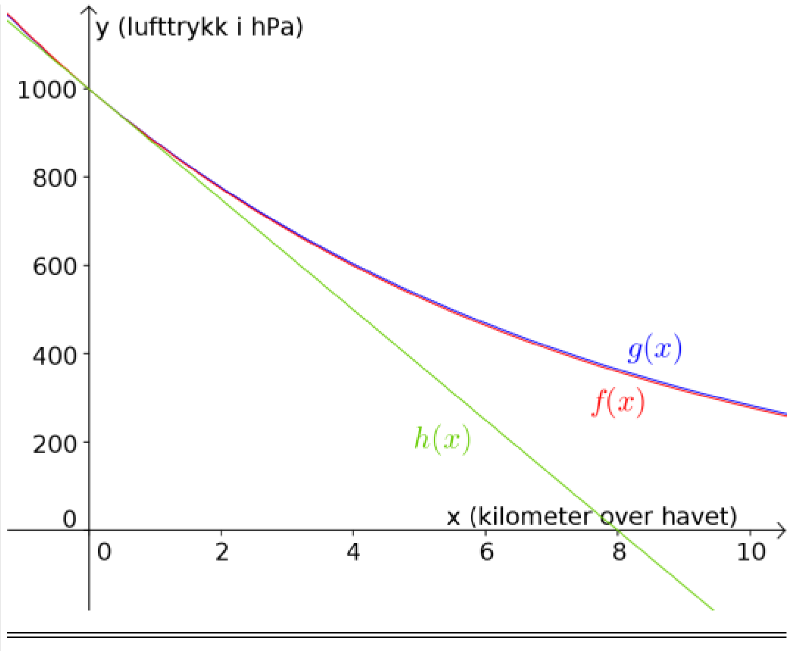
$$h(x) = -125x + 1\,000.$$

Vi tegner dette inn i *GeoGebra*-filen fra deloppgave b).




Den siste setningen i sitat 3 sier at modellen $h$ bare er gyldig inntil noen hundre meter over havet. Det kan vi se på grafene. Der $x$ er liten, så er $h$ ganske lik $f$ og $g$, men $h$ minker usannsynlig fort i forhold til de andre når $x$ blir større. Etter hvert gir $h$ negativt lufttrykk, som ikke er mulig.

**Svar:** Modellen er $h(x) = -125x + 1\,000$.

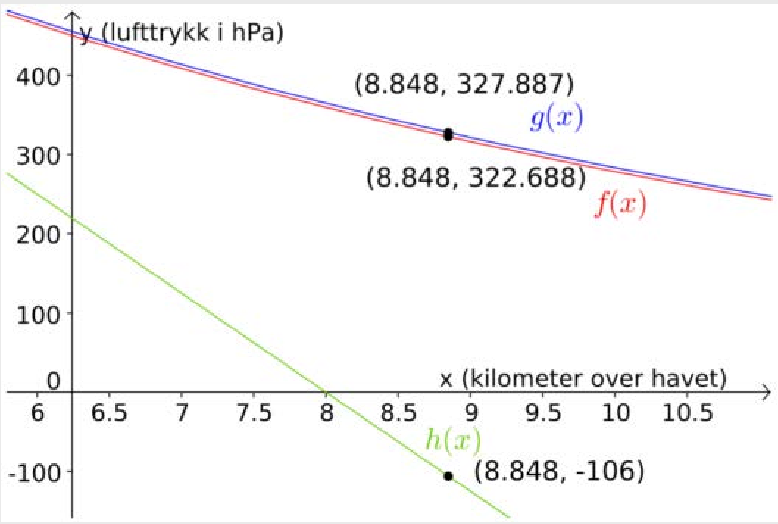



**d)**

Bruk hver av de tre modellene $f$, $g$ og $h$ til å bestemme lufttrykket 8 848 meter over havoverflaten. Sammenlikn svarene du får, med sitat 4, og kommenter.

**Løsningsforslag d)**

Vi finner funksjonsverdiene $f(8,848)$, $g(8,848)$ og $h(8,848)$. Det kan vi gjøre enkelt ved å skrive det direkte inn i *GeoGebra*. Eventuelt kan vi se på *skjæringspunktene* der de tre *grafene* krysser linjen $x = 8,848$.




Her ser vi at $f(8,848) \approx 323$, $g(8,848) \approx 328$ og $h(8,848) \approx -106$. Ved Mount Everest skal lufttrykket være cirka én tredjedel av $1\,000$ hPa, altså cirka $333$ hPa. De to *eksponentielle* modellene var ganske nærme, mens den *lineære* modellen viser en usannsynlig verdi. Sitat $3$ sier at den lineære modellen kun skal benyttes på steder som er inntil noen hundre meter over havet, og da er det tydelig at Mount Everest er utenfor gyldighetsområdet.

**Svar:** Vi har $f(8,848) \approx 323$, $g(8,848) \approx 328$ og $h(8,848) \approx -106$. Det egentlige lufttrykket skal være rundt $333$ hPa. Sitat $3$ sier at den lineære modellen kun skal benyttes på steder som er inntil noen hundre meter over havet, og da gir $h$-verdien mening.