MAT1015 2015 Vår

Eksamenstid:

5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:

Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Del 1 har 8 oppgaver. Del 2 har 7 oppgaver.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Bruk av digitale verktøy som graftegner og regneark skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
- vurderer om svar er rimelige

Andre opplysninger:

Kilder for bilder, tegninger osv.

- Bilder, tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng) Nettkode: E-4CR5

Dag	Temperatur
Mandag	$4^\circ\mathrm{C}$
Tirsdag	$10^\circ\mathrm{C}$
Onsdag	$12^\circ\mathrm{C}$
Torsdag	$5^\circ\mathrm{C}$
Fredag	$6^\circ\mathrm{C}$
Lørdag	

Tabellen ovenfor viser hvordan temperaturen har variert i løpet av noen dager.

Hva må temperaturen være på lørdag dersom medianen av målingene skal bli 7 °C ?

Løsningsforslag

Vi setter opp de forskjellige temperaturene i stigende rekkefølge.

$$4^\circ\mathrm{C} - 5^\circ\mathrm{C} - 6^\circ\mathrm{C} - 10^\circ\mathrm{C} - 12^\circ\mathrm{C}$$

Vi skal plassere et tall på denne skalaen slik at *gjennomsnittet* av de to midterste er $7^\circ\mathrm{C}$. Slik som det er nå, er det $6^\circ\mathrm{C}$ som er i midten. Det betyr at vi må finne et tall som står etter $6^\circ\mathrm{C}$, for å få *medianen* opp til $7^\circ\mathrm{C}$. Vi kan ikke plassere det nye tallet etter $10^\circ C$, for da vil $6^\circ\mathrm{C}$ og $10^\circ\mathrm{C}$ være i midten, og gjennomsnittet av disse er $8^\circ\mathrm{C}$, ikke $7^\circ\mathrm{C}$. Derfor skal vi plassere lørdagens temperatur slik:

$$4^\circ\mathrm{C} - 5^\circ\mathrm{C} - 6^\circ\mathrm{C} - X - 10^\circ\mathrm{C} - 12^\circ\mathrm{C}$$

der X er temperaturen på lørdag. Medianen av tallene over er gjennomsnittet av de to midterste tallene, altså $6^\circ\mathrm{C}$ og X. Hvis medianen skal være $7^\circ\mathrm{C}$, må derfor X være lik $8^\circ C$.

Svar: Temperaturen på lørdagen må være $8^\circ C$.

Oppgave 2 (1 poeng) Nettkode: E-4CR7

En vare koster i dag 240 kroner. Prisen er da satt ned med 20 %.

Hvor mye kostet varen før prisen ble satt ned?

Løsningsforslag

Vi ser at $240\ \mathrm{kr}$ er $80\ \%$ av originalprisen. Med andre ord, vi har at

$$\text{originalpris} \cdot 0,8 = 240\ \mathrm{kr}.$$

Det betyr at originalprisen må være $\frac{240}{0{,}8} = \frac{2\,400}{8}$ kroner. Vi vet at $24 = 8 \cdot 3$, så dette er lik

$$\frac{24 \cdot 100}{8} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 100}{8} = 3 \cdot 100 = 300,$$

så originalprisen var $300\ \mathrm{kr}$.

Svar: $\underline{\underline{300\ \mathrm{kr}}}$

Oppgave 3 (2 poeng) Nettkode: E-4CR9

Forskere antar at universet er ca. 14 milliarder år gammelt.

a)
Skriv 14 milliarder på standardform.

Løsningsforslag a)

Et tall på standardform er på formen $a \cdot 10^n$ der a er et tall mellom 1 og 10, og n er et heltall.

Vi har at 1 millard er $1\,000\,000\,000 = 10^9$, så 14 milliarder er $14 \cdot 10^9$. Dette er nesten på standardform, bortsett fra at tallet før tierpotensen ikke er mellom 1 og 10. Vi vet at $14 = 1,4 \cdot 10$, så *tallet på standardform* er

$$14 \cdot 10^9 = 1,4 \cdot 10 \cdot 10^9 = 1,4 \cdot 10^{10}.$$

Svar: $\underline{\underline{1,4 \cdot 10^{10}}}$

b)
I ett år er det ca. 32 millioner sekunder.

Omtrent hvor mange sekunder gammelt er universet? Skriv svaret på standardform.

Løsningsforslag b)

Én million er $1\,000\,000 = 10^6$, så 32 millioner er $32 \cdot 10^6$. Dette er cirka antall sekunder i året. Universet er cirka $1,4 \cdot 10^{10}$ år gammelt, og det er

$$32 \cdot 10^6 \cdot 1,4 \cdot 10^{10} = 32 \cdot 1,4 \cdot 10^{6+10}$$

sekunder. Vi regner ut $32 \cdot 1,4$ for hånd.

  3 2 · 1, 4 = 4 4, 8
1 2 8
3 2
4 4 8

Vi ser at $44,8 = 4,48 \cdot 10$, så universet er

$$4,48 \cdot 10^{6+10+1} = 4,48 \cdot 10^{17}$$

sekunder gammelt.

Svar: $4,48 \cdot 10^{17}$ sekunder

Oppgave 4 (2 poeng) Nettkode: E-4CRC

Regn ut

a)
$\frac{3^2 - 2^3}{2^0 \cdot 4}$

Løsningsforslag a)

Vi regner ut *telleren* og *nevneren* hver for seg til å begynne med. Vi starter med telleren. Her skal vi trekke ledd fra hverandre, og vi har ingen potensregler som sier noe om det. Derfor regner vi ut hver *potens* for seg, og deretter *subtraherer* vi. Vi får at $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ og $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, så telleren er $3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$. I nevneren har vi $2^0 \cdot 4$; vi vet at $2^0 = 1$, så nevneren er rett og slett 4. Dermed får vi at brøken er $\frac{1}{4}$, eller en av de andre nevnt under.

$$\frac{1}{4} = 0,25 = 2^{-2}$$

Svar: Det blir $\frac{1}{4} = 0,25 = 2^{-2}$

b)

$\frac{(6a)^2 \cdot b^2}{9a \cdot b^{-2}}$

Løsningsforslag b)

Vi tar *telleren* først. Den er $(6a)^2 \cdot b^2$. Vi vet at $\left(6a\right)^2 = 6^2 \cdot a^2$, så telleren er $6^2 \cdot a^2 \cdot b^2$. *Nevneren* kan vi ikke gjøre noe mer med for seg selv. Nå husker vi at vi kan flytte tall opp fra nevneren hvis vi bytter fortegn på *eksponenten*. Da får vi

$$\frac{6^2 a^2 b^2}{9a^1 \cdot b^{-2}} = \frac{6^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot a^{-1} \cdot b^2}{9},$$

der vi har brukt at a er det samme som a^1. Vi samler sammen det som har samme grunntall.

$$\frac{6^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot a^{-1} \cdot b^2}{9} = \frac{6^2}{9} \cdot \left(a^2 \cdot a^{-1}\right) \cdot \left(b^2 \cdot b^2\right).$$

Videre kan vi legge sammen eksponentene til potensene med samme grunntall. Da får vi

$$\frac{6^2}{9} \cdot \left(a^{2-1}\right) \cdot \left(b^{2+2}\right) = \frac{6^2}{9} \cdot a \cdot b^4.$$

Til slutt vil vi forenkle brøken $\frac{6^2}{9}$. Vi vet at $6 = 2 \cdot 3$, så $6^2 = 2^2 \cdot 3^2$. Videre er $9 = 3^2$. Dermed får vi

$$\frac{6^2}{9} = \frac{2^2 \cdot 3^2}{3^2} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^{-2} = 2^2 = 4.$$

Vi setter inn dette i uttrykket vårt, og får

$$4 \cdot a \cdot b^4.$$

Svar: $\underline{\underline{4ab^4}}$

Oppgave 5 (2 poeng) Nettkode: E-4CRF

Antall elever ved en skole har avtatt lineært de siste 10 årene. For 10 år siden var det 1 400 elever ved skolen. Nå er det 1 340 elever ved skolen.

a)

Bestem en modell som viser utviklingen disse 10 årene.

Løsningsforslag a)

Vi lar x være antall år etter 10 år siden, og $f(x)$ være antall elever i år x. Det vil for eksempel si at $f(2)$ er antall elever ved skolen for 8 år siden, og $f(10)$ er antall elever i dag. Det vi skal gjøre er å finne en *likning* $f(x) = ax + b$ som passer med dataene vi har fått, altså at $f(0) = 1\,400$ og $f(10) = 1\,340$. Det første vi gjør er å finne *konstantleddet* til funksjonen. Det er greit å gjøre, for vi har laget modellen vår slik at $f(0) = 1\,400$, så konstantleddet vårt er $b = 1\,400$. Videre skal vi finne *stigningstallet*. Antallet elever har sunket med $1\,400 - 1\,340 = 60$ elever på 10 år; det er en vekst på -6 elever per år. Nå har vi funnet at stigningstallet til f er lik $a = -6$. Dermed er modellen vår

$$f(x) = -6x + 1\,400.$$

Svar: Hvis $f(x)$ er antall elever for $10 - x$ år siden, er $f(x) = -6x + 1\,400$.

b)

De neste årene regner en med at antall elever vil avta med 0,5 % per år.

Bestem en modell som viser hvor mange elever det vil være ved skolen om x år.

Løsningsforslag b)

Vi kan modellere dette med en *eksponentialfunksjon* $g(x) = g(0) \cdot v^x$, der $g(x)$ er antall elever ved skolen x år etter i år, og v er *vekstfaktoren* til elevmassen. Vi vet at $g(0)$ er antall elever ved skolen i dag, altså $1\,340$. Videre minker antall elever med $0,5\ \%$ hvert år, som gir en vekstfaktor på

$$100\ \% - 0,5\ \% = 99,5\ \% = 0,995.$$

Dermed er modellen vår gitt ved

$$g(x) = 1\,340 \cdot 0,995^x.$$

Svar: Hvis $g(x)$ er antall elever ved skolen x år etter i år, så er $g(x) = 1\,340 \cdot 0,995^x$.

Oppgave 6 (6 poeng) Nettkode: E-4CRK

Alder	Frekvens
$[20,30\rangle$	10
$[30,40\rangle$	20
$[40,50\rangle$	30
$[50,70\rangle$	40

Tabellen ovenfor viser aldersfordelingen for lærerne ved en skole.

a)
Bestem gjennomsnittsalderen for lærerne ved skolen.

Løsningsforslag a)

At vi antar at dataene er jevnt fordelt innenfor gruppene, betyr at for eksempel gjennomsnittalderen av alle som er i intervallet $[20, 30\rangle$ er $\frac{20+30}{2} = 25$.

Tabellen lister opp aldersgrupper på venstre side, og *frekvens* på venstre side. I denne oppgaven betyr frekvensen antallet lærere som er i aldersgruppen på venstre side. Dermed er det 10 lærere som er mellom 20 og 30 år, 20 lærere som er mellom 30 og 40 år, og så videre. Vi skal finne gjennomsnittsalderen for lærerne. Siden vi arbeider med gruppert informasjon, antar vi at gjennomsnittsalderen i de forskjellige aldersgruppene er midt i intervallet. Når vi regner *gjennomsnitt* er dette det samme som å anta at alle de 10 lærerne i aldersintervallet $[20, 30\rangle$ er 25 år. Vi finner gjennomsnittsalderen ved å legge sammen aldrene på alle lærerne, og dividere med antall lærere. Vi antar at 10 av lærerene er 25 år, 20 av lærerne er 35 år og så videre. Gjennomsnittet blir dermed

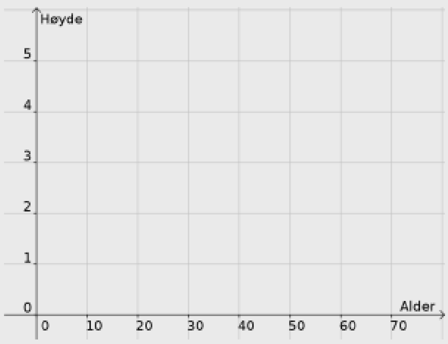
$$\begin{aligned} &\frac{25\cdot10+35\cdot20+45\cdot30+60\cdot40}{10+20+30+40} \\ = &\frac{250+700+1\ 350+2\ 400}{100} = \frac{4\ 700}{100} = 47. \end{aligned}$$

Svar: Gjennomsnittsalderen er 47 år.

b)
Lag et histogram som viser aldersfordelingen for lærerne.

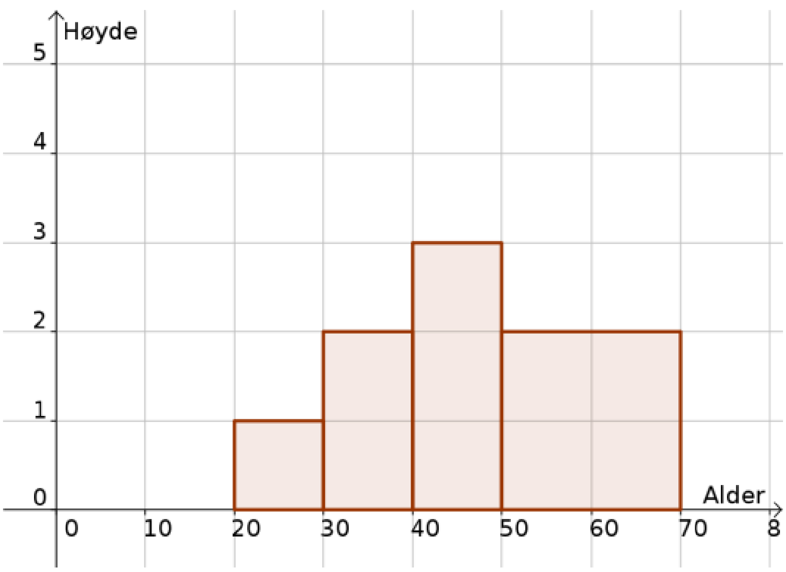
Løsningsforslag b)

Det aller første vi gjør, er å tegne opp et passende *koordinatsystem*. På *x-aksen* skal det være alder, og på *y-aksen* har vi høyden på stolpene. (Høyden til stolpene skal være $\frac{\text{frekvens}}{\text{klassebredde}}$.) Vi må også tilpasse aksene våre. Vi husker at det er *arealet* av søylene som gir oss informasjonen i et *histogram*, ikke bare høyden; derfor velger vi aksene som under.



Nå skal vi lage søylene våre. I aldersgruppen $[20, 30\rangle$ er det 10 lærere. Det betyr at vi skal lage en søyle som har grunnflate 10 (fordi det er så stort aldersintervallet er), og den skal ha areal 10 (fordi det er 10 lærere i denne aldersgruppen). Da må høyden til søylen være 1. Tilsvarende må høyden på søylene til aldersgruppene $[30, 40\rangle$ og $[40, 50\rangle$ være henholdsvis 2 og 3. Det siste intervallet, $[50, 70\rangle$, er derimot dobbelt så stort som de forrige. Vi skal lage en søyle som har 20 som grunnflate, og areal 40. Da må søylen ha høyde 2. Resultatet er vist under.

Svar:



c)
Utvid tabellen med en kolonne som viser relativ frekvens, og en kolonne som viser kumulativ frekvens.

Løsningsforslag c)

Det aller første vi gjør, er å skrive ned den nye tabellen vi skal fylle ut.

Alder	Frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ frekvens
$[20, 30\rangle$	10		
$[30, 40\rangle$	20		
$[40, 50\rangle$	30		
$[50, 70\rangle$	40		

Vi starter med de *relative frekvensene*. La oss si at vi trekker ut en tilfeldig lærer. Sannsynligheten for at denne læreren er i aldersgruppen $[20, 30\rangle$, er den relative frekvensen for $[20, 30\rangle$. Det er 10 personer i gruppen $[20, 30\rangle$, og det er $10 + 20 + 30 + 40 = 100$ lærere, så den relative frekvensen for $[20, 30\rangle$ er $\frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1$. Tilsvarende er den relative frekvensen for $[30, 40\rangle$ lik $\frac{20}{100} = 0,2$, og så videre. Vi fyller dette inn i tabellen.

Alder	Frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ frekvens
$[20, 30\rangle$	10	$0,1$	
$[30, 40\rangle$	20	$0,2$	
$[40, 50\rangle$	30	$0,3$	
$[50, 70\rangle$	40	$0,4$	

Så skal vi regne ut de *kumulative frekvensene*. Kumulativ frekvens for en aldersgruppe, er antall lærere som er i denne aldersgruppen eller som er yngre. Intervallet $[20, 30\rangle$ er den laveste aldersgruppen, og det er 10 i denne gruppen, så den kumulative frekvensen er bare 10. I aldersgruppen $[30, 40\rangle$ er det 20 lærere, men i tillegg er det 10 lærere som er *yngre* enn 30 år, så den kumulative frekvensen er $20 + 10 = 30$. Videre er den kumulative frekvensen for $[40, 50\rangle$ lik $30 + 20 + 10 = 60$, og for $[50, 70\rangle$ er den $40 + 30 + 20 + 10 = 100$. Vi fyller dette inn i tabellen. Den utfylte tabellen er vist under.

Svar:

Alder	Frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ frekvens
$[20, 30\rangle$	10	$0,1$	10
$[30, 40\rangle$	20	$0,2$	30
$[40, 50\rangle$	30	$0,3$	60
$[50, 70\rangle$	40	$0,4$	100

Oppgave 7 (6 poeng) Nettkode: E-4CRR

Karl står på balkongen og kaster en ball opp i lufta. Etter t sekunder er ballen tilnærmet

$h\left(t\right)$ meter over bakken, der

$h\left(t\right) = -5t^2 + 10t + 15$

a)

Fyll ut tabellen nedenfor

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$h\left(t\right)$		18,75		18,75		8,75	

Løsningsforslag a)

Det første vi gjør er å skrive av tabellen.

t	**0**	$0,5$	**1**	$1,5$	**2**	$2,5$	**3**
$h(t)$		$18,75$		$18,75$		$8,75$	

Nå starter vi utfyllingen. Under der 0 står, skal vi skrive verdien til $h(0)$. Det gjør vi ved å sette inn $t = 0$ i uttrykket for h. Da får vi

$$h\big(0\big) = -5 \cdot 0^2 + 10 \cdot 0 + 15 = 15.$$

Vi skriver dette inn i tabellen.

t	**0**	$0,5$	**1**	$1,5$	**2**	$2,5$	**3**
$h(t)$	15	$18,75$		$18,75$		$8,75$	

Videre skal vi regne ut $f(1)$, $f(2)$ og $f(3)$. Det gjør vi på helt tilsvarende måte som over. Vi får

$$\begin{aligned} f(1) &= -5 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 + 15 = -5 + 10 + 15 = 20, \\ f(2) &= -5 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 + 15 = -5 \cdot 4 + 20 + 15 = 15, \text{og} \\ f(3) &= -5 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 + 15 = -5 \cdot 9 + 30 + 15 = 0, \end{aligned}$$

altså $f(1) = 20$, $f(2) = 15$ og $f(3) = 0$. Vi fyller dette inn i tabellen som vist under.

Svar:

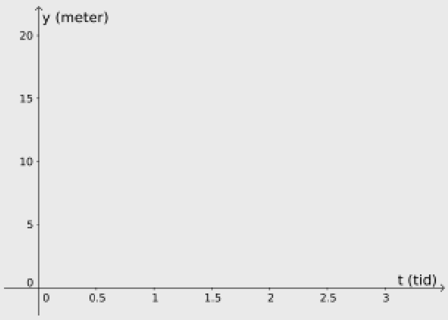
t	**0**	$0,5$	**1**	$1,5$	**2**	$2,5$	**3**
$h(t)$	15	$18,75$	20	$18,75$	15	$8,75$	0

b)

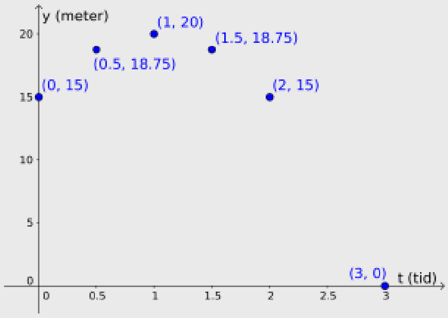
Tegn grafen til h.

Løsningsforslag b)

Det første vi gjør er å tegne et *koordinatsystem*. Vi er kun interessert positive t-verdier, fordi negative t-verdier ikke har noen tilknytning til oppgaven. Vi tegner heller ikke *x-aksen* for større verdier enn 3, fordi vi ikke har noen informasjon om grafen der. Videre ser vi at $h(t)$ tar verdier mellom 0 og 20, så vi tegner *y-aksen* mellom disse verdiene. Vi må huske å sette navn på aksene.

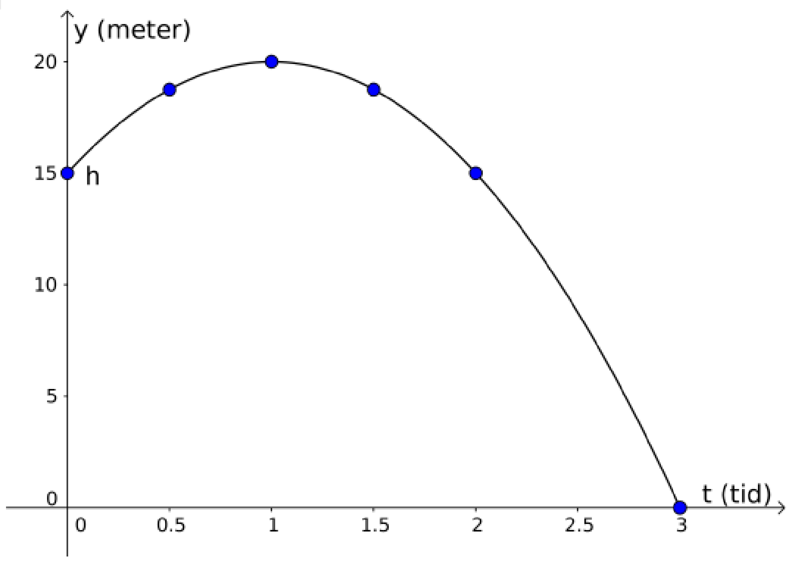


Nå skal vi tegne inn punktene fra tabellen. Under 0 i tabellen står det 15. Det betyr at $f(0) = 15$, altså at $(0, 15)$er et punkt på grafen til h. Vi tegner av en prikk på dette stedet i koordinatsystemet. På tilsvarende måte skal vi tegne av prikker i punktene $(0.5, 18.75)$, $(1, 20)$, $(1.5, 18.75)$ og så videre.



Til slutt skal vi tegne grafen som går mellom disse prikkene. Vi prøver å gjøre kurven så jevn som mulig, og tegner derfor ikke rette streker mellom punktene. Resultatet er vist under.

Svar:



c)

Gi en praktisk tolkning av verdiene av $h\left(0\right)$ og $h\left(3\right)$.

Løsningsforslag c)

Tallet $h(0) = 15$ er hvor høyt ballen var over bakken idet Karl kastet den. Karl stod på en balkong, og dette betyr at balkongen var cirka 15 meter høy. Videre er $h(3)$ ballens høyde over bakken etter 3 sekunder; denne høyden er 0, og det betyr at ballen har truffet bakken. Med andre ord tok det 3 sekunder fra ballen ble kastet til den traff bakken.

Svar: Ballens starthøyde, og omtrentlig balkongens høyde, var $h(0) = 15$ meter. Siden $h(3) = 0$ traff ballen bakken 3 sekunder etter den ble kastet.

Oppgave 8 (3 poeng) Nettkode: E-4CRV

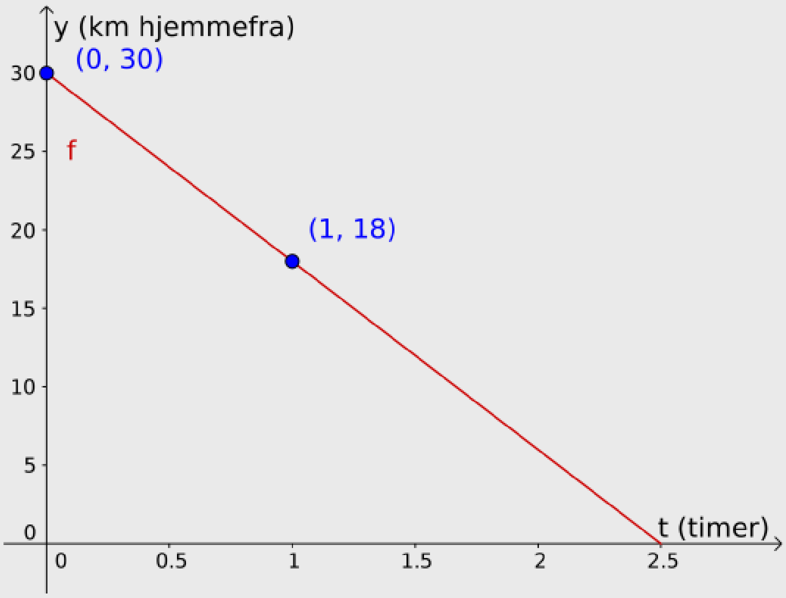
Sigurd er 30 km fra hjemmet sitt. Han sykler hjemover med en konstant fart på 12 km/h.

Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom antall timer og antall kilometer han er hjemmefra.

Hvor lang tid tar det før han kommer hjem?

Løsningsforslag

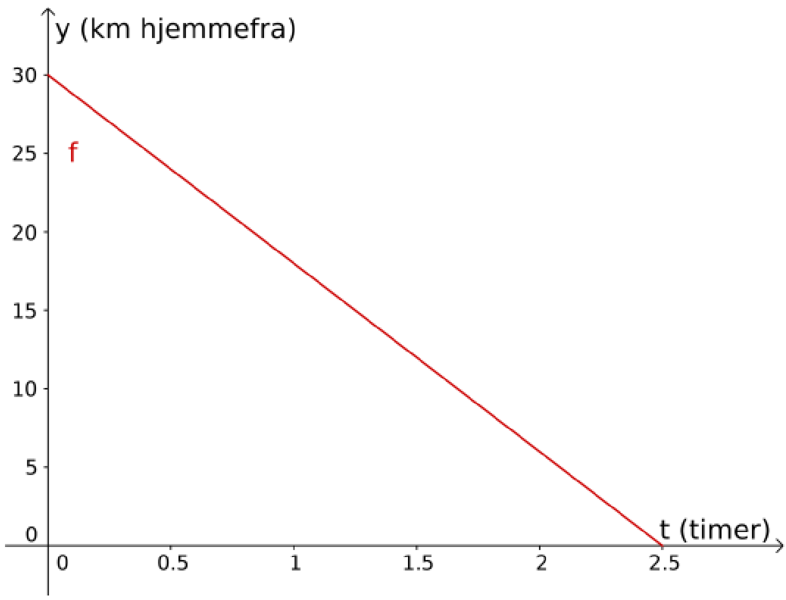
Vi skal tegne *grafen* som representerer Sigurds avstand hjemmefra. Vi antar at Sigurd sykler rett hjem, så grafen skal være en rett linje. Derfor trenger vi bare to punkter på grafen. Vi lar $t = 0$ når Sigurd starter å sykle hjemover, og da er han $30\,\mathrm{km}$ hjemmefra. Det betyr at $(0, 30)$ er et punkt på grafen. Sigurd sykler i en konstant fart på $12\,\mathrm{km/t}$, så etter 1 time er han $30\,\mathrm{km/t} - 12\,\mathrm{km/t} = 18\,\mathrm{km/t}$ hjemmefra. Det betyr at $(1, 18)$ er enda et punkt på grafen. Vi tegner punktene inn i et *koordinatsystem*, og finner hele grafen ved å trekke den rette linjen mellom de to punktene.



Vi kan se direkte at likningen til linjen er $f(t) = 30 - 12t$, fordi *konstantleddet* er 30 (Sigurd starter $30\,\mathrm{km}$ hjemmefra) og *stigningstallet* er -12 (fordi Sigurd sykler i en konstant *fart* på $12\,\mathrm{km/t}$ hjemover).

Videre skal vi finne ut hvor lang tid det tar før Sigurd kommer hjem. Sigurd er hjemme når han er 0 kilometer i avstand fra hjemmet sitt, altså der $f(t) = 0$. På grafen vår ser vi helt tydelig at $f(t) = 0$ der $t = 2,5$, altså bruker Sigurd 2 timer og 30 minutter på hjemreisen. Vi kunne også løst dette problemet ved å løse likningen $f(t) = 0$, altså $-12t + 30 = 0$. Vi legger til $12t$ på begge sider og dividerer på 12. Da får vi $t = \frac{30}{12} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{5}{2} = 2,5,$ akkurat som før.

Svar: Sigurd brukte 2 timer og 30 minutter på hjemreisen, gitt at han syklet i retningen rett mot hjemmet sitt.



DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng) Nettkode: E-4CRX

Per, Pål og Espen skal låne 3 000 kroner hver. Lånene skal betales tilbake etter seks måneder. De får følgende betingelser:

- Per får tilbud om å betale tilbake 3 450 kroner etter seks måneder.
- Pål får tilbud om en månedlig rente på 2,2 %.
- Espen får tilbud om en månedlig rente på 1,8 % og et etableringsgebyr på 100 kroner.

Gjør beregninger, og avgjør hvem som får det beste tilbudet.

Løsningsforslag

Vi regner ut hvor mye penger man må betale totalt. Det første lånet, altså lånet til Per, koster ganske enkelt $3\,450$ kroner. Pål har en månedlig rente på $2,2\ \%$. Etter 6 måneder, blir det totale beløpet Pål må betale, lik

$$3\,000\ \mathrm{kr} \cdot 1,022^6 \approx 3\,418,43\ \mathrm{kr}.$$

Dette er litt mindre enn det Per måtte betale. Espen betaler $1,8\ \%$ i månedlig rente, men med et etableringsgebyr på 100 kroner. Derfor må Espen betale totalt

$$3\,000\ \mathrm{kr} \cdot 1,018^6 + 100 \approx 3\,438,93\ \mathrm{kr}.$$

Dette er mindre enn Per, men ikke like lite som Pål. Derfor fikk Pål det beste tilbudet.

Svar: Pål fikk det beste tilbudet. (Pål betalte $3\,418,43\ \mathrm{kr}$, mens Per og Espen betalte henholdsvis $3\,450\ \mathrm{kr}$ og $3\,438,93\ \mathrm{kr}$.)

Oppgave 2 (4 poeng) Nettkode: E-4CS0

Tabellen nedenfor viser antall kvinnelige studenter i Norge noen utvalgte år.

År	2001	2003	2005	2007	2009	2011	2013
Antall kvinnelige studenter	53553	58237	59562	63292	62957	68391	73332

La $x = 0$ svare til år 2000, $x = 1$ til år 2001, og så videre.

a)
Bruk opplysningene i tabellen til å bestemme en lineær modell som viser hvordan antall kvinnelige studenter har utviklet seg i denne perioden.

Løsningsforslag a)

Først lager vi et *regneark* med tallene vi har. Dette gjør vi ved å velge «Regneark» i «Vis»-menyen, og å skrive inn punktene. I den første kolonnen skriver vi x-verdiene tilsvarende årene i tabellen, altså 1, 3, 5 og så videre, som representerer 2001, 2003, 2005 og så videre. I neste kolonne skriver vi antall kvinnelige studenter i Norge i de gitte årene. Vi markerer tallene vi har skrevet, og velger «Liste med punkt» i «Lag»-menyen. Listen blir hetende «Liste1». Nå kan vi finne en lineær modell ved å skrive kommandoen

```
RegLin[Liste1]
```

i «Skriv inn»-vinduet. Da får vi opp en linje, og den har likning

$$y = 1\,482,86x + 52\,380,57.$$

Dette er den lineære modellen vår.

Svar: Den lineære modellen er $y = 1\,482,86x + 52\,380,57$.

b)
Hvor stor har økningen i antall kvinnelige studenter vært i gjennomsnitt per år i denne perioden?

Løsningsforslag b)

Fra 2001 til 2013 økte antall kvinnelige studenter med

$$73\,332 - 53\,553 = 19\,779.$$

Denne økningen skjedde over 12 år, så gjennomsnittlig økning er

$$\frac{19\ 779}{12} = 1\ 648,25$$

studenter per år. Vi kunne også sett dette ved å tegne linjen mellom det første og siste punktet i *GeoGebra*-filen vår, og sett på *stigningstallet* til denne linjen.

En annen mulighet for å estimere gjennomsnittlig økning, vil være å bruke stigningstallet til den lineære modellen vi fant i deloppgave a). I så fall ville vi svart $1\ 482,86$. Dette tallet vil være en bedre estimator på hvordan ting har vært og hvordan det vil utvikle seg videre. Dette svaret vil også være mer robust enn *gjennomsnittet* vi regnet ut over. Det er fordi det er mindre sensitivt for forskjeller der $x = 1$ og $x = 13$, som er de eneste verdiene vi bruker for å finne gjennomsnittet.

Svar: Gjennomsnittlig økning var $1\ 648,25$ studenter i året.

c)

Anta at denne utviklingen fortsetter i årene som kommer.

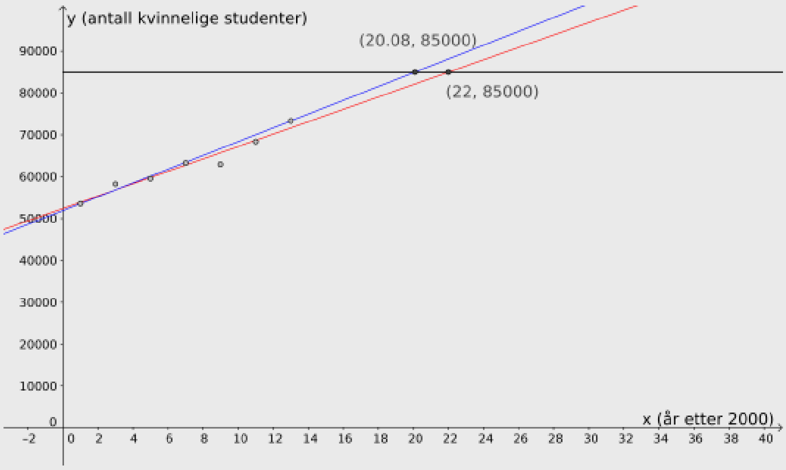
I hvilket år vil antall kvinnelige studenter passere 85 000?

Løsningsforslag c)

Vi har funnet likningen til den lineære modellen i **a)**. Hvis antall kvinnelige studenter hadde økt med samme gjennomsnittøkning som i perioden mellom 2001 og 2003, ville den lineære modellen vært linjen som gikk gjennom punktene $(1, 53\ 553)$ og $(13, 73\ 332)$. Å finne ut når antall kvinnelige studenter passerer $85\ 000$, tilsvarer å finne *skjæringspunktene* mellom disse linjene og linjen $y = 85\ 000$. Dette gjør vi ved å skrive

```
y = 85000
```

i GeoGebra, og å markere krysningspunktene som vist under.



På bildet er den røde linjen den lineære modellen vi fant i **a)**, mens den blå linjen viser hva som skjer hvis vi følger den gjennomsnittlige økningen i **b)**. I følge modellen i **a)** vil antall kvinnelige studenter passere $85\,000$ når $x = 22$, altså i 2022; i følge modellen i **b)** vil det skje i 2020.

Svar: I følge modellen i **a)** vil antall kvinnelige studenter passere $85\,000$ i 2022, og i følge den gjennomsnittlige veksten i **b)** vil det skje i 2020.

Oppgave 3 (3 poeng) Nettkode: E-4CS4

Tallene nedenfor viser temperaturen målt i grader celsius klokka 16 den 30. juni de siste 20 årene i by A.

20 18 20 19 19 21 20 22 22 18 17 18 22 19 21 20 22 22 21 17

a)
Bruk regneark til å bestemme gjennomsnitt og standardavvik for datamaterialet.

Løsningsforslag a)

Det første vi gjør er å skrive ned alle tallene i en kolonne i *regnearket*. Vi har brukt Excel.

	A
1	**Temperatur**
2	20
3	18
4	20
5	19
6	19
7	21
8	20
9	22
10	22
11	18
12	17
13	18
14	22
15	19
16	21
17	20
18	22
19	22
20	21
21	17

For å regne *gjennomsnittet* og *standardavviket* av tallene, bruker vi henholdsvis funksjonen **GJENNOMSNITT** og **STDAV.P**. Vi bruker **STDAV.P** fordi vi vil regne ut standardavviket for hele datasettet. Hvis vi hadde brukt **STDAV**, ville vi fått estimerte verdier basert på utvalg. Vi har lagt temperaturene i **A**-kolonnen fra og med rad 2, og for finne gjennomsnittet og standardavviket skriver vi derfor

=GJENNOMSNITT(A2:A21)

og

=STDAV.P(A2:A21)

henholdsvis. Resultatet er vist under.

Svar: Vi har brukt formlene

=GJENNOMSNITT(A2:A21)

og

=STDAV.P(A2:A21)

	A	B	C
1	**Temperatur**	**Gjennomsnitt**	**Standardavvik**
2	20	19,9	1,670329309
3	18		
4	20		
5	19		
6	19		
7	21		
8	20		
9	22		
10	22		
11	18		
12	17		
13	18		
14	22		
15	19		
16	21		
17	20		
18	22		
19	22		
20	21		
21	17		

b)

Tilsvarende data er samlet inn i by B. Gjennomsnittet her er 20,8 °C , og standardavviket er 3,4 °C.

Noen planlegger et større utearrangement 30. juni neste år og er avhengige av varmt vær. Arrangementet skal finne sted enten i by A eller i by B.

Hvilket råd vil du gi arrangørene ut fra de oppgitte dataene?

Løsningsforslag b)

Fordi *standardavviket* i by **B** er større enn i by **A**, vil temperaturen være mindre forutsigbar i by **B**. Derfor kan det være lurt å ha arrangementet i by **A**, gitt at en temperatur på rundt 20 grader er godt nok. På den andre siden er gjennomsnittstemperaturen i by **B** såpass mye større enn i by **A** at det kan gjøre opp for uforutsigbarheten.

Svar: By **A** gir mer forutsigbarhet i temperaturen, mens by **B** gir høyere gjennomsnittstemperatur.

Oppgave 4 (7 poeng) Nettkode: E-4CS8

Ovenfor ser du tre figurer F_1 , F_2 og F_3 . Tenk deg at du skal fortsette å lage figurer etter samme mønster.

a)

Hvor mange linjestykker vil det være i F_4 ?

Løsningsforslag a)

Vi ser at hver figur er den samme som forrige figur, men tillagt en rad med trekanter. For å få F_2 legger man til 2 trekanter, og man legger til 3 trekanter til for å komme videre til F_3. For å komme til F_4 legger man derfor til 4 trekanter. Hver trekant har 3 linjestykker i seg, så derfor må vi legge til $4 \cdot 3 = 12$ linjestykker for å komme fra F_3 til F_4. Figur F_3 har allerede 18 linjestykker i seg, som skrevet i oppgaven, og da blir antall linjestykker i F_4 lik $18 + 12 = 30$.

Svar: 30 linjestykker

b)

Forklar hvordan antall linjestykker endrer seg fra figur til figur, og lag et regneark som gir en oversikt over antall linjestykker i de 20 første figurene F_1 , F_2 , ..., F_{20}

Løsningsforslag b)

For å komme fra figur F_n til figur F_{n+1}, må vi legge til $n + 1$ nye trekanter, som hver har 3 linjestykker i seg. Det betyr at hvis x_n er antall linjestykker i figur F_n og x_{n+1} er antall linjestykker i figur F_{n+1}, så er

$$x_{n+1} = x_n + 3 \cdot (n + 1).$$

For eksempel ser vi at $x_1 = 3$, og da må $x_2 = x_1 + 3 \cdot 2 = 3 + 6 = 9$, og $x_3 = 9 + 3 \cdot 3 = 18$, akkurat som i henholdsvis figur F_2 og figur F_3.

Dette kan vi representere i et regneark. Vi fører opp en tabell over antall linjestykker i hver figur. I den første figuren er det 3 linjestykker.

	A	B
1	Figur nummer	Antall linjestykker
2	1	3
3	2	
4	3	
5	4	
6	5	
7	6	
8	7	
9	8	
10	9	
11	10	
12	11	
13	12	
14	13	
15	14	
16	15	
17	16	
18	17	
19	18	
20	19	
21	20	

Vi kan regne ut antall streker i figur 2 ved hjelp av $x_{n+1} = x_n + 3 \cdot (n+1)$, akkurat som over, bare ved hjelp av regnearket. Vi bytter ut x_n i formelen med ruten der antall linjer i forrige figur står, i dette tilfellet **B2**, og vi bytter ut n med tallet i kolonnen til venstre og opp, altså **A2**. Vi skriver det følgende i rute **B3**:

```
=B2 + 3*(A2 + 1)
```

Denne prosedyren skal vi gjøre for de resterende 18 figurene også, og vi kan gjøre det enkelt ved å "dra" boksen **B3** ned til **B21**. Se resultatet under.

Svar: Hvis x_n er antall linjestykker i figur F_n, så er $x_{n+1} = x_n + 3 \cdot (n+1)$..

	A	B
1	Figur nummer	Antall linjestykker
2	1	3
3	2	9
4	3	18
5	4	30
6	5	45
7	6	63
8	7	84
9	8	108
10	9	135
11	10	165
12	11	198
13	12	234
14	13	273
15	14	315
16	15	360
17	16	408
18	17	459
19	18	513
20	19	570
21	20	630

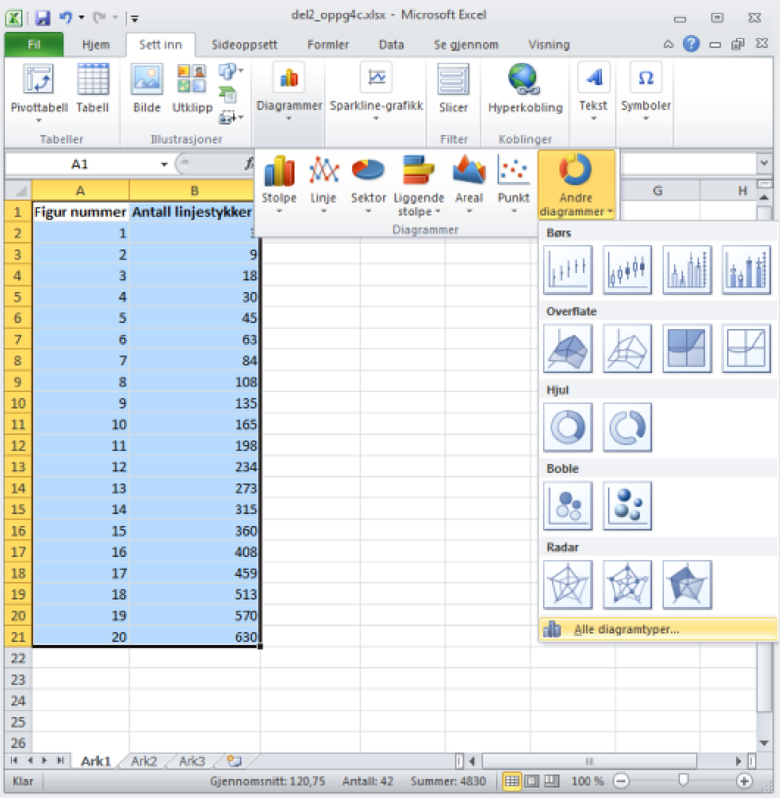
c)

Antall linjestykker i figur F_n kan skrives som et andregradsuttrykk.

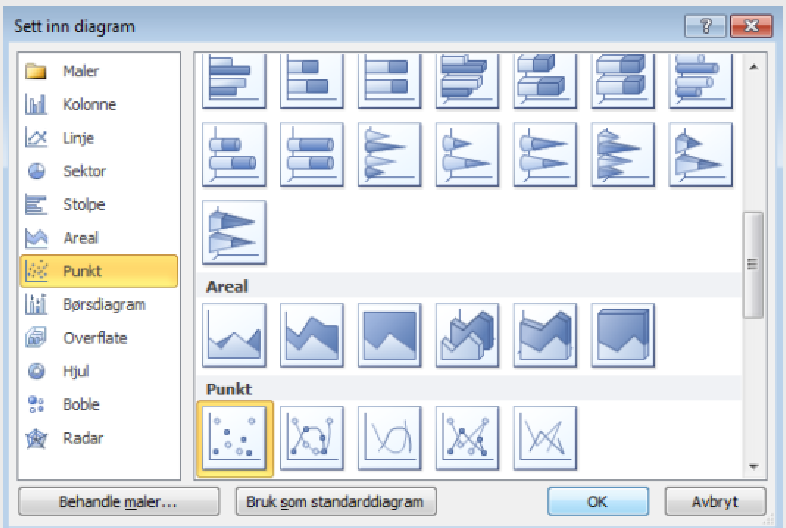
Bruk regresjon til å bestemme dette andregradsuttrykket.

Løsningsforslag c)

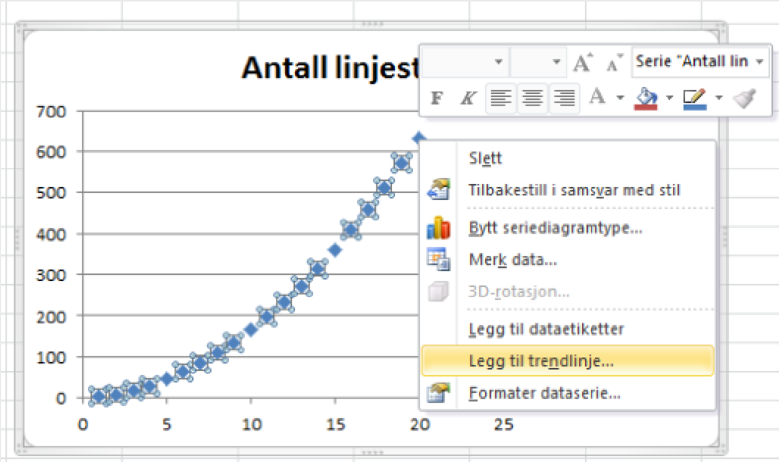
Vi bruker *GeoGebra*. Det første vi gjør er å markere cellene med punktene og velger diagrammer, og deretter velger «Andre diagrammer» som vist på bildet under.



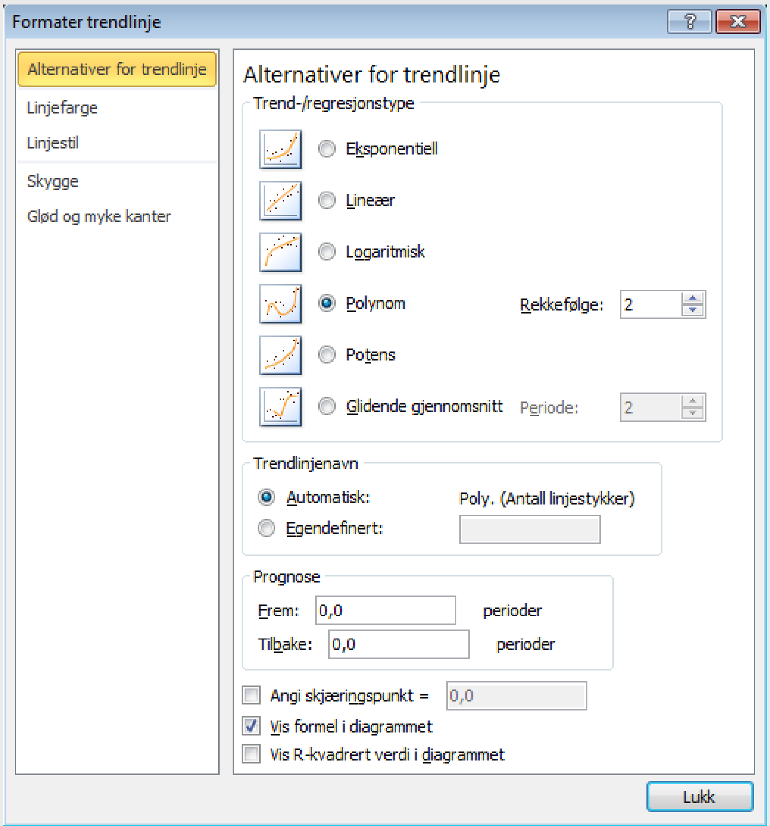
I det nye vinduet velger vi «Punkt» og deretter velger bildet med bare punkter på som vist under.



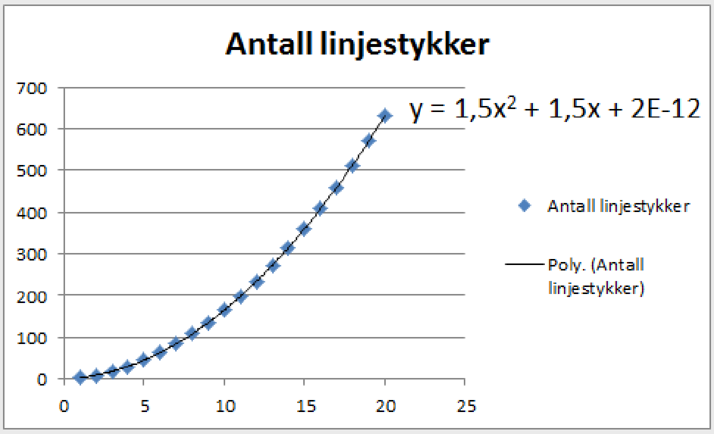
Vi får da opp en graf med punktene våre, men vi vil også lage en trendlinje og derfor høyreklikker vi og velger «Legg til trendlinje...».



Velg «Polynom» blant valgmulighetene. Dette betyr at vi vil finne et *polynom* som punktene passer til.



Vi får da opp en linje som passer til punktene og funksjonsuttrykket til linja.



Fordi funksjonen angir antall linjestykker, må $n = 0$ gi $F_0 = 0$ og derfor er antall linjestykker i figur F_n gitt ved $1,5n^2 + 1,5n$.

Svar: Figur F_n har $1,5n^2 + 1,5n$ linjestykker.

d)

Bruk andregradsuttrykket du fant i oppgave c) til å bestemme hvor mange linjestykker det vil være i F_{20}

Løsningsforslag d)

Fra deloppgave c) vet vi at figur F_n har $1,5n^2 + 1,5n$ linjestykker. Derfor må F_{20} ha

$$1,5 \cdot 20^2 + 1,5 \cdot 20 = 600 + 30 = 630,$$

akkurat som vi fikk i **b)**.

Svar: $1,5 \cdot 20^2 + 1,5 \cdot 20 = 600 + 30 = 630$.

Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4CSD

Du skal kjøpe ny sykkel, og du vil forsikre den. Dersom sykkelen blir stjålet, må du betale 2000 kroner i egenandel på forsikringen.

Anta at sykkelen koster P kroner som ny. Dersom sykkelen blir stjålet før det har gått et år, vil du få utbetalt $(P - 2000)$ kroner i erstatning fra forsikringsselskapet. Erstatningen avtar med 10 % per år.

a)
Forklar at $F(x) = (P - 2000) \cdot 0{,}9^x$ er en modell for mye du får utbetalt dersom sykkelen blir stjålet etter x år.

Løsningsforslag a)

La oss si at sykkelen ble stjålet etter 1 år. Den opprinnelige erstatningen man skulle fått er nå redusert med $10\,\%$, fra $(P - 2\,000)$ kr til $(P - 2\,000)$ kr $\cdot\, 90\,\%$. Dette er det samme som $(P - 2\,000) \cdot 0,9$ kr. Hvis den hadde blitt stjålet etter 2 år, ville vi fått $\left(P - 2\,000\right) \cdot 0,9 \cdot 0,9 = \left(P - 2\,000\right) \cdot 0,9^2$ kr i erstatning. Generelt, hvis sykkelen blir stjålet etter x år, så vil vi få

$$(P - 2\,000) \cdot 0,9^x \text{ kr}$$

i erstatning. Derfor er $F(x) = (P - 2\,000) \cdot 0,9^x$ en god modell.

Svar: Vekstfarten til erstatningen er $0,9$, så om sykkelen ble stjålet etter x år hadde vi fått $F(x) = (P - 2\,000) \cdot 0,9^x$ kroner i erstatning.

b)
Du velger å kjøpe en sykkel som koster 10 000 kroner.

Hvor mye får du utbetalt dersom sykkelen blir stjålet etter 7 år?

Løsningsforslag b)

Fra deloppgave a) vet vi at hvis sykkelen ble stjålet etter x år, så hadde vi fått

$$F(x) = (P - 2\,000) \cdot 0,9^x$$

kroner i erstatning, der P er det sykkelen kostet som ny. I vårt tilfelle kostet sykkelen $10\,000$ kr ny, og den ble stjålet etter 7 år, så $P = 10\,000$ og $x = 7$. Da får vi

$$\left(P - 2\,000\right) \cdot 0,9^x = \left(10\,000 - 2\,000\right) \cdot 0,9^7 \approx 3\,826,38$$

kroner i erstatning.

Svar: Cirka $3\,826,38$ kroner

c)

For å forsikre sykkelen må du betale 150 kroner i forsikringspremie per år. Anta at sykkelen blir stjålet etter x år.

Sett opp en modell som viser hvor mye du totalt sitter igjen med når du tar hensyn til det du har betalt i forsikringspremie i løpet av disse x årene.

Løsningsforslag c)

Her må vi tolke hva som menes med at sykkelen blir stjålet etter x år. Vi tolker det som at sykkelen er x år gammel når den blir stjålet. Hvis den blir stjålet første året, er $x = 0$. Hvis den blir stjålet det andre året er $x = 1$. Det tilsvarer altså at den stjeles etter 1 år.

Vi må betale forsikring en gang i året, første gang når vi kjøper sykkelen. Etter ett år betaler vi forsikringspremie for 2. gang. Etter 2 år betaler vi forsikringspremie for 3. gang og så videre. Etter x år, eller når sykkelen blir x år gammel, betaler vi forsikringspremie for gang nummer $x + 1$.

Totalt innbetalt premie hvis sykkelen stjeles etter x år blir

$$150 \cdot x$$

kroner. Utbetalt erstatningssum blir

$(10000 - 2000) \cdot 0{,}9^x = 8000 \cdot 0{,}9^x$

kroner. Når vi tar hensyn til innbetalt premie, får vi en erstatning på

$8000 \cdot 0{,}9^x - 150\,(x + 1)$

kroner.

Svar: Modellen er $(P - 2000) \cdot 0{,}9^x - 150\,(x + 1)$ der P er hvor mye sykkelen kostet da den ble kjøpt. Hvis sykkelen kostet $10\,000\,\mathrm{kr}$ som ny, ville vi sittet igjen med $8\,000 \cdot 0,9^x - 150 \cdot (x + 1)$ kroner.

d)

Din venn Ronny mener at du bør si opp forsikringsavtalen etter 13 år.

Ta utgangspunkt i modellen du fant i oppgave c) og kommenter Ronnys utsagn.

Løsningsforslag d)

Dersom sykkelen stjeles etter 13 år, altså mens den er 13 år gammel, vil forskjellen mellom det vi får utbetalt og det vi totalt har betalt for forsikringen være

$$8000 \cdot 0{,}9^{13} - 150 \cdot 14 \approx -66{,}51$$

kroner. Dersom sykkelen stjeles mens den er 12 år gammel, blir denne forskjellen

$$8000 \cdot 0{,}9^{12} - 150 \cdot 13 \approx 309{,}44$$

kroner.

Ronny tenker antakelig at han vil få utbetalt mer enn han totalt sett har betalt i forsikringspremie hvis sykkelen stjeles før den har blitt 13 år gammel. Stjeles den etter at den har blitt 13 år gammel, vil han ha betalt inn minst $66{,}51$ kroner mer i forsikringspremie enn han har fått utbetalt i erstatning. Han ønsker derfor ikke å forsikre sykkelen etter at den har blitt 13 år gammel.

Idet sykkelen blir 13 år gammel må vi avgjøre om vi skal forsikre den for det kommende året. Alle tidligere innbetalinger gjelder en tjeneste vi allerede har fått, nemlig forsikring for alle de foregående årene. Det er kun fremtiden vi bør tenke på når vi vurderer forsikring. Derfor bør vi se på følgende: Sykkelens verdi, erstatningssum, forsikringspremie, sannsynligheten for at sykkelen blir stjålet i løpet av det neste året og egen evne til å erstatte et eventuelt tap av sykkelen.

Her er det lett å beregne erstatningssum. Denf finner vi fra uttrykket i oppgave a), og vil være

$$8000 \cdot 0{,}9^{13} \approx 2033{,}49$$

kroner. Spørsmålet er om vi vil betale 150 kroner for å kunne få $2033{,}49$ kroner utbetalt hvis sykkelen blir stjålet mens den er 13 år gammel. Hvis sykkelen ikke har blitt stjålet de 13 første årene, og kanskje ikke har blitt mer attraktiv i årenes løp, er sannsynligheten for at den blir stjålet antakelig liten. Det er gode argumenter for at de 150 kronene som kunne gått til forsikring heller bør investeres i noe annet.

Svar: Det er gode argumenter for at de 150 kronene som kunne gått til forsikring heller bør investeres i noe annet.

Oppgave 6 (6 poeng) Nettkode: E-4CSI

Funksjonen f gitt ved

$$f(x) = -0{,}0000028x^3 + 0{,}001x^2 - 0{,}025x + 3{,}8 \quad , \quad 0 \leq x \leq 300$$

viser temperaturen $f(x)$ grader celsius i sjøen et sted på Sørlandet x dager etter 31. desember 2013.

a)
Bruk graftegner til å tegne grafen til f.

Løsningsforslag a)

Vi skal bruke kommandoen

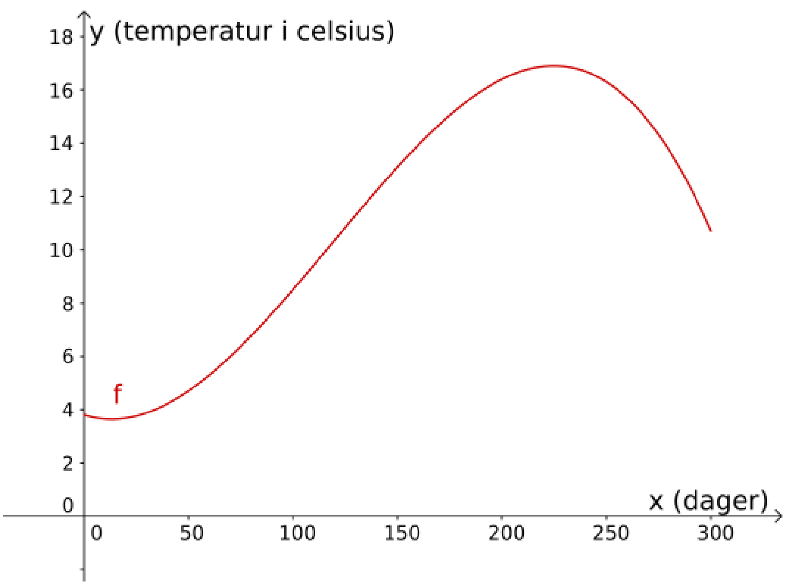
```
Funksjon[ <Funksjon>, <Start>, <Slutt> ]
```

i *GeoGebra*. Vi skal tegne *grafen* til funksjonen $f(x) = -0,0000028x^3 + 0,001x^2 - 0,025x + 3,8$ når $x \in [0, 300]$, så vi skriver det følgende i «Skriv inn»-vinduet:

```
f = Funksjon[-0.0000028*x^3+0.001*x^2-0.025*x+3.8, 0, 300]
```

Her må vi stille inn GeoGebra på 10 desimaler for å kunne se funksjonsuttrykket i algebrafeltet. Videre må vi tilpasse *aksene* slik at vi ser hele grafen, og vi må sette navn på aksene. Resultatet er vist under.

Svar:



b)
Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste temperatur.

Løsningsforslag b)

Toppunktet til *grafen* til f er der temperaturen er høyest, og *bunnpunktet* er der temperaturen er lavest. Vi kan finne topp- og bunnpunkter ved å skrive

```
Ekstremalpunkt[f]
```

i «Skriv inn»-vinduet i GeoGebra-filen fra deloppgave a). Kommandoen «Ekstremalpunkt» ser bare på ekstremalpunkter i det indre av definisjonsmengden. Det kunne tenkes at funksjonen oppnår større eller lavere verdier i endepunktene for intervallet enn de verdiene vi har funnet med kommandoen. Vi ser på grafen at det ikke er slik. Funksjonsverdiene for x nær 0 eller x nær 300 er mellom de verdiene vi fant med kommandoen «Ekstremalpunkt». Hadde høyre endepunkt for definisjonsmengden vært 335 i stedet for 300, ville vi fått lavest temperatur etter 335 dager.

Da ser vi at bunnunktet har koordinater $(13.24, 3.64)$, og at toppunktet har koordinater $(224.86, 16.91)$. Dette betyr at etter rundt 13 dager så var temperaturen $3,64^\circ C$, og etter rundt 225 dager var temperaturen $16,91^\circ C$. Forskjellen mellom den høyeste og den laveste temperaturen er

$$16,91^\circ C - 3,64^\circ C = 13,27^\circ C.$$

Svar: Forskjellen er $13,27^\circ C$.

c)
Bestem $f\,(100)$ og den momentane vekstfarten til f når $x = 100$. Hva forteller disse svarene?

Løsningsforslag c)

For å finne $f(100)$, skriver vi ganske enkelt

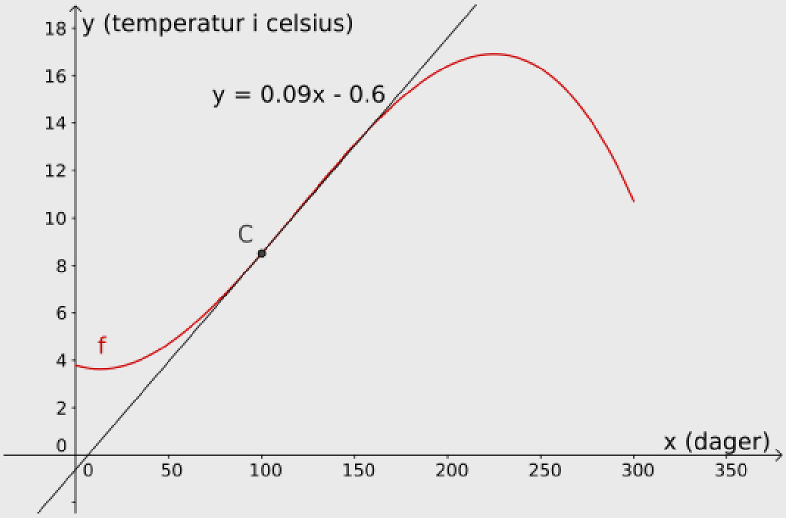
```
f(100)
```

i «Skriv inn»-vinduet i GeoGebra. Da får vi $8,5$. Det betyr at temperaturen i sjøen var $8,5^\circ C$ da det hadde gått 100 dager.

Så skal vi finne den *momentane vekstfarten* til f når $x = 100$. Det kan vi gjøre ved å finne *stigningstallet* til *tangenten* til f der $x = 100$. Det første vi gjør er å lage et punkt på grafen til f der $x = 100$. Det gjør vi ved å skrive følgende:

```
(100,f(100))
```

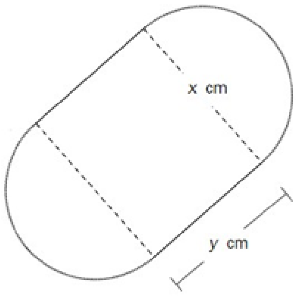
Videre trykker vi på «Tangenter» i menyen med linjer. Deretter velger vi punktet vårt, og grafen f. Tangenten er vist under.



Her ser vi at tangentlinjen har likning $y = 0,09x - 0,6$. Det betyr at den momentane stigningen til f i $x = 100$ er $0,09$. Dette forteller oss at etter 100 dager, så vil temperaturen øke med cirka $0,09^{\circ}C$ per dag.

Svar: $f(100) = 8,5$, så temperaturen i sjøen var $8,5^{\circ}C$ da det hadde gått 100 dager. Den momentane vekstfarten til f der $x = 100$ var $0,09$, så etter 100 dager, økte temperaturen med cirka $0,09^{\circ}C$ per dag.

Oppgave 7 (6 poeng) Nettkode: E-4CSN



Tenk deg at du skal lage en boks. Bunnen og toppen av boksen skal være satt sammen av et rektangel og to halvsirkler og ha form som vist på figuren ovenfor. Sideflaten skal stå vinkelrett på topp og bunn. Sett bredden i rektanglet lik x cm, lengden lik y cm og høyden lik h cm.

a)

Forklar at volumet V av boksen er gitt ved

$$V = \left(\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + x \cdot y\right) \cdot h$$

Løsningsforslag a)

Volumet V til boksen er gitt ved

$$V = Gh,$$

der G er arealet til grunnflaten av boksen og h er høyden. (Vi dropper enheten cm for enkelhets skyld.) Vi har ikke tallverdier for h, x og y, men vi kan late som om vi har det, og regne med dem som vanlige tall likevel. Grunnflaten består av et *rektangel* med sideflater x og y, og i tillegg to halvsirkler med diameter x, og dermed radius $r = \frac{1}{2}x$. *Arealet* av rektangelet er xy, mens arealet av hver av halvsirklene er

$$\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2.$$

Arealet til begge halvsirklene til sammen er derfor $2 \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2$, og arealet til hele grunnflaten er

$$G = \pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + xy.$$

Dette kan vi sette inn i likningen

$$V = Gh,$$

og vi får at

$$V = \left(\pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + xy\right)h,$$

akkurat som vi ville ha.

Svar: $\pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + xy$ er arealet til grunnflaten, og multipliserer vi med høyden h får vi volumet.

b)

Summen av lengden og bredden i rektanglet skal være 10 cm, og summen av bredden og høyden skal være 5 cm.

Forklar at $y = 10 - x$ og $h = 5 - x$, og bruk dette til å sette opp et uttrykk for volumet av boksen uttrykt med x.

Løsningsforslag b)

Vi har at $x + y = 10$ og $x + h = 5$. I den første likningen kan vi trekke fra x på begge sider, og forkorte. Da får vi

$$\begin{aligned} x + y - x &= 10 - x, \\ y &= 10 - x. \end{aligned}$$

På samme måte trekker vi fra x på hver side av likningen $x + h = 5$, og vi får $x = 5 - h$, som var det vi ville ha.

Nå skal vi bruke det vi har funnet til å sette opp et uttrykk for volumet V bare uttrykt ved x. Det gjør vi ved å sette inn $y = 10 - x$ og $h = 5 - x$ i likningen for *volumet* fra deloppgave a). Da får vi

$$V = \left(\pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + x\,(10 - x)\right)(5 - x)$$

Dette er volumet uttrykt kun ved x. Vi kunne multiplisert ut parentesene, men det blir ikke spurt etter i oppgaven.

Svar: $V = \left(\pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + x\,(10 - x)\right)(5 - x)$**.**

c)
Bruk graftegner til å bestemme hvor bred boksen må være for at volumet skal bli størst mulig. Hvor stort blir volumet da?

Løsningsforslag c)

I forrige oppgave fant vi ut at hvis bredden til boksen er x, så er *volumet* $V(x)$ til boksen lik

$$V(x) = \left(\pi\left(\tfrac{1}{2}x\right)^2 + x(10-x)\right)(5-x)$$

(Det å skrive $V(x)$ i stedet får V, betyr bare at størrelsen V avhenger av x. Det betyr ingenting annet. Men nå kan vi tenke på V som en funksjon: Hvis bredden til boksen er x, så setter vi inn x i funksjonsuttrykket vårt, og volumet til boksen blir $V(x)$.)

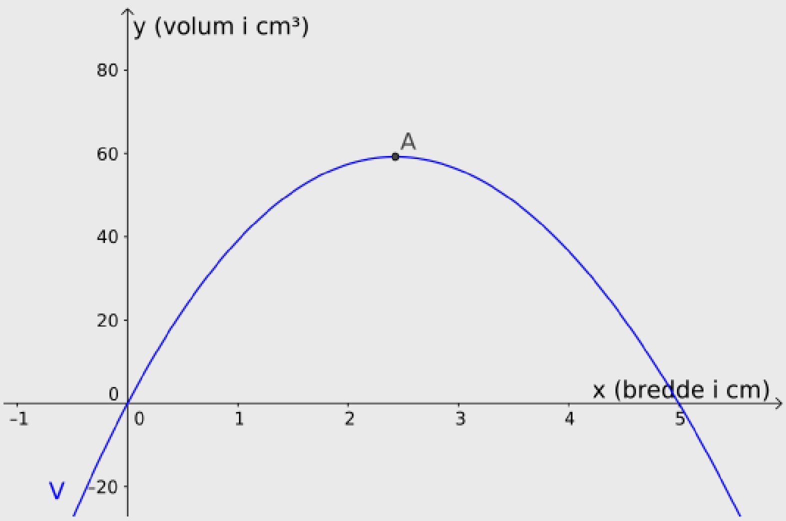
Vi kan tegne grafen til V med *GeoGebra*. Vi skriver

```
V(x) = (pi*(0.5*x)^2 + x*(10-x))*(5-x)
```

i «Skriv inn»-vinduet, og tilpasser aksene slik at vi ser hele grafen. For å finne toppunktet til grafen, skriver vi ganske enkelt kommandoen

```
Ekstremalpunkt[V]
```

Da ser vi at *toppunktet* har koordinater $(2.43, 59.19)$, som betyr at boksen har størst volum, på $59,19\ \text{cm}^3$, når bredden til boksen i centimeter er $x = 2,43$.



Hvis vi går lenger ut i grafen til V, ser vi at funksjonen får veldig store verdier; mye større enn $59,19$. Disse verdiene er ikke interessante. Det er fordi hvis $x > 5$, så er $h = 5 - x < 0$, og det har ingen fysisk tolkning at boksen har negativ høyde.

Svar: Boksen har størst volum, på $59,19\ \text{cm}^3$, når bredden til boksen i centimeter er $x = 2,43$.