MAT1015 2015 Høst

Eksamenstid:

5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:

Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Del 1 har 10 oppgaver. Del 2 har 7 oppgaver.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Bruk av digitale verktøy som graftegner og regneark skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
- vurderer om svar er rimelige

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.

- Jordkloden (www.openclipart.org, 5.07.2016)
- Varmekilder: http://www.tu.no/kraft/2015/01/14/her-fyrer-man-mest-med-ved-i-norge (25.02.2015)
- Nina: http://www.vg.no/nyheter/innenriks/vaer-og-uvaer/her-blaaste-nina-mest/a/23371898/ (11.01.2015)
- BSU: https://www.sparebank1.no (26.02.2015)
- Andre bilder, tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (1 poeng) Nettkode: E-4CMV

Prisen på en vare er satt ned med 30 %. I dag koster varen 280 kroner.

Hvor mye kostet varen før prisen ble satt ned?

Løsningsforslag

La x betegne prisen på varen i kroner, før den ble satt ned. Da varen ble satt ned med $30\ \%$, må den da ha kostet $x \cdot 70\ \%$ kroner. Vi vet allerede at varen kostet $280\,\mathrm{kr}$ etter den ble nedsatt, så vi har at $x \cdot 70\ \% = 280$, eller

$$x \cdot 0,7 = 280,$$

der vi har brukt at *prosentfaktoren* til $70\ \%$ er $0,7$. Vi vil finne tallet x som passer inn i likningen over, og derfor dividerer vi med det som står foran x – altså $0,7$ – på begge sider, og forkorter.

$$\frac{x \cdot 0{,}7}{0{,}7} = \frac{280}{0{,}7},$$
$$x = \frac{280}{0{,}7}.$$

For å regne ut brøken $\frac{280}{0{,}7}$, husker vi på at $7 \cdot 4 = 28$, så vi får

$$\frac{280}{0,7} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 10}{7 \cdot 10^{-1}} = \frac{4 \cdot 10}{10^{-1}}.$$

Denne brøken kan vi multiplisere med $10 = 10^1$ i telleren og nevneren. Da får vi

$$\frac{4 \cdot 10 \cdot 10^1}{10^{-1} \cdot 10^1} = \frac{400}{10^{-1+1}} = \frac{400}{1} = 400.$$

Dermed har vi funnet ut at $x = 400$, altså at varen opprinnelig kostet $400\,\mathrm{kr}$.

Svar: $\underline{\underline{400\,\mathrm{kr}}}$

Oppgave 2 (1 poeng) Nettkode: E-4CMX

Regn ut og skriv svaret på standardform

$3{,}4 \cdot 10^9 \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-3}$

Løsningsforslag

Et *tall på standardform* kan skrives som $a \cdot 10^n$, der a er et tall mellom 1 og 10 og n er et heltall. For eksempel er 200 på standardform det samme som $2 \cdot 10^2$.

Faktorenes rekkefølge i et produkt har ingenting å si. Derfor kan vi flytte alle tiere på høyre side, som vist under.

$$3,4 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 3,4 \cdot 4 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3}.$$

Dette regnestykket deler vi opp i flere deler. Først regner vi ut det som ikke er 10 opphøyd i noe, altså $3,4 \cdot 4$. Vi regner ut for hånd at dette blir $13,6$. Dermed har vi kommet fram til $13,6 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3}$. Vi vil at tallet foran 10-tallene skal være mellom 1 og 10, og siden $13,6$ er større enn 10 må vi gjøre om på det. Vi ser at $13,6 = 1,36 \cdot 10$, så det nye regnestykket vårt er

$$1,36 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3}.$$

Til slutt slår vi sammen alle leddene med 10 i seg, altså $10 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3}$. Hvis vi multipliserer to potenser med samme grunntall, legges eksponentene sammen – for eksempel er $4^2 \cdot 4^6 = 4^{2+6} = 4^8$. Vi bruker dette, og husker at 10 er det samme som 10^1, og får

$$10^1 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3} = 10^{1+9-3} = 10^7.$$

Nå har vi kommet fram til at tallet på standardform er lik

$$1,36 \cdot 10^7.$$

Svar: $\underline{\underline{1,36 \cdot 10^7}}$

Oppgave 3 (1 poeng) Nettkode: E-4CMZ

Regn ut

$\frac{4^3 \cdot 2^{-6}}{4^0 \cdot 2^{-2}}$

Løsningsforslag

Først regner vi ut *telleren* og *nevneren* hver for seg. Nevneren er $4^0 \cdot 2^{-2}$ – vi husker at tall opphøyd i 0 er lik 1, altså er $4^0 = 1$. Dermed blir nevneren lik $1 \cdot 2^{-2} = 2^{-2}$. Så går vi over til telleren, $4^3 \cdot 2^{-6}$. Vi vil gjerne gjøre om dette produktet til *potenser* med samme *grunntall*. Vi vet at $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$, så vi får at telleren er lik $\left(2^2\right)^3 \cdot 2^{-6}$. Regneregler for potenser sier at $\left(2^2\right)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$, og videre at $\left(2^2\right)^3 \cdot 2^{-6} = 2^6 \cdot 2^{-6} = 2^0 = 1$. Dermed er brøken lik

$$\frac{1}{2^{-2}}.$$

Dette uttrykket er penere enn det vi startet med, men vi kan gjøre det enda penere. Vi multipliserer med 2^2 over og under brøkstreken, og får

$$\frac{1 \cdot 2^2}{2^{-2} \cdot 2^2} = \frac{2^2}{2^0} = \frac{2^2}{1} = 2^2 = 4;$$

dette betyr at hele brøken er lik 4.

Svar: $\underline{\underline{4}}$

Oppgave 4 (2 poeng) Nettkode: E-4CN1

For 10 år siden vant Lea i Lotto. Hun opprettet en konto i banken og satte inn hele gevinsten. Beløpet har stått urørt på kontoen siden. Renten har hele tiden vært 3,2 % per år.

I dag har Lea 500 138 kroner på kontoen.

Sett opp et uttrykk som du kan bruke til å regne ut hvor stor gevinsten til Lea var.

Løsningsforslag

Hvis det står et beløp i banken med $3,2\ \%$ i rente, kan vi finne ut hvor mange penger som står i banken etter 10 år (nemlig grunnbeløpet multiplisert med $1,032^{10}$). Denne oppgaven går ut på å gjøre det motsatte, nemlig å finne det opprinnelige beløpet når vi vet hvor mange penger som er i banken etter 10 år.

La x betegne antall kroner Lea vant i Lotto. Etter ett år i banken, har beløpet vokst til $x \cdot 1,032$, og etter to år har det vokst til $x \cdot 1,032^2$, og så videre. Etter 10 år er beløpet $x \cdot 1,032^{10}$. Men vi vet allerede nøyaktig hva dette beløpet er – for Lea hadde $500\,138\ \mathrm{kr}$ i banken etter 10 år. Nå har vi to uttrykk for det samme tallet, og da må de to være like. Altså har vi

$$x \cdot 1,032^{10} = 500\,138.$$

Vi vil finne tallet for x som passer inn her, så vi vil gjøre om ligningen til å ha x alene på én side. Dette kan vi gjøre ved å dividere med $1,032^{10}$ på begge sider – eller tilsvarende, å multiplisere med $1,032^{-10}$ på begge sider. Vi får $x \cdot 1,032^{10} \cdot 1,032^{-10} = 500\,138 \cdot 1,032^{-10}$, $x = 500\,138 \cdot 1,032^{-10}$. Nå har vi funnet et uttrykk for hvor mange penger Lea vant. (Dette er for øvrig lik cirka $365\,000,01$.)

Svar: Hvis x er antall kroner Lea vant, er $x = 500\,138 \cdot 1,032^{-10}$.

Oppgave 5 (2 poeng) Nettkode: E-4CN4

Omkretsen av jordkloden ved ekvator er ca. 40 000 km. Tenk deg at voksne og barn står hånd i hånd og danner en ring rundt jordkloden. Hver person favner i gjennomsnitt 1,6 m.

Omtrent hvor mange personer må stå hånd i hånd for å nå rundt jordkloden ved ekvator? Skriv svaret på standardform.

Løsningsforslag

Forholdet mellom *omkretsen* av jordkloden og hvor mye hver person favner i *gjennomsnitt* gir oss at vi trenger

$$\frac{40\ 000\ \mathrm{km}}{1,6\ \mathrm{m}}$$

personer for å omringe jordkloden.

Vi husker at $1\ \mathrm{km} = 1\ 000\ \mathrm{m}$. Det betyr at jordklodens omkrets er cirka

$$40\ 000 \cdot 1\ 000\ \mathrm{m} = 40\ 000\ 000\ \mathrm{m}.$$

Vi skriver dette som et *tall på standardform* som $4 \cdot 10^7$. Dermed trenger vi cirka

$$\frac{4 \cdot 10^7\ \mathrm{m}}{1,6\ \mathrm{m}}$$

mennesker, eller uttrykt på en annen måte,

$$\frac{4}{1,6} \cdot 10^7.$$

Vi regner ut at $\frac{4}{1,6} = 2,5$, så tallet over kan skrives som $2,5 \cdot 10^7$, og dette er nå et tall på standardform. Altså trenger vi cirka $2,5 \cdot 10^7$ mennesker.

Svar: Cirka $2,5 \cdot 10^7$ mennesker

Oppgave 6 (3 poeng) Nettkode: E-4CN7

Alder	Bedrift A Frekvens	Bedrift B Frekvens
$[20,40\rangle$	52	35
$[40,60\rangle$	36	45
$[60,70\rangle$	12	20
Sum	100	100

Hver av de to bedriftene A og B har 100 ansatte. Tabellen ovenfor viser aldersfordelingen for de ansatte i bedriftene.

a)
I hvilken bedrift er medianalderen lavest? Grunngi svaret.

Løsningsforslag a)

Vi kan ikke si nøyaktig hva *medianen* er i de to bedriftene, men vi kan finne ut av om de ligger i intervallet $[20,40\rangle$, $[40,60\rangle$ eller $[60,70\rangle$. Hvis medianaldrene i de to bedriftene ligger i forskjellige intervaller, kan vi med sikkerhet si hvilken som er lavest. Hvis ikke må vi anta at aldrene er spredt jevnt utover intervallene.

Vi starter med bedrift **A**. Medianen er altså *gjennomsnittet* av alder nr. 50 og alder nr. 51, hvis vi sorterer alderen i stigende rekkefølge. I denne bedriften er de 52 første aldrene i intervallet $[20,40\rangle$, så medianen er også i dette intervallet. I bedrift **B** er bare de 35 første aldrene i intervallet $[20,40\rangle$, mens de 45 neste aldrene, inkludert alder nr. 50 og 51, ligger i intervallet $[40,60\rangle$. Dermed er medianen også i dette intervallet, og det betyr at medianalderen i bedrift **A** er lavest.

Svar: Medianalderen i bedrift **A** er lavest.

b)
Bestem gjennomsnittsalderen for de ansatte i bedrift B.

Løsningsforslag b)

Vi antar at gjennomsnittsalderen til hver gruppe er midt i intervallet. For å regne *gjennomsnittet* av alle aldrene, legger vi først alle aldrene sammen, og så *dividerer* vi med antall ansatte (altså 100). Det er 35 stykker i aldersgruppen $[20,40\rangle$, og siden vi antar at gjennomsnittsalderen deres er 30 år, så bidrar disse 35 ansatte med $35 \cdot 30$ år. Tilsvarende bidrar ansatte i aldersgruppen $[40,60\rangle$ med $45 \cdot 50$ år, og de ansatte i aldersgruppen $[60,70\rangle$ bidrar med $20 \cdot 65$ år. Gjennomsnittsalderen blir dermed

$\frac{35 \cdot 30 + 45 \cdot 50 + 20 \cdot 65}{100}$ år.

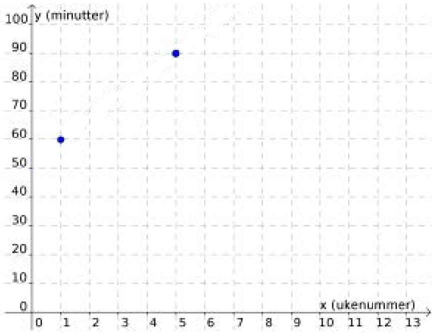
Vi regner ut at $35 \cdot 30 = 1\ 050$, $45 \cdot 50 = 2\ 250$ og $20 \cdot 65 = 1\ 300$, så dette blir

$$\frac{1\ 050 + 2\ 250 + 1\ 300}{100} = \frac{4\ 600}{100} = 46.$$

Dette betyr at gjennomsnittsalderen i bedrift **B** er 46 år.

Svar: Gjennomsnittsalderen i bedrift **B** er 46 år.

Oppgave 7 (3 poeng) Nettkode: E-4CNE



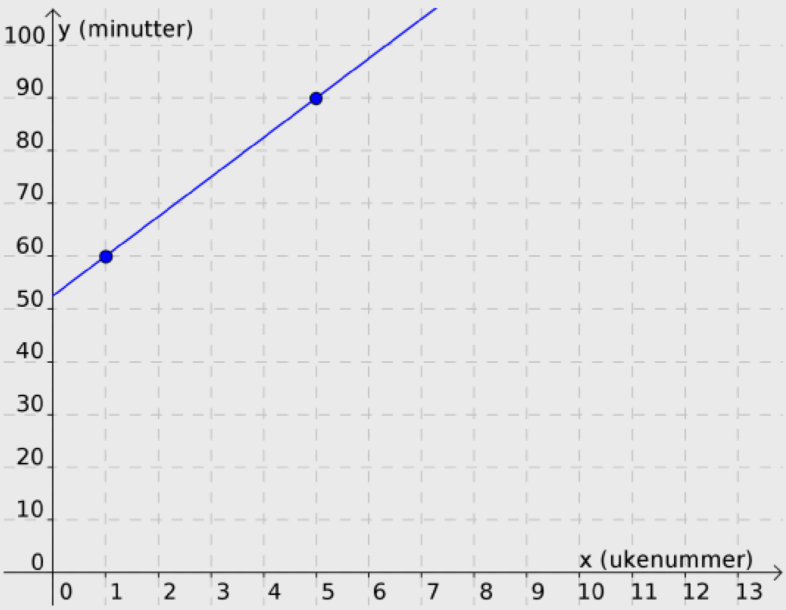
I koordinatsystemet ovenfor har Liv markert hvor mange minutter hun trente i uke 1 og i uke 5. Liv har som mål at antall minutter hun trener, skal øke lineært for hver uke.

a)

Bestem en modell som Liv kan bruke for å regne ut hvor mange minutter hun må trene hver uke framover.

Løsningsforslag a)

Vi vil finne likningen til linjen vist på bildet under.



Altså vil vi finne *konstanter* a og b slik at $y = ax + b$ er likningen til linjen. Vi starter med å finne a, altså *stigningstallet* til linjen. Vi ser på *koordinatsystemet* at linjen går gjennom punktene $(1, 60)$ og $(5, 90)$. Dette vil si at Liv trente i 60 minutter i uke 1 og 90 minutter i uke 5. Da økte treningen med $90 - 60 = 30$ minutter på 4 uker. Økingen per uke blir $\frac{30}{4} = 7,5$ minutter, så stigningstallet til grafen vår er $a = 7,5$. Videre må vi finne konstantleddet, altså der linjen krysser y-aksen. Vi vet at likningen til linjen er på formen $y = 7,5x + b$, og vi vet at når $x = 1$ så er $y = 60$.

Det betyr at

$$7,5 \cdot 1 + b = 60.$$

Vi trekker $7,5$ fra begge sider, og får at

$$b = 60 - 7,5,$$

så $b = 52,5$. Nå har vi funnet ut at Liv må trene $7,5x + 52,5$ minutter i uke x.

Svar: Hvis y er antall minutter Liv må trene i uke x, så er $y = 7,5x + 52,5$.

b)
Hvor mange timer må hun trene i uke 40 ifølge denne modellen?

Løsningsforslag b)

Fra forrige oppgave vet vi at Liv må trene $y = 7,5x + 52,5$ i uke nummer x. Setter vi inn $x = 40$, får vi at hun må trene

$$y = 7,5 \cdot 40 + 52,5$$

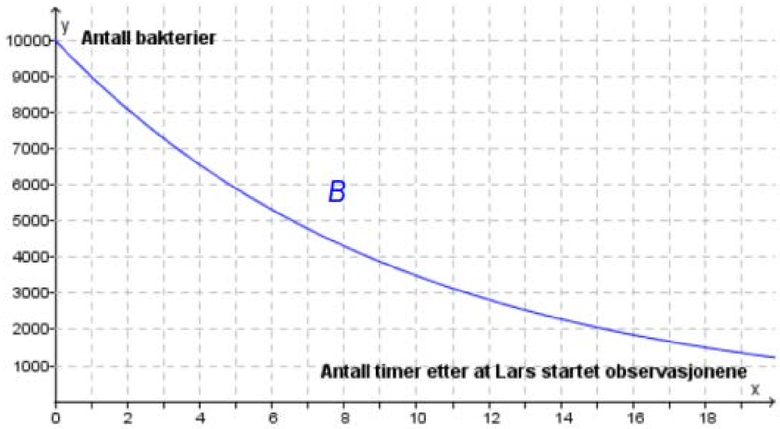
timer i uke 40. Vi ser at $7,5 \cdot 4 = 30$, så hun må trene i

$$300 + 52,5 = 352,5$$

minutter. Det er 5 timer og $52,5$ minutter.

Svar: Hun må trene i $352,5$ minutter, som er det samme som 5 timer og $52,5$ minutter.

Oppgave 8 (2 poeng) Nettkode: E-4CNI



Lars observerer en bakteriekultur. Fra han startet observasjonene, har antall bakterier avtatt eksponentielt. Se grafen til funksjonen B ovenfor.

Bestem vekstfaktoren og sett opp utrykket for $B\left(x\right)$

Løsningsforslag

På grafen ser vi at vi startet med $10\,000$ bakterier, og etter 1 time avtok bakteriekulturen til $9\,000$ bakterier, altså $90\ \%$ av det vi opprinnelig hadde. Derfor er *vekstfaktoren* lik $0,9$. Vi kan også se dette på en annen måte: Det forsvant $1\,000$ av totalt $10\,000$ bakterier på 1 time, som er en reduksjon på $10\ \%$. *Prosentfaktoren* til $10\ \%$ er $0,1$, og når veksten er negativ, har vi

$$\text{vekstfaktor} = 1 - \text{prosentfaktor},$$

altså

$$\text{vekstfaktor} = 1 - 0,1 = 0,9.$$

Nå kan vi finne uttrykket for $B(x)$. Vi vet at det er på formen

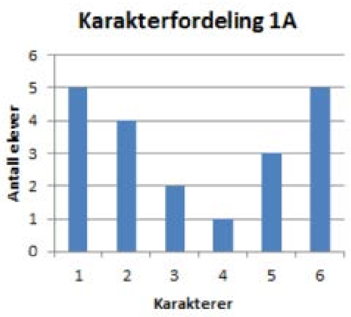
$$B(x) = B(0) \cdot 0,9^x,$$

der $B(0)$ er antall bakterier ved start. Vi startet med $10\,000$ bakterier, så $B(0) = 10\,000$; dermed har vi

$$B(x) = 10\,000 \cdot 0,9^x.$$

Svar: Vekstfaktoren er $0,9$, og uttrykket for $B(X)$ er $B(x) = 10\,000 \cdot 0,9^x$.

Oppgave 9 (5 poeng) Nettkode: E-4CNL



Diagrammene ovenfor viser hvordan karakterene i klasse 1A og 1B fordelte seg ved forrige matematikkprøve.

a)

Bestem gjennomsnittskarakteren i hver av de to klassene.

Løsningsforslag a)

Vi starter med klasse **1A**. Karakterene står vannrett nederst, mens antallet som har fått denne karakteren står loddrett oppover. Stolpen som står over "1" på den vannrette linjen, når opp til "5" på den loddrette linjen, og det betyr at det er 5 elever som har fått karakteren 1. Summen av disse karakterene er $1 \cdot 5 = 5$. Tilsvarende er det 4 elever som har fått karakteren 2, og summen av disse karakterene er $2 \cdot 4 = 8$, og så videre. Summen av alle karakterene blir dermed

$$1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 = 5 + 8 + 6 + 4 + 15 + 30 = 68.$$

Vi må også finne ut hvor mange elever det er. Det gjør vi ved å legge sammen antallet elever som har fått hver karakter, og det blir

$$5 + 4 + 2 + 1 + 3 + 5 = 20.$$

Gjennomsnittskarakteren i klasse **1A** er derfor

$$\text{gjennomsnittskarakter} = \frac{\text{sum av karakterer}}{\text{antall elever}} = \frac{68}{20}$$

Vi ser at $\frac{68}{20} = \frac{6{,}8}{2} = 3,4$, så dette er gjennomsnittskarakteren i **1A**.

Det er helt tilsvarende å regne ut gjennomsnittskarakteren i **1B**. Vi får at gjennomsnittskarakteren blir

$$\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 1}{1 + 3 + 5 + 6 + 4 + 1} = \frac{72}{20} = 3,6.$$

Svar: Gjennomsnittskarakteren i **1A** og **1B** er henholdsvis $3,4$ og $3,6$.

b)

I hvilken klasse er standardavviket for karakterfordelingen størst? Grunngi svaret.

Løsningsforslag b)

Vi kunne ha regnet ut *standardavviket* for begge klassene, men det hadde tatt forholdsvis lang tid, når vi bare er spurt om å avgjøre hvilket standardavvik som er størst. I klasse **1A** er *gjennomsnittet* $3,4$, men det er få som har karakterene 3 og 4 (bare tre stykker). I klasse **1B** er gjennomsnittet $3,6$, og elleve elever (over halvparten) karakterene 3 eller 4. Dataene fra klasse **1A** er mye mer spredt fra gjennomsnittet, og derfor har karakterfordelingen i **1A** størst standardavvik.

Svar: 1A

c)

Bestem den kumulative frekvensen for karakteren 3 i hver av de to klassene.

Løsningsforslag c)

Vi starter med klasse **1A**. Der var det 5 elever som fikk karakteren 1, 4 elever som fikk 2 og 2 elever som fikk karakteren 3. Det er totalt $5+4+2=11$, og dette er den *kumulative frekvensen* for karakteren 3.

I klasse **1B** var det 1, 3 og 5 som fikk henholdsvis karakterene 1, 2 og 3. Den kumulative frekvensen er dermed $1+3+5=9$.

Svar: Den kumulative frekvensen for **1A** og **1B** er henholdsvis 11 og 9.

d)

Bestem den relative frekvensen for karakteren 6 i hver av de to klassene.

Løsningsforslag d)

Relativ frekvens for karakteren 6 er det samme som andelen av klassen som fikk denne karakteren. I klasse **1A** var det 5 elever som fikk karakteren 6, og det totale antallet elever var 20. Det betyr at den relative frekvensen var

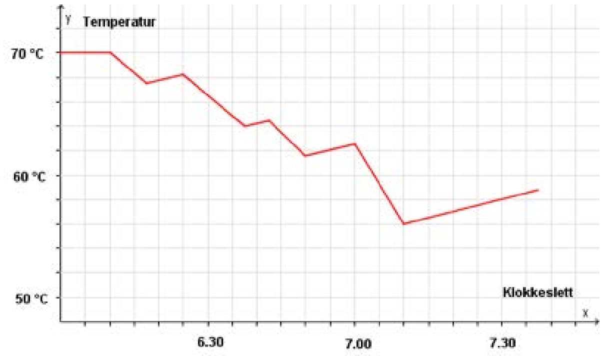
$$\frac{5}{20}=\frac{1}{4}.$$

I klasse **1B** var det like mange elever totalt, men bare 1 elev fikk karakteren 6. Derfor er den relative frekvensen

$$\frac{1}{20}.$$

Svar: Den relative frekvensen for karakteren 6 i henholdsvis klasse **1A** og klasse **1B**, er $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{20}$.

Oppgave 10 (4 poeng) Nettkode: E-4CNS



Hos familien Vassdal er termostaten i varmtvannstanken satt til 70 °C . Når familien bruker varmtvann fra tanken, renner kaldt vann inn, og gjennomsnittstemperaturen på vannet i tanken avtar. Varmeelementet slår seg da automatisk på, og vannet varmes opp igjen.

Grafen ovenfor viser hvordan temperaturen i tanken varierte en morgen. Det varme vannet ble bare brukt til å dusje.

a)

Hvor mange familiemedlemmer dusjet denne morgenen?

Løsningsforslag a)

Når noen dusjer, så blir temperaturen i varmtvannstanken kaldere, og *grafen* avtar. Dette betyr at hver gang noen dusjer, så avtar grafen. Vi ser at grafen avtar totalt 4 ganger, så 4 familiemedlemmer dusjet denne morgenen (hvis vi antar at ingen tok pauser i dusjingen eller dusjet flere ganger).

Svar: 4 stykker

b)

Datteren Vanda var den som brukte lengst tid i dusjen.

Hvor lenge dusjet hun?

Løsningsforslag b)

Vi legger merke til at mellomrommet mellom hvert hakk på x-aksen er 5 minutter.

Klokken $07:00$ begynner grafen å avta, og den slutter å avta kl. $07:10$. Det betyr at den som startet dusjingen klokken $07:00$ dusjet i 10 minutter. På denne måten kan vi se hvor lenge alle dusjingene pågikk. Vanda dusjet mellom $06:25$ og ca. $06:37$, for dette er det største intervallet som grafen avtar på. Hun dusjet i 12 minutter og 30 sekunder.

Svar: I 12 minutter og 30 sekunder

c)
Da familien forlot hjemmet klokka 7.30, var temperaturen i varmtvannstanken 58 °C .

Hvor lang tid tok det før temperaturen var steget til 70 °C igjen?

Løsningsforslag c)

Vi ser på *grafen* at temperaturen i tanken stiger *lineært* (altså som en rett linje). *Stigningstallet* til denne linjen er hvor mye temperaturen i tanken stiger med hvert femte minutt. Vi merker oss også at hvert hakk på *y-aksen* representerer $2^\circ C$, og at hvert hakk på *x-aksen* representerer 5 minutter.

Klokken $07:10$ var temperaturen på $56^\circ\mathrm{C}$, og klokken $07:30$ var temperaturen $58^\circ\mathrm{C}$. Det betyr at temperaturen i tanken økte med $2^\circ\,\mathrm{C}$ på 20 minutter, eller $1^\circ\,\mathrm{C}$ på 10 minutter. Vi vil finne ut hvor lang tid det tar fra kl. $07:30$, da tanken hadde en temperatur på $58^\circ\mathrm{C}$, til den hadde temperatur på $70^\circ\mathrm{C}$. Det er en økning på $70^\circ\mathrm{C} - 58^\circ\mathrm{C} = 12^\circ\mathrm{C}$, og siden det tar 10 minutter å øke temperaturen med $1^\circ\mathrm{C}$, så tar det $12 \cdot 10\,\mathrm{minutter} = 120\,\mathrm{minutter} = 2\,\mathrm{timer}$ å varme opp tanken igjen.

Svar: 120 minutter, eller 2 timer

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng) Nettkode: E-4CNX

	Oslo	Østlandet for øvrig	Sør-Norge	Vestlandet	Mdit-Norge	Nord-Norge
Elektriske ovner	59,7%	36,6%	30,4%	32,4%	34,2%	36,5%
Varmepumpe	8,3%	18,0%	25,5%	33,2%	33,8%	27,7%
Vannbåren varme	7,3%	9,3%	8,1%	6,4%	4,0%	5,0%
Sentralvarme	12,6%	4,8%	3,1%	2,8%	0,4%	7,5%
Vedfyring	5,3%	26,8%	28,3%	19,9%	19,6%	22,0%
Annet eller vet ikke	6,8%	4,5%	4,6%	5,3%	8,0%	1,3%

Tabellen ovenfor gir en oversikt over de viktigste varmekildene for husstander i ulike deler av Norge.

Bruk regneark til å lage ett diagram der du presenterer opplysningene i tabellen på en oversiktlig måte.

Løsningsforslag

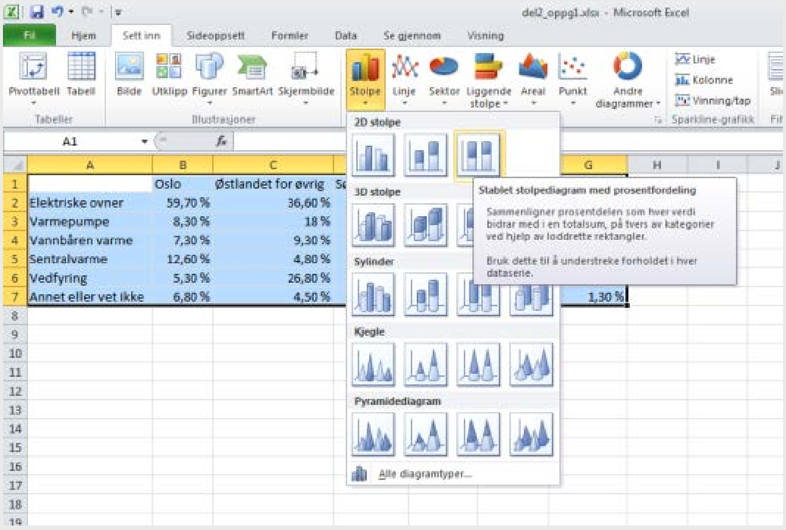
Først skriver vi inn all informasjonen i *regnearket*. Vi har brukt Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Oslo	Østlandet for øvrig	Sør-Norge	Vestlandet	Midt-Norge	Nord-Norge
2	Elektriske ovner	59,70 %	36,60 %	30,40 %	32,40 %	34,20 %	36,50 %
3	Varmepumpe	8,30 %	18 %	25,50 %	33,20 %	33,80 %	27,70 %
4	Vannbåren varme	7,30 %	9,30 %	8,10 %	6,40 %	4 %	5 %
5	Sentralvarme	12,60 %	4,80 %	3,10 %	2,80 %	0,40 %	7,50 %
6	Vedfyring	5,30 %	26,80 %	28,30 %	19,90 %	19,60 %	22 %
7	Annet eller vet ikke	6,80 %	4,50 %	4,60 %	5,30 %	8 %	1,30 %

Vi vil lage et diagram ut av dette, og derfor markerer vi alt vi har skrevet ned og velger “Sett inn”. Der har vi en rekke forskjellige typer diagrammer vi kan velge mellom; vi velger et *stolpediagram*. Når vi skal velge hvilken type stolpediagram vi skal bruke, må vi tenke på hva tabellen representerer. La oss for eksempel se på Oslo-kolonnen. Der står det at $59,7\ \%$ bruker elektriske ovner, $8,3\ \%$ bruker varmepumpe og så videre. Alle som svarer på undersøkelsen havner innenfor nøyaktig én kategori. Det betyr at Oslo-raden er en fordeling av hva de forskjellige Oslo-beboerne bruker som varmekilde. Dette kan vi også se ved at prosentene summeres opp til $100\ \%$:

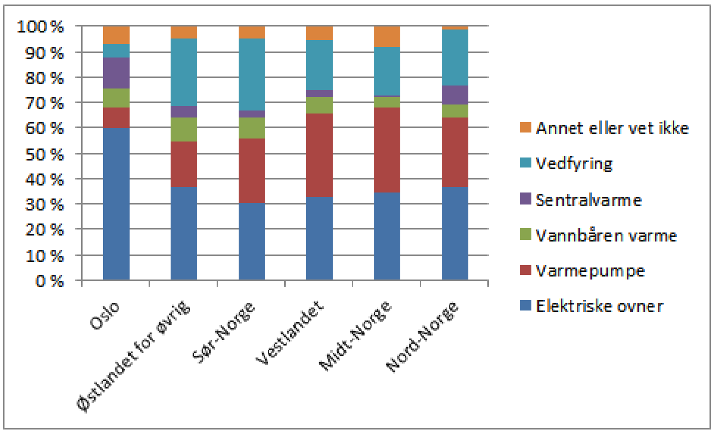
$$59,7\ \% + 8,3\ \% + 7,3\ \% + 12,6\ \% + 5,3\ \% + 6,8\ \% = 100\ \%.$$

Dermed er det lurt av oss å bruke det *stolpediagrammet* som viser prosentfordelinger.



Resultatet er vist under. Vi kunne også ha brukt en annen type diagram.

Svar:



Oppgave 2 (7 poeng) Nettkode: E-4CNZ

Funksjonene G og J gitt ved

$$G(x) = 0{,}0030x^3 - 0{,}088x^2 + 1{,}17x + 3{,}7 \quad , \quad 0 \leq x \leq 12$$

$$J(x) = 0{,}0017x^3 - 0{,}057x^2 + 0{,}93x + 3{,}7 \quad , \quad 0 \leq x \leq 12$$

viser hvordan vekten til to babyer, Geir og Janne, utviklet seg det første leveåret.

Geir veide $G(x)$ kilogram, og Janne veide $J(x)$ kilogram x måneder etter fødselen.

a)
Bruk graftegner til å tegne grafen til G og grafen til J i samme koordinatsystem.

Løsningsforslag a)

Vi skal tegne to *funksjoner* på et visst intervall, så vi bruker funksjonen

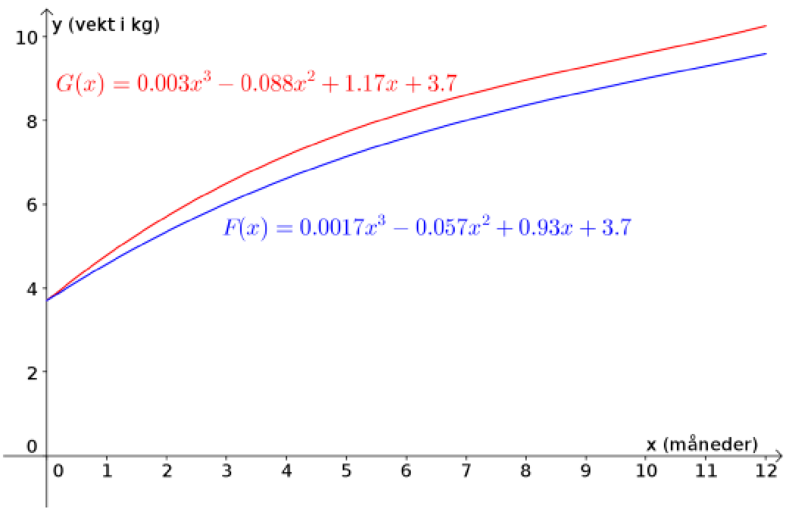
```
Funksjon[ <Funksjon>, <Start>, <Slutt> ]
```

på begge to. Vi skriver det følgende i «Skriv inn»-feltet:

```
G = Funksjon[0.003*x^3 - 0.088*x^2 + 1.17*x + 3.7, 0, 12]
F = Funksjon[0.0017*x^3 - 0.057*x^2 + 0.93*x + 3.7, 0, 12]
```

Deretter drar vi *aksene* slik at vi ser funksjonene på hele intervallet fra 0 til 12. Vi må huske å sette navn på aksene – *x-aksen* representerer måneder i det første leveåret, mens *y-aksen* representerer vekten til babyene i kilogram.

Svar:



b)
Hvor mange kilogram la hver av de to babyene på seg i løpet av det første leveåret?

Løsningsforslag b)

For å finne ut hva babyene la på seg i vekt, må vi finne ut hva de veide da de var født og i slutten av det første leveåret. Begge to startet på $3,7\,\text{kg}$, fordi det er *konstantleddet* i begge funksjonene som viser vekten deres. Videre vil vi finne ut hvor mye de veide etter 12 måneder, altså vil vi finne ut hva funksjonsverdiene til $G(x)$ og $J(x)$ er når $x = 12$. Det gjør vi ganske enkelt ved å skrive

```
G(12)
```

i «Skriv inn»-feltet, og tilsvarende med J. Da får vi henholdsvis cirka $10,25$ og $9,59$, så Geir og Janne veide henholdsvis $10,25\,\text{kg}$ og $9,59\,\text{kg}$ ved slutten av deres første leveår. Begge startet på $3,7\,\text{kg}$, så Geir har lagt på seg

$$10,25\,\text{kg} - 3,7\,\text{kg} = 6,55\,\text{kg},$$

og Janne la på seg

$$9,59\,\text{kg} - 3,7\,\text{kg} = 5,89\,\text{kg}.$$

Svar: Geir og Janne la på seg henholdsvis cirka $6,55\,\text{kg}$ og $5,89\,\text{kg}$.

c)

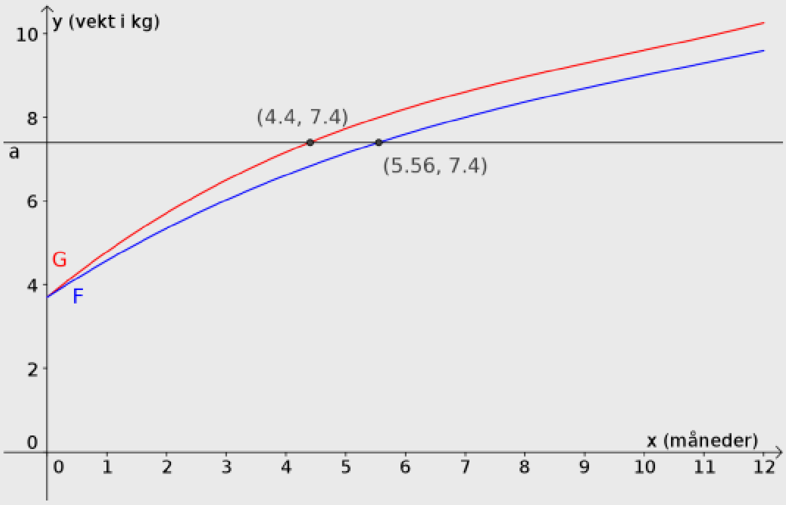
Hvor mange måneder gikk det før hver av de to babyene hadde doblet fødselsvekten sin?

Løsningsforslag c)

Vi kan løse likningene $G(x) = 7,4$ og $J(x) = 7,4$ grafisk ved å finne skjæringspunktene mellom G og F med linjen $y = 7,4$. Vi skriver det følgende i «Skriv inn»-feltet.

```
y = 7.4
```

Nå kan vi finne løsningene ved å finne *skjæringspunkt*, altså bruke skjæringsverktøyet på linjen og de to grafene, som vist under.



Koordinatene til skjæringspunktet mellom G og linjen, er $(4.4, 7.4)$, mens skjæringspunktet mellom F og linjen er cirka $(5.56, 7.4)$. Det betyr at etter 4, måneder, så veide Geir $7,4\,\mathrm{kg}$, altså det dobbelte av det han var født med. Janne brukte $5,56$ måneder på å doble sin vekt.

Svar: Geir og Janne brukte henholdsvis $4,4$ måneder og cirka $5,56$ måneder på å doble vekten sin.

d)

Bestem $\frac{G(12)-G(0)}{12}$ og $\frac{G(2)-G(0)}{2}$

Hva forteller disse svarene om vekten til Geir?

Løsningsforslag d)

Vi regner ut brøkene ganske lett ved å skrive det følgene i «Skriv inn»-feltet i *GeoGebra*.

```
(G(12)-G(0))/12
(G(2)-G(0))/2
```

Vi får at dette blir henholdsvis cirka $0,55$ og cirka $1,01$.

Så skal vi tolke dette. Tallet $G(12)$ er hvor mange kilogram Geir veide etter 12 måneder, og $G(0)$ er hvor mye han veide da han ble født. Derfor er $G(12) - G(0)$ hvor mye han økte i vekt i løpet av disse 12 månedene. Dette regnet vi ut i b). Så dividerer vi tallet med 12. Det betyr at vi ser på gjennomsnittlig vektøkning per måned de 12 første månedene, og den er på cirka $0,55\,\mathrm{kg}$. Det betyr at Geir la på seg i *gjennomsnitt* cirka $0,55\,\mathrm{kg}$ per måned i sitt første leveår. På samme måte er $\frac{G(2)-G(0)}{2}$ gjennomsnittlig vektøkning i de to første månedene, og det var på cirka $1,01\,\mathrm{kg}$. Dette betyr at Geir vokste gjennomsnittlig fortere i starten av leveåret enn i hele året; det samsvarer med at grafen til G øker mest i begynnelsen.

Svar: $\frac{G(12)-G(0)}{12} \approx 0,55$ og $\frac{G(2)-G(0)}{2} \approx 1,01$. Det betyr at Geir vokste i gjennomsnitt $0,55\ \mathrm{kg}$ per måned de første 12 månedene, og $1,01\ \mathrm{kg}$ per måned de første 2 månedene.

Oppgave 3 (6 poeng) Nettkode: E-4CO9

Tabellen nedenfor viser hvor mange nye elbiler som ble solgt i Hordaland i 2010 og 2014.

År	2010	2014
Antall nye elbiler	26	2962

a)

La x være antall år etter 2010. Bruk opplysningene i tabellen til å bestemme en eksponentiell modell $f(x)$ for elbilsalget i Hordaland.

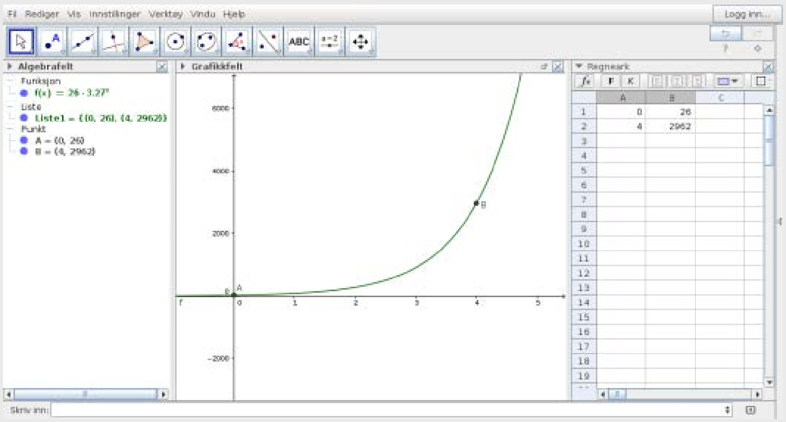
Løsningsforslag a)

Vi vil ha en funksjon f slik at $f(x)$ er antall elbiler solgt i året x år etter 2010. For eksempel skal $f(3)$ være antall solgte elbiler i 2013.

Først viser vi hvordan vi lager modellen med *GeoGebra*. Det første vi gjør er å trykke på *Regneark* i «Vis»-menyen. I regnearket skriver vi de to punktene vi vet noe om, nemlig $(0, 26)$ og $(4, 2962)$. Deretter markerer vi disse punktene, høyreklikker og velger "Liste" under "Lag"-menyen. Listen blir hetende «Liste1». Vi drar til *aksene* slik at vi ser begge punktene vi har laget. Vi vil ha en *eksponentialfunksjon* som går gjennom disse to punktene; derfor skriver vi

```
regeksp[Liste1]
```

i «Skriv inn»-feltet. Resultatet er en funksjon $f(x) = 26 \cdot 3,27^x$, som går gjennom de to punktene vi har. Dette er *regresjonsmodellen* vår.



ALTERNATIV LØSNING

Svar: Hvis $f(x)$ er antall solgte biler i året x år etter 2010, så er $f(x) \approx 26 \cdot 3,27^x$.

b)

Hvor mange prosent steg elbilsalget per år i perioden fra 2010 til 2014 ifølge modellen fra oppgave a)?

Løsningsforslag b)

Vi har fra deloppgave a) at $f(x) \approx 26 \cdot 3,27^x$ er antall solgte bilder i året x år etter 2010. *Vekstfaktoren* i denne modellen er den prosentvise økningen av bilsalget hvert år. Vekstfaktoren er $3,27$; dette betyr at hvert år, så selges det $327\ \%$ biler av det man gjorde året før. Dette betyr *ikke* at bilsalget øker med $327\ \%$ hvert år; for å regne hvor mye bilsalget *øker* med, må vi trekke fra bilsalget året før. Dermed øker bilsalget med $327\ \% - 100\ \% = 227\ \%$ hvert år.

Svar: Cirka $227\ \%$ hvert år

c)

Diagrammet ovenfor viser utviklingen i salget av nye elbiler i Hordaland i perioden 2010–2014.

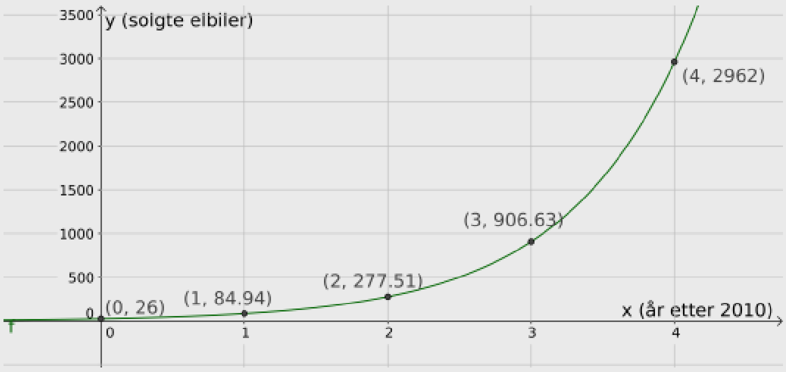
Gjør beregninger og vurder om modellen fra oppgave a) er en god modell for å beskrive denne utviklingen.

Løsningsforslag c)

Nedenfor har vi markert salgsverdiene i de forskjellige årene i *grafen* vi tegnet i deloppgave a). Dette har vi gjort ved å skrive

```
(1, f(1))
```

og så videre i «Skriv inn»-feltet.



Se tolkningen av dette nedenfor.

Svar: Vi ser at modellen vår viser ganske lave salgstall for 2011, 2012 og 2013, men modellen beskriver selve utviklingen helt greit: Salget øker lite i begynnelsen, men mer og mer etter hvert som tiden går. En eksponentiell modell er nok fornuftig i perioden mellom 2010 og 2014, men akkurat den modellen vi har valgt er ikke den beste; vi skulle helst ha gjort en regresjon med mer data. Etter 2014 er nok ikke modellen så god, da den forutser at det blir solgt rundt $3\,600\,000$ elbiler i 2020.

Oppgave 4 (4 poeng) Nettkode: E-4COE

Figuren ovenfor viser sterkeste middelvind ulike steder i Sør-Norge under ekstremværet

«Nina» i januar 2015.

Vi lar den røde streken være skillet mellom Vestlandet og Sør-Østlandet.

a)
Bruk regneark til å bestemme gjennomsnitt og standardavvik for sterkeste middelvind på Vestlandet og sterkeste middelvind på Sør-Østlandet.

Løsningsforslag a)

Vi bruker Excel. Først setter vi opp tallene i en tabell. Vi må huske å skille på Vestlandet og Sør-Østlandet.

	A	B	C
1		Vestlandet	Sør-Østlandet
2		22,4	22,6
3		25,3	23,4
4		26,1	26,2
5		27,8	25,1
6		33,7	24,2
7		28,5	20,4
8		30,2	23,8
9		33,8	27
10		29,8	21,6
11		31,9	29,9
12		33,7	
13		27,7	
14		29,7	
15		37,6	

Her har vi gjort plass i **A**-søylen for å legge til *gjennomsnitt* og *standardavvik* senere.

Vi skal regne ut gjennomsnittet av hver av kolonnene i tabellen vår. Dette kan vi gjøre «manuelt» ved å legge sammen alle tallene og dividere på antallet, eller vi kan bruke gjennomsnitts-kommandoen i *regnearket*. Hvis vi vil regne ut gjennomsnittet manuelt, for eksempel for Vestlandet, skriver vi

```
=SUMMER(B2:B15)/14
```

i en passende rute. Her summerer vi opp alle tallene i **B**-kolonnen fra og med rad 2 til og med rad 15, og dividerer på antall rader vi har valgt. For Sør-Østlandet skulle vi ha skrevet

```
=SUMMER(C2:C11)/10
```

Alternativt kunne vi skrevet

```
=GJENNOMSNITT(B2:B15)
```

for Vestlandet og

```
=GJENNOMSNITT(C2:C11)
```

for Sør-Østlandet. Videre skal vi finne standardavviket. Dette kan vi også gjøre manuelt, men det er såpass mer innviklet at vi velger å bruke innebygde funksjoner. For Vestlandet skriver vi

```
=STDAV.P(B2:B15)
```

Vi bruker **STDAV.P** fordi vi vil regne ut standardavviket for hele datasettet. Hvis vi hadde brukt **STDAV**, ville vi fått estimerte verdier basert på utvalg. Sør-Østlandet er tilsvarende. Resultatet er vist under.

Svar:

	A	B	C
1		Vestlandet	Sør-Østlandet
2		22,4	22,6
3		25,3	23,4
4		26,1	26,2
5		27,8	25,1
6		33,7	24,2
7		28,5	20,4
8		30,2	23,8
9		33,8	27
10		29,8	21,6
11		31,9	29,9
12		33,7	
13		27,7	
14		29,7	
15		37,6	
16			
17	Gjennomsnitt	29,87142857	24,42
18	Standardavvik	3,87822282	2,630893384

b)

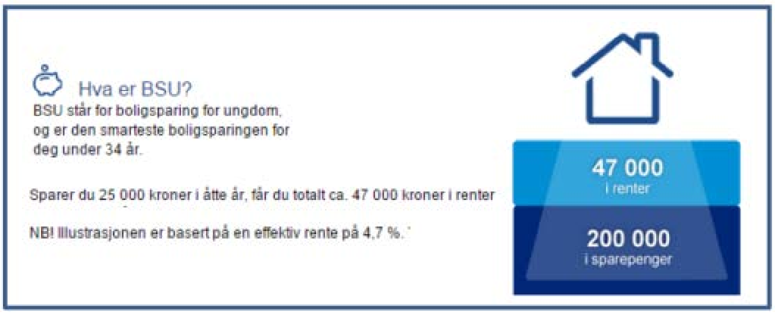
Hva forteller svarene i oppgave a) om sterkeste middelvind på Vestlandet sammenliknet med sterkeste middelvind på Sør-Østlandet?

Løsningsforslag b)

I deloppgave a) fant vi at *gjennomsnittet* av sterkeste middelvind var cirka $30\ \mathrm{m/s}$ og $24\ \mathrm{m/s}$ for henholdsvis Vestlandet og Sør-Østlandet. *Standardavviket* for områdene var henholdsvis cirka $3,9\ \mathrm{m/s}$ og $2,6\ \mathrm{m/s}$. Dette sier oss at vinden jevnt over var sterkere på Vestlandet, sannsynligvis fordi kysten er mindre skjermet for vind. Til gjengjeld var også vindstyrken mer variert der.

Svar: Vindstyrken var generelt sterkere og mer variert på Vestlandet.

Oppgave 5 (4 poeng) Nettkode: E-4COJ



Tenk deg at du oppretter en BSU-konto 1. januar neste år og setter inn 25 000 kroner. Du setter inn 25 000 kroner 1. januar de neste sju årene også. Renten er 4,7 % per år.

a)

Lag et regneark som gir en oversikt over hvor mye du vil ha på kontoen ved slutten av hvert år disse åtte årene.

Løsningsforslag a)

Det aller første vi gjør er å finne et måte å sette opp informasjonen vi har, slik at vi kan regne ut *renter* og totalbeløp ved slutten av hvert år. Vi setter det opp som vist nedenfor, men det kan gjøre på mange måter.

	A	B	C	D	E
1	Rente	4,70 %			
2					
3	**År**	**Innskudd**	**Beløp ved starten av året**	**Renter**	**Beløp ved slutten av året**
4	1	25000			
5	2	25000			
6	3	25000			
7	4	25000			
8	5	25000			
9	6	25000			
10	7	25000			
11	8	25000			

Det første året er representert i rad 4. Her setter vi inn $25\,000$ kroner. Beløpet ved starten av det første året er dermed også $25\,000\text{ kr}$, så vi skriver

```
=B4
```

i rute **C4**. Renten er på $4,7\ \%$, så for å finne renten det første året kan vi skrive

```
=C4*B1
```

Her legger vi merke til at **B1** er renten på $4,7\ \%$. Vi skriver kommandoen over i ruten **D4**. Beløpet i slutten av året er summen av rentene og beløpet i starten av året, så vi skriver

```
=C4 + D4
```

i rute **E4**. Det blir stående $1\,175$ som renter og $26\,175$ som beløp ved slutten av året.

Nå begynner vi på rad 5. Fra det første året hadde vi $26\,175\,\mathrm{kr}$ på kontoen, og vi setter inn $25\,000\,\mathrm{kr}$ igjen. Det betyr at vi har $51\,175\,\mathrm{kr}$ i starten av året (dette tallet er lik $\mathrm{E4} + \mathrm{B5}$). Derfor skriver vi

```
=E4 + B5
```

i rute **C5**. Rentene dette året skal regnes ut i fra det beløpet vi hadde i begynnelsen av året, så rentene blir $\mathrm{C5} * \mathrm{B1}$, helt tilsvarende som før. Totalbeløpet er summen av startbeløpet og rentene.

I de neste radene gjør vi det samme som vi gjørde i rad 5. I rute **CN** skal det stå

```
=E(N-1) + BN
```

I rute **DN** skal det stå

```
=CN*B1
```

og i rute **EN** skal det stå

```
=CN + DN
```

(Her er **N** nummeret på raden vi er i.) Sluttresultatet er vist under.

Svar:

	A	B	C	D	E
1	Rente	4,70 %			
2					
3	**År**	**Innskudd**	**Beløp ved starten av året**	**Renter**	**Beløp ved slutten av året**
4	1	25000	25000	1175	26175
5	2	25000	51175	2405,225	53580,225
6	3	25000	78580,225	3693,27058	82273,49558
7	4	25000	107273,4956	5041,85429	112315,3499
8	5	25000	137315,3499	6453,82144	143769,1713
9	6	25000	168769,1713	7932,15105	176701,3224
10	7	25000	201701,3224	9479,96215	211181,2845
11	8	25000	236181,2845	11100,5204	247281,8049

b)
Hvor mye vil du få til sammen i renter i løpet av disse åtte årene?

Løsningsforslag b)

Vi utformet *regnearket* slik at vi så hvor mye *renter* vi fikk i alle årene. Hvis vi legger disse sammen, får vi den totale renteinntekten. Det gjør vi ved å skrive

```
=SUMMER(D4:D11)
```

i en passende rute i regnearket vårt.

	A	B	C	D	E
1	Rente	4,70 %			
2					
3	**År**	**Innskudd**	**Beløp ved starten av året**	**Renter**	**Beløp ved slutten av året**
4	1	25000	25000	1175	26175
5	2	25000	51175	2405,225	53580,225
6	3	25000	78580,225	3693,27058	82273,49558
7	4	25000	107273,4956	5041,85429	112315,3499
8	5	25000	137315,3499	6453,82144	143769,1713
9	6	25000	168769,1713	7932,15105	176701,3224
10	7	25000	201701,3224	9479,96215	211181,2845
11	8	25000	236181,2845	11100,5204	247281,8049
12					
13	Sum			47281,8049	

Her ser vi at vi fikk cirka $47\,281,80\text{ kr}$ i renter.

Hvis vi ikke hadde satt opp renteinntektene hvert år, kunne vi gjort følgende. Vi vet at vi sitter igjen med rundt $247\,281,80\text{ kr}$ i slutten av år 8. Vi hadde derimot kun satt inn $8 \cdot 25\,000\text{ kr} = 200\,000\text{ kr}$ i banken, og da må vi ha fått $247\,281,80\text{ kr} - 200\,000\text{ kr} = 47\,281,80\text{ kr}$ i renter.

Svar: Cirka $47\,281,8\text{ kr}$

Oppgave 6 (6 poeng) Nettkode: E-4COO

Tenk deg at du har lånt penger i banken og vil betale tilbake lånet med termin én gang i året.

Sett

- lånesummen lik L kroner

- renten lik p prosent per år, slik at vekstfaktoren blir $v = 1 + \frac{p}{100}$

Dersom du betaler tilbake lånet i løpet av x terminer, er terminbeløpet $T(x)$ kroner gitt ved

$T(x) = \frac{L \cdot (v-1) \cdot v^x}{v^x - 1}$

Du tar opp et lån på 1 000 000 kroner med rente 3,5 % per år.

a)

Vis at terminbeløpet er gitt ved

$T(x) = \frac{35\ 000 \cdot 1{,}035^x}{1{,}035^x - 1}$

Løsningsforslag a)

Vi må sette inn tall for verdiene L og v i formelen

$$T\left(x\right) = \frac{L \cdot (v-1) \cdot v^x}{v^x - 1} \tag{1}$$

Tallet L er lånebeløpet i kroner, så $L = 1\ 000\ 000$. Videre er renten på $3,5\ \%$, så vekstfarten v er dermed

$$v = 1 + \frac{3,5}{100} = 1,035.$$

Vi setter inn dette i formelen (1). Da får vi

$$T\left(x\right) = \frac{1\ 000\ 000 \cdot (1,035 - 1) \cdot 1,035^x}{1,035^x - 1}.$$

Dette er nesten det vi ville ha. Vi regner ut at

$$1\ 000\ 000 \cdot (1,035 - 1) = 1\ 000\ 000 \cdot 0,035 = 35\ 000,$$

og da får vi

$$T\left(x\right) = \frac{35\ 000 \cdot 1,035^x}{1,035^x - 1},$$

akkurat som vi skulle ha.

Svar: Sett inn $v = 1,035$ og $L = 1\ 000\ 000$ i den oppgitte formelen.

b)

Bruk graftegner til å tegne grafen til T for $x \geq 1$

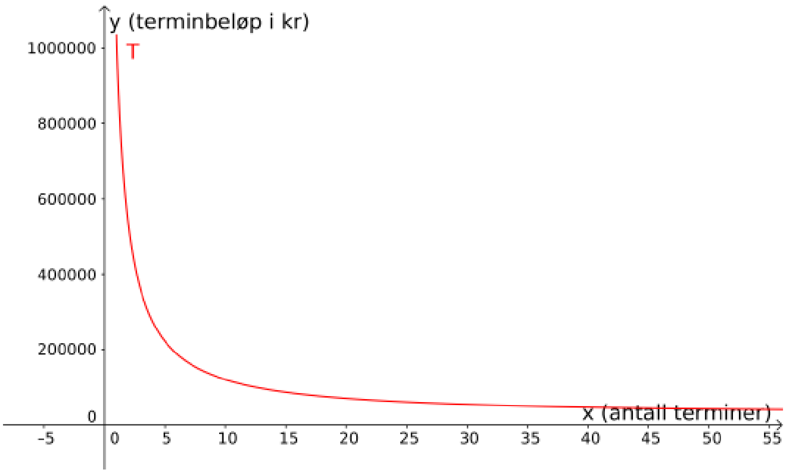
Løsningsforslag b)

Vi skal tegne *grafen* til *funksjonen* når $x \geq 1$. Vi setter en øvre grense på $x = 70$, altså 70 år. Vi skriver det følgende i "Skriv inn"-feltet:

```
T = Funksjon[35000*1.035^x/(1.035^x-1), 1, 70]
```

Vi må også huske å sette passende navn på *aksene*. Resultatet er vist under.

Svar:



c)

Bestem terminbeløpet dersom du vil betale tilbake lånet i løpet av 20 terminer.

Løsningsforslag c)

Vi må regne ut $T(20)$. Det kan vi ganske enkelt gjøre ved å skrive

```
T(20)
```

i «Skriv inn»-feltet i *GeoGebra*-filen fra deloppgave a). Dette blir cirka $70\,361,08$, så terminbeløpet er på $70\,361,08\ \mathrm{kr}$.

Vi kunne også regnet ut dette på kalkulator ved å regne ut

$$T\left(20\right) = \frac{35\,000 \cdot 1,035^{20}}{1,035^{20} - 1}.$$

Dette blir det samme som over.

Svar: Terminbeløpet er på $70\,361,08\ \mathrm{kr}$.

d)

Hvor lang tid vil det ta å betale tilbake lånet dersom du betaler 50 000 kroner hver termin?

Løsningsforslag d)

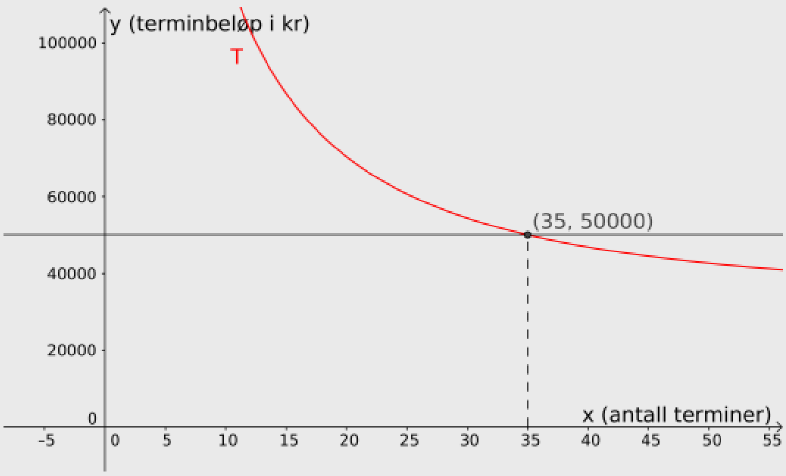
Vi må finne en x slik at

$$50\,000 = \frac{35\,000 \cdot 1,035^x}{1,035^x - 1}.$$

Dette kan vi gjøre *grafisk* i *GeoGebra*, ved å se hvor grafen til T krysser linjen $y = 50\,000$. Vi tegner denne linjen ved å skrive

```
y = 50000
```

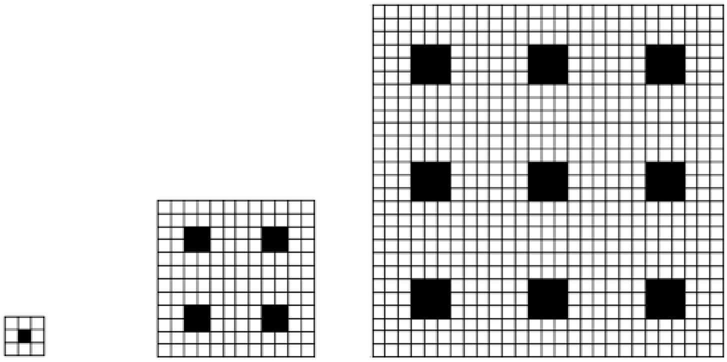
i «Skriv inn»-feltet i GeoGebra-filen fra deloppgave b). Den krysser grafen til T i ett punkt; vi drar til aksene slik at vi ser krysningspunktet bedre. Vi klikker på punktet for å finne *koordinatene*, og vi får vite at koordinatene er $(35, 50\,000)$.



Det betyr at $T(35) = 50\,000$, altså at vi bruker 35 terminer på å tilbakebetale hvis terminbeløpet er $50\,000$ kr.

Svar: 35 terminer.

Oppgave 7 (6 poeng) Nettkode: E-4CP8



Figur 1 Figur 2 Figur 3

Ovenfor ser du de tre første figurene i en serie som kan fortsettes. De store kvadratene er sammensatt av hvite og svarte kvadrater. Hvert av de hvite kvadratene har areal lik 1. De svarte kvadratene har areal som øker i størrelse.

a)
Bestem det totale arealet av de svarte kvadratene i den neste figuren, figur 4.

Løsningsforslag a)

Før det første ser vi at hver av de svarte kvadratene øker med 1 i sidelengde for hver figur. I figur 1, 2 og 3 er sidelengdene i kvadratene henholdsvis 1, 2 og 3. Derfor må sidelengdene til de svarte kvadratene i figur 4 ha 4 som sidelengde. Arealet av hvert av de svarte kvadratene i den nye figuren er derfor $4 \cdot 4 = 16$.

Nå må vi finne ut hvor mange svarte kvadrater som skal være med i figur 4. I figur 1 er det $1 \cdot 1 = 1$ svart kvadrat. I figur 2 er det $2 \cdot 2 = 4$ svarte kvadrater, og i figur 3 er det $3 \cdot 3 = 9$ svarte kvadrater. Derfor ser det ut til at det skal være $4 \cdot 4 = 16$ svarte kvadrater i figur 4. Legg merke til at arealet til et kvadrat er det samme som antall svarte firkanter i den figuren.

Nå kan vi regne ut det totale arealet av de svarte kvadrater i figur 4. Figur 4 har 16 kvadrater med 16 i areal, så det totale arealet blir $16 \cdot 16 = 256$.

Svar: Arealet er 256.

b)
Sett opp et uttrykk som viser det totale arealet av de svarte kvadratene i figur n uttrykt ved n.

Løsningsforslag b)

Fra forrige oppgave vet vi at i figur n, så er arealet av de svarte kvadratene lik n^2, og det er n^2 slike kvadrater. Det totale arealet til disse kvadratene er $n^2 \cdot n^2 = n^4$. (For eksempel er det $3^2 = 9$ svarte kvadrater i figur 3, hver av dem med areal $3 \cdot 3 = 9$, så det totale arealet er $9 \cdot 9 = 3^4$.)

Svar: Det totale arealet av de svarte kvadratene i figur n er n^4.

c)

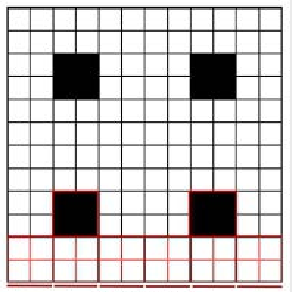
Antall hvite kvadrater i den nederste raden i hver figur kan uttrykkes med et andregradsuttrykk $S(n)$

Bestem $S(n)$

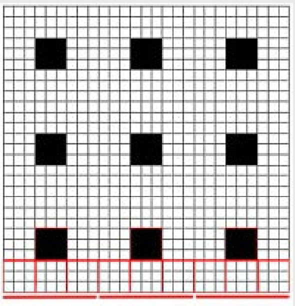
Løsningsforslag c)

Figur 1 er satt sammen av totalt 9 kvadrater av den minste typen, altså 1×1-kvadrater slik som det svarte kvadratet i midten.

Figur 2 er satt sammen av 2×2- kvadrater stablet til et stort kvadrat. I nederste linje er det $2 \cdot 3 = 6$ slike kvadrater, siden det er 3 kvadrater for hvert av de nederste sorte kvadratene.


Figur 2

Figur 3 er satt sammen av 3×3- kvadrater og det er $3 \cdot 3$ slike i nederste linje siden det er 3 hvite 3×3- kvadrater for hvert av de tre nederste sorte.


Figur 3

Figur n er satt sammen av $n \times n$- kvadrater. Det vil være n sorte kvadrater i nest nederste linje, og for hver av dem er det 3 hvite $n \times n$- kvadrater i nederste linje.

Totalt er det 3 ganger (antall sorte kvadrater i nest nederste linje) ganger (antall små hvite kvadrater i nederste linje av hvert av $n \times n$-kvadratene) små hvite kvadrater i nederste linje av n-te figur. Dette blir $S(n) = n \cdot n \cdot 3 = 3n^2$ hvite kvadrater totalt.

ALTERNATIV LØSNING

Svar: $S(n) = 3n^2$.

d)

Sett opp et uttrykk for det totale arealet av de hvite kvadratene i figur n uttrykt ved n.

Løsningsforslag d)

Vi har at

$$\text{antall hvite kvadrater} = \text{totalt areal} - \text{areal av svarte kvadrater}.$$

Hver figur er et kvadrat, og sidelengden i kvadratet er $S(n) = 3n^2$. Derfor er arealet av hver figur lik $3n^2 \cdot 3n^2 = 9n^4$. Videre skal vi trekke fra arealet til de svarte kvadratene, som vi fra **b)** vet at er n^4. Dermed har vi

$$\text{antall hvite kvadrater i figur } n = 9n^4 - n^4 = 8n^4$$

Svar: Antall hvite kvadrater i figur n er $8n^4$, dette blir også det totale arealet av de hvite kvadratene.