MAT1015 2013 Vår

Eksamenstid:

5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:

Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Du skal svare på alle oppgavene.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger:

Kilder for bilder, tegninger osv.

- Doruller: http://pub.tv2.no/multimedia/TV2/archive/00950/First_price_950599i.jpg (21.10.2012)
- Andre bilder, grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng) Nettkode: E-4BUZ

En kveld kjørte en taxisjåfør 10 turer.

Nedenfor ser du hvor mange passasjerer han hadde med på hver av turene.

1 5 3 3 5 2 1 4 1 2

a)
Bestem medianen, gjennomsnittet og typetallet for dette datamaterialet.

Løsningsforslag a)

For å finne *medianen* flytter vi rundt på tallene i rekken slik at de kommer i stigende rekkefølge.

$$1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 3\ 3\ 4\ 5\ 5$$

Medianen av disse tallene, er gjennomsnittet av de to midterste tallene. (Hvis det var et odde antall tall, hadde medianen vært det midterste tallet.) Det er *gjennomsnittet* av tall nummer 5 og tall nummer 6, altså henholdsvis 2 og 3. Det blir $\frac{2+3}{2} = 2,5$.

Videre skal vi finne gjennomsnittet av tallene. Gjennomsnittet er

$$\frac{\text{antall passasjerer sjåføren kjørte}}{\text{antall turer sjåføren kjørte}}$$

eller sagt på en annen måte, forholdet mellom summen av tallene over og antall tall. Sjåføren kjørte 10 turer til sammen, og gjennomsnittet blir derfor

$$\frac{1+1+1+2+2+3+3+4+5+5}{10} = \frac{27}{10} = 2,7.$$

(Her har vi valgt bruke tallene satt opp i stigende rekkefølge, for da kan det være lettere å regne ut summen.)

Typetallet er det tallet som forekommer flest ganger i datamaterialet. I vårt tilfelle er typetallet 1, som forekommer tre ganger.

Svar: Medianen er $2,5$, gjennomsnittet er $2,7$ og typetallet er 1.

b)
Sett opp en tabell som viser frekvens og kumulativ frekvens for antall passasjerer på turene.

Løsningsforslag b)

Vi skal sette opp en *frekvenstabell*. De forskjellige antall passasjerer som dukker opp varierer fra 1 til 5, og det er disse tallene vi skal finne frekvensene for. Vi setter opp *frekvensen* først. Frekvensen til tallet 1 er antallet ganger taxisjåføren kjører 1 passasjer; i dette tilfellet er det 3. Vi gjør det samme for de andre tallene. Vi setter opp tabellen og fyller inn frekvensene.

Antall passasjerer	Frekvens	Kumulativ frekvens
1	3	
2	2	
3	2	
4	1	
5	2	

Videre skal vi finne *kumulativ frekvens*. Kumulativ frekvens er antallet ganger det gitte tallet eller lavere tall kommer opp i datasettet. For eksempel kommer 1 opp 3 ganger, 2 opp 2 ganger og 3 opp 2 ganger; det gir at den kumulative frekvensen til 3 er $3+2+2=7$.

Antall passasjerer	Frekvens	Kumulativ frekvens
1	3	
2	2	
3	2	7
4	1	
5	2	

Dette gjør vi for alle de andre tallene også. Vi merker oss at kumulativ frekvens for 4 vil være kumulativ frekvens av 3 pluss frekvensen til 4, for da får vi med alle turene det har vært med 4 eller færre passasjerer. Dermed kan vi finne alle de kumulative frekvensene ved å se på frekvens-kolonnen og det vi tidligere har oppført i den kumulative frekvens-kolonnen. Den kumulative frekvensen for 1 er 3, for 2 er den $3+2=5$, for 3 er den $5+2=7$, for 4 er den $7+1=8$, og for 5 er den $8+2=10$. Vi fyller dette inn i tabellen. Den ferdige tabellen er vist under.

Svar:

Antall passasjerer	Frekvens	Kumulativ frekvens
1	3	3
2	2	5
3	2	7
4	1	8
5	2	10

Oppgave 2 (1 poeng) Nettkode: E-4BV2

Regn ut og skriv svaret på standardform

$0{,}075 \cdot 2\,000\,000$

Løsningsforslag

En god strategi er å skrive hvert *tall på standardform*. Tallet $0,075$ kan skrives som $7,5 \cdot \frac{1}{100} = 7,5 \cdot 10^{-2}$. Tallet $2\,000\,000$ har 6 nuller, og kan dermed skrives som $2 \cdot 10^6$. Nå kan vi skrive hele tallet som

$$0,075 \cdot 2\,000\,000 = 7,5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^6.$$

Vi bytter om på plassene for å bruke potensreglene, som sier at vi kan legge sammen eksponenter hvis *potensene* har samme *grunntall*. (Potensene 10^{-2} og 10^6 har samme grunntall, så vi kan bruke potensregelen på disse.) Vi får

$$7,5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^6 = \left(7,5 \cdot 2\right) \cdot \left(10^{-2} \cdot 10^6\right).$$

Vi vet at $7,5 \cdot 2 = 15$. Vi vil at det eneste tallet som ikke er en tierpotens skal være mellom 1 og 10, så vi skriver 15 som $1,5 \cdot 10^1$. Da får vi

$$\left(7,5 \cdot 2\right) \cdot \left(10^{-2} \cdot 10^6\right) = 1,5 \cdot \left(10^1 \cdot 10^{-2} \cdot 10^6\right).$$

Nå bruker vi potensregelen, og vi får

$$1,5 \cdot \left(10^1 \cdot 10^{-2} \cdot 10^6\right) = 1,5 \cdot 10^{1-2+6} = 1,5 \cdot 10^5,$$

og da har vi fått tallet på standardform.

Svar: $\underline{\underline{1,5 \cdot 10^5}}$.

Oppgave 3 (2 poeng) Nettkode: E-4BV4

Hvilken av de to brøkene A og B nedenfor har størst verdi?

A: $\frac{15 \cdot 5^{-1}}{2^2}$

B: $\frac{1}{6^{-2} \cdot 3 \cdot 15}$

Løsningsforslag

Vi prøver å få tallene på samme form, og starter med A. Vi vil gjerne ha bort brøkstreken, og det gjør vi ved å "flytte opp" nevneren og bytte fortegn på eksponenten. Det gjør vi ved å multiplisere med 2^{-2} over og under brøkstreken. Vi får

$$\begin{aligned}\tfrac{15\cdot 5^{-1}}{2^2} &= \tfrac{15\cdot 5^{-1}\cdot 2^{-2}}{2^2\cdot 2^{-2}}\\ &= \tfrac{15\cdot 5^{-1}\cdot 2^{-2}}{2^{2-2}}\\ &= \tfrac{15\cdot 5^{-1}\cdot 2^{-2}}{2^0}\\ &= 15\cdot 5^{-1}\cdot 2^{-2}.\end{aligned}$$

Det kan også være lurt å *primtallfaktorisere* alt som ikke er primtall, i dette tilfellet 15. Vi vet at $15 = 3\cdot 5$, og siden vi kan legge sammen *eksponenter* i *potenser* med samme *grunntall*, får vi at A er lik

$$\left(3\cdot 5\right)\cdot 5^{-1}\cdot 2^{-2} = 3\cdot 5^{1-1}\cdot 2^{-2} = 3\cdot 5^0\cdot 2^{-2} = 3\cdot 2^{-2}.$$

Vi fortsetter med B. Først ser vi at siden $15 = 3\cdot 5$, så er

$$6^{-2}\cdot 3\cdot 15 = 6^{-2}\cdot 3\cdot 3\cdot 5 = 6^{-2}\cdot 3^2\cdot 5.$$

Videre er $6 = 2\cdot 3$, og da er $6^{-2} = \left(2\cdot 3\right)^{-2} = 2^{-2}\cdot 3^{-2}$. Her bruker vi potensregelen med et produkt som grunntall. Eksponenten dukker opp på hver faktor når vi løser opp parentesen. Dermed får vi

$$6^{-2}\cdot 3^2\cdot 5 = 2^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 3^2\cdot 5 = 2^{-2}\cdot 5.$$

Dette er altså nevneren i brøken B, så B er lik

$$\frac{1}{2^{-2}\cdot 5}.$$

Vi multipliserer brøken med 2^2 over og under brøkstreken for å få et penere svar. Da får vi

$$\frac{1}{2^{-2}\cdot 5} = \frac{2^2\cdot 1}{2^2\cdot 2^{-2}\cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

Nå kan vi sammenligne A og B. Brøken A kunne skrives som $3\cdot 2^{-2}$. Vi kan få dette mer likt B ved å skrive det som en brøk; vi vet nemlig at $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$. Dermed er A lik $\frac{3}{4}$, og B er lik $\frac{4}{5}$. Fra dette ser vi at B er større enn A, siden $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ og $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$..

Svar: $B = \frac{4}{5} > \frac{3}{4} = A$, så B er størst

Oppgave 4 (5 poeng) Nettkode: E-4BV7

Sigvald får følgende tilbud fra foreldrene sine:

TILBUD 1	TILBUD 2
Du får 100 kroner i fast ukelønn. I tillegg får du 5 kroner hver gang du tar oppvasken.	Du får 50 kroner i fast ukelønn. I tillegg får du 10 kroner hver gang du tar oppvasken.

a)

Sett opp et matematisk uttrykk som kan være en modell for tilbud 1, og et matematisk uttrykk som kan være en modell for tilbud 2.

Løsningsforslag a)

Vi lar $T_1(x)$ være antall kroner Sigvald får i ukelønn hvis han vasker opp x ganger og godtok tilbud 1, og at $T_2(x)$ er tilsvarende for tilbud 2. La oss starte med å finne et uttrykk som beskriver tilbud 1. Vi ser at T_1 er en *lineær funksjon* (det vil si at *grafen* er en rett linje) – hvis x øker med 1, så øker $T_1(x)$med et fast tall. Dermed er T_1 på formen

$$T_1(x) = a_1 x + b_1,$$

der a_1 er *stigningstallet* og b_1 er *konstantleddet*. Konstantleddet a_1 er hvor mye ukelønnen stiger per gang Sigvald vasker opp. Det er 5 kroner, så $a_1 = 5$. Konstantleddet er der funksjonen krysser y-aksen, altså antall kroner Sigvald får i ukepenger hvis han ikke vasker opp noen ganger. Det er 100 kroner, så $b_1 = 100$. Dermed kan vi modellere tilbud 1 med

$$T_1(x) = 5x + 100.$$

På helt tilsvarende vis finner vi at stigningstallet til T_2 er 10, og at konstantleddet er 50. Dermed kan vi modellere tilbud 2 med

$$T_2(x) = 10x + 50.$$

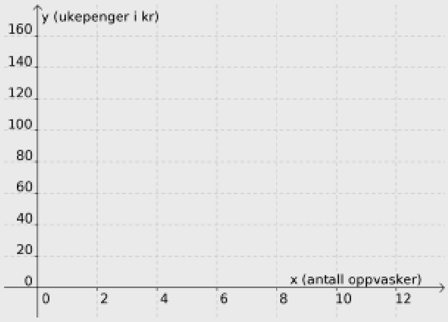
Svar: Vi kan modellere tilbud 1 med $T_1(x) = 5x + 100$, og tilbud 2 med $T_2(x) = 10x + 50$.

b)

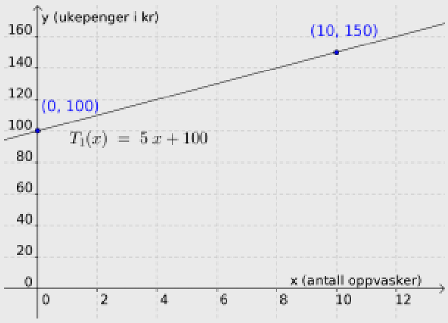
Skisser grafen til hver av modellene, og gi Sigvald råd om hvilket tilbud han bør velge.

Løsningsforslag b)

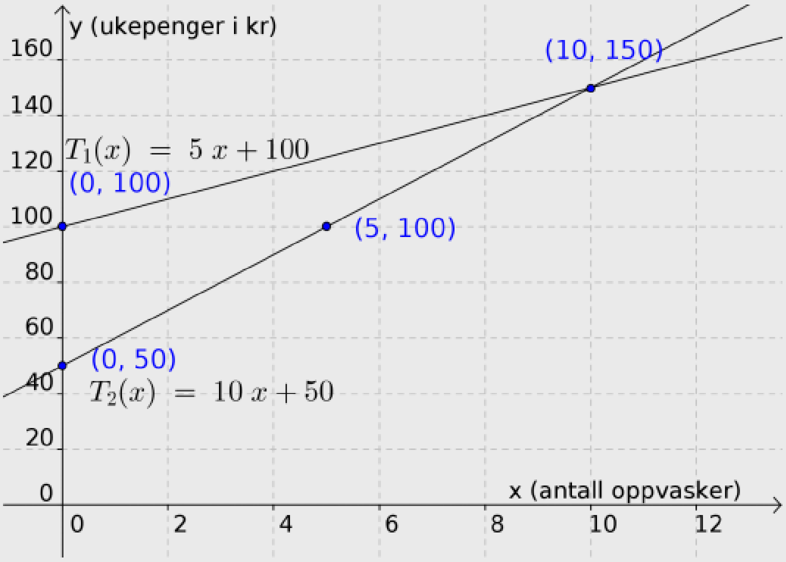
Vi merker oss at det står at vi skal *skissere* grafen, og da trenger vi ikke ta med alle detaljene vi skulle ha tatt med hvis det hadde stått "tegn grafen". Vi starter med T_1. Det første vi gjør er å lage et *koordinatsystem*. Vi er bare ute etter positive x-verdier, så vi lar x gå mellom 0 og 12. Vi setter på passende navn og enheter på *aksene*.



Vi vet at T_1 er en *lineær funksjon*, så alt vi trenger er to punkter på grafen; da er grafen til T_1 den rette linjen mellom dem. Vi vet at grafen krysser *y-aksen* i 100, så $(0, 100)$ er et punkt på grafen. Videre vet vi at hvis Sigvald vasker opp 10 ganger, så får han $10 \cdot 5 = 50$ kroner ekstra i ukelønn, som gir en total ukelønn på $150\ \mathrm{kr}$; dermed er $(10, 150)$ også et punkt på grafen. Vi tegner de to punktene og den rette linjen mellom dem.

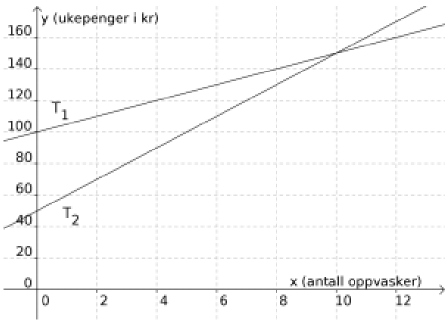


Vi kan gjøre det samme med T_2. Fra konstantleddet får vi at $(0, 50)$ er et punkt på grafen, og hvis Sigvald vasker opp 5 ganger får han en ukelønn på $50 + 5 \cdot 10 = 100$ kroner, så $(5, 100)$ er et annet punkt på grafen. Vi tegner den rette linjen mellom de to punktene. Vi gjør det i samme koordinatsystem som tidligere, slik at vi kan sammenligne de to modellene.



Her ser vi at T_1 gir mest ukelønn når $x < 10$, og at T_2 gir mest ukelønn når $x > 10$. Dermed burde Sigvald godta tilbud 1 hvis han vasker opp mindre enn 10 ganger per uke, og godta tilbud 2 hvis han vasker opp mer.

Svar: Sigvald burde godta tilbud 1 hvis han vasker opp mindre enn 10 ganger per uke, og godta tilbud 2 hvis han vasker opp mer.



Oppgave 5 (2 poeng) Nettkode: E-4BWN

Tegn av tabellen nedenfor i besvarelsen din, gjør beregninger, og fyll inn det som mangler.

Plassverdisystem med grunntall 10	Plassverdisystem med grunntall 2
	101011_2
26	

Løsningsforslag

Vi starter med å finne ut hva 101011_2 er i totallsystemet. Dette tallet skal stå i første rute. Tallet er lik

$$101011_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 .$$

Vi vet at $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ og $2^5 = 32$. Da blir regnestykket over lik

$$1 + 2 + 8 + 32 = 43.$$

Vi fyller inn dette i tabellen.

Plassverdisystem med grunntall 10	**Plassverdisystem med grunntall 2**
43	101011_2
26	

Videre skal vi finne ut av hva 26 er i totallsystemet. Det gjør vi ved å finne ut hvilke toerpotenser man skal legge sammen for å få 26. Vi har $2^4 = 16$, og det er den største toerpotensen som er under 26. Videre har vi $26 - 16 = 10$, og den største toerpotensen som er under 10 er $2^3 = 8$. Til slutt er $10 - 8 = 4 = 2^1$. Da ser vi at

$$2^4 + 2^3 + 2^1 = 16 + 8 + 2 = 26.$$

Det betyr at vi kan skrive 26 som

$$26 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 .$$

Dermed er 26 det samme som 11010_2 i totallsystemet. Vi fyller inn dette i tabellen, og den ferdige tabellen er vist under.

Svar:

Plassverdisystem med grunntall 10	**Plassverdisystem med grunntall 2**
43	101011_2
26	11010_2

Oppgave 6 (3 poeng) Nettkode: E-4BXC

Stian har kjøpt en bruktbil. Bilen kostet 100 000 kroner.

Anta at verdien vil avta med 10 % per år.

a)
Sett opp en modell f som Stian kan bruke for å regne ut verdien av bilen i årene som kommer.

Løsningsforslag a)

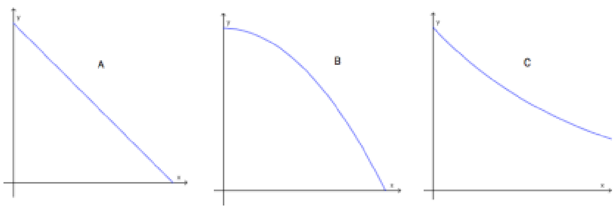
Vekstfaktoren til $-10\ \%$ er $0,9$. Det betyr at bilen vil være verdt $100\,000 \cdot 0,9\ \mathrm{kr}$ etter ett år, $100\,000 \cdot 0,9^2\ \mathrm{kr}$ etter to år, og så videre. Dermed vil bilen være verdt

$$f(x) = 100\,000 \cdot 0,9^x\ \mathrm{kr}$$

etter x år.

Svar: Bilen vil være verdt $f(x) = 100\,000 \cdot 0,9^x\ \mathrm{kr}$ etter x år.

b)
Hvilken av grafene nedenfor er grafen til f ? Begrunn svaret ditt.



Løsningsforslag b)

Verdien til bilen vil avta forholdsvis raskt i begynnelsen, men deretter flate ut, fordi $10\ \%$av $100\,000$ er mer enn $10\ \%$ av et mindre tall, for eksempel $50\,000$. En måte å se på det på, er at etter hvert år så skal verdien kuttes med én tiendedel. Da ser vi at C er den eneste grafen som passer. Grafen C er dessuten den eneste som ikke blir 0. Det stemmer med modellen vår, for det finnes ikke noen verdi x slik at $100\,000 \cdot 0,9^x = 0$.

Svar: Grafen C er riktig, fordi verdien avtar mer i begynnelsen enn etter hvert. Det kan også argumenteres med at C er den eneste grafen som ikke treffer x-aksen, akkurat som $f(x)$.

Oppgave 7 (2 poeng) Nettkode: E-4BXG

Tabellen nedenfor viser inntektene til personene i et borettslag.

Inntekt (i 1000 kroner)	Antall personer
$[300,400\rangle$	20
$[400,500\rangle$	20
$[500,700\rangle$	10

Bestem gjennomsnittsinntekten til personene i borettslaget.

Løsningsforslag

Det er 20 personer i klassen $[300,400\rangle$. Vi antar at disse 20 er jevnt fordelt utover klassen, slik at gjennomsnittlig inntekt av disse 20 er $\frac{300+400}{2} = 350$ (tusen kroner). Når vi skal regne ut *gjennomsnittet* av hele datasettet, er dette det samme som å anta at alle de 20 personene har en lønn på $350\,000 \text{ kr}$. Det er fordi

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{20 \cdot (\text{snitt av } [300,400\rangle) + 20 \cdot (\text{snitt av } [400,500\rangle) + 10 \cdot (\text{snitt av } [500,700\rangle)}{20+20+10}.$$

Nå kan vi regne ut at gjennomsnittet blir

$$\text{Gjennomsnitt} = \frac{\text{total lønn (i 1 000 kr)}}{\text{antall personer}} = \frac{20 \cdot 350 + 20 \cdot 450 + 10 \cdot 600}{20+20+10}$$

$$= \frac{7000+9000+6000}{50} = \frac{22\,000}{50} = \frac{2\,200}{5}$$

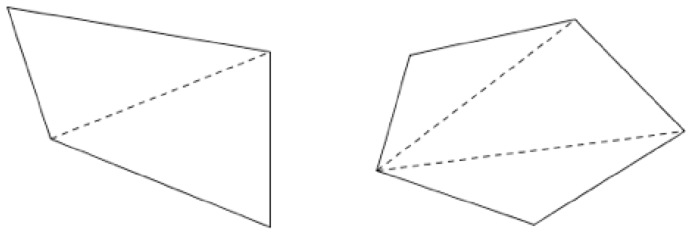
Vi kunne ha regnet ut brøken $\frac{2\,200}{5}$ for hånd, men det kan være enklere å bruke det faktum at $5 \cdot 4 = 20$ på *telleren*. Da får vi nemlig at $200 = 5 \cdot 40$ og $2\,000 = 5 \cdot 400$, så $2\,200 = 5 \cdot 40 + 5 \cdot 400 = 5 \cdot 440$, så

$$\frac{2\,200}{5} = \frac{5 \cdot 440}{5} = 440.$$

Dermed er gjennomsnittlig lønn $440\,000 \text{ kr}$.

Svar: $440\,000 \text{ kr}$, gitt at dataene er jevnt fordelt innenfor hver klasse.

Oppgave 8 (4 poeng) Nettkode: E-4BXJ



Vinkelsummen i en trekant er 180°.

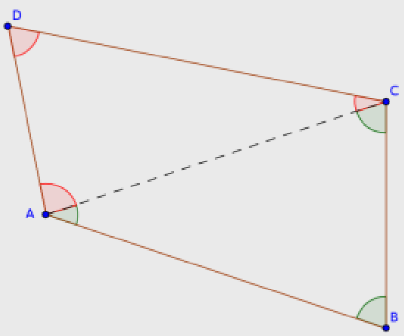
a)

Bruk figurene ovenfor til å bestemme vinkelsummen i en firkant og i en femkant.

Løsningsforslag a)

Vi kan bruke *vinkelsummen i en trekant* til å finne vinkelsummen i de andre figurene.

Vi tegner opp en hjelpetegning.



Ut i fra tegningen kan vi se at vinkelsummen til firkanten bare er summen av vinkelsummene i de to trekantene:

$$\text{vinkelsum i } \square ABCD = \text{vinkelsum i } \Delta ABC + \text{vinkelsum i } \Delta ACD.$$

Dette blir altså lik $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$. Vi kan være mer pedantiske og finne vinkelsummen med regning. Vinkelsummen i firkanten er

$$\text{vinkelsum} = \angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA.$$

Vi ser at $\angle DAB = \angle DAC + \angle CAB$, og at $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD$. Dette kan vi sette inn i vinkelsummen over, og vi får

$$\text{vinkelsum} = (\angle DAC + \angle CAB) + \angle ABC + (\angle BCA + \angle ACD) + \angle CDA.$$

Nå kan vi gjøre om på rekkefølgen av leddene over.

$$\text{vinkelsum} = (\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA) + (\angle DAC + \angle ACD + \angle CDA).$$

Men uttrykket i den første parentesen over er vinkelsummen i ΔABC, og det andre uttrykket er vinkelsummen i ΔACD, så vinkelsummen i firkanten er

$180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$. Vi merker oss at *alle* firkanter kan deles inn i to trekanter på denne måten, så vinkelsummen i enhver firkant er 360°.

Vi kan gjøre det samme for femkanten. Femkanter kan deles inn i tre trekanter, og da blir vinkelsummen i femkanten lik $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$.

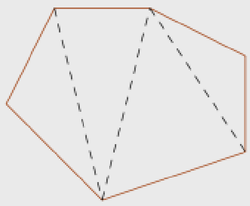
Svar: Vinkelsummen i en firkant er 360°, og vinkelsummen i en femkant er 540°.

b)

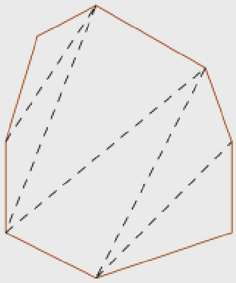
Bestem vinkelsummen i en sekskant og i en åttekant.

Løsningsforslag b)

Vi kan dele inn sekskanter og åttekanter slik som i forrige oppgave. En sekskant kan deles inn i 4 trekanter:



Mens en åttekant kan deles inn i 6:



Dermed er vinkelsummen i en sekskant lik $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$, mens vinkelsummen i en åttekant er $6 \cdot 180^\circ = 1\,080^\circ$.

Svar: Vinkelsummen i en sekskant 720°, og vinkelsummen i en åttekant er lik $1\,080^\circ$.

c)

Trekanter, firkanter, femkanter og så videre kalles mangekanter.

I en mangekant er vinkelsummen 1800°. Hvor mange kanter har denne mangekanten?

Løsningsforslag c)

Vi kan løse denne oppgaven på to måter; den første går ut på å prøve seg frem, mens den siste går ut på å lage en generell formel for vinkelsummen i en n-kant.

Vi kan få en firkant fra en trekant ved å "lime på" en trekant til en av sidene, slik som vist i **a)**. Tilsvarende kan vi en femkant ved å "lime på" en trekant til en firkant. Hver gang vi limer på en trekant, adderer vi 180° til vinkelsummen av mangekanten. En åttekant hadde vinkelsum $1\,080^\circ$. Legger vi til en trekant, slik at vi får en nikant, blir vinkelsummen $1\,080^\circ + 180^\circ = 1\,260^\circ$. Legger vi på en trekant til blir vinkelsummen $1\,440^\circ$; legger vi på enda en blir vinkelsummen $1\,620^\circ$, og legger vi på en siste trekant blir vinkelsummen $1\,800^\circ$, og det var det som var etterspurt. Vi har lagt til 4 kanter på en åttekant, så figuren med vinkelsum $1\,800^\circ$ er en tolvkant.

Vi kan generalisere dette. I en trekant er vinkelsummen 180°. Legger vi på n trekanter, så får vi en n-kant, og denne har vinkelsum $(n-2)\cdot 180^\circ$. Dette passer med at firkanter har vinkelsum $2 \cdot 180^\circ$, at åttekanter har vinkelsum $6 \cdot 180^\circ$, og så videre. Dermed er vi ute etter det tallet n som gir en vinkelsum på $(n-2)\cdot 180^\circ = 1\,800^\circ$. Vi ser at vi kan multiplisere 180° med 10 for å få $1\,800^\circ$; dermed er $n - 2 = 10$ så $n = 12$. Derfor har mangekanten 12 kanter.

Svar: 12 kanter.

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng) Nettkode: E-4BXO

Stortinget ved starten av perioden 2009-2013	
Parti	Antall representanter
Arbeiderparti	64
Fremskrittspartiet	41
Høyre	30
Sosialistisk Venstreparti	11
Senterpartiet	11
Kristelig Folkeparti	10
Venstre	2

a)

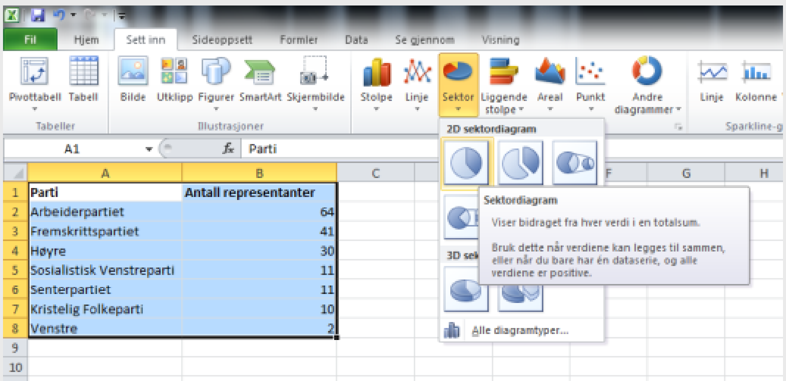
Lag et sektordiagram som illustrerer opplysningene gitt i tabellen ovenfor.

Løsningsforslag a)

Vi velger Excel. Det første vi gjør er å legge inn tabellen i regnearket.

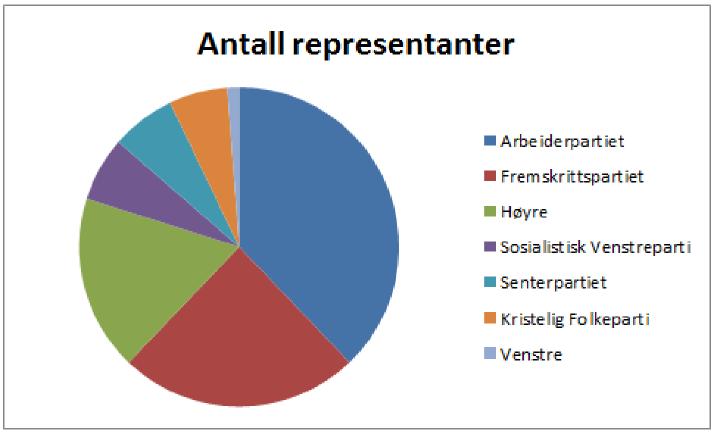
Parti	Antall representanter
Arbeiderpartiet	64
Fremskrittspartiet	41
Høyre	30
Sosialistisk Venstreparti	11
Senterpartiet	11
Kristelig Folkeparti	10
Venstre	2

Vi vil lage et sektordiagram. Derfor markerer vi tabellen vi har lagt inn, trykker “Sett inn”, og velger sektordiagram.



Resultatet er vist under.

Svar:



b)

Stortinget ved starten av perioden 2009-2013		
Parti	Antall kvinner	Antall menn
Arbeiderparti	32	32
Fremskrittspartiet	10	31
Høyre	9	21
Sosialistisk Venstreparti	3	8
Senterpartiet	7	4
Kristelig Folkeparti	4	6
Venstre	2	0

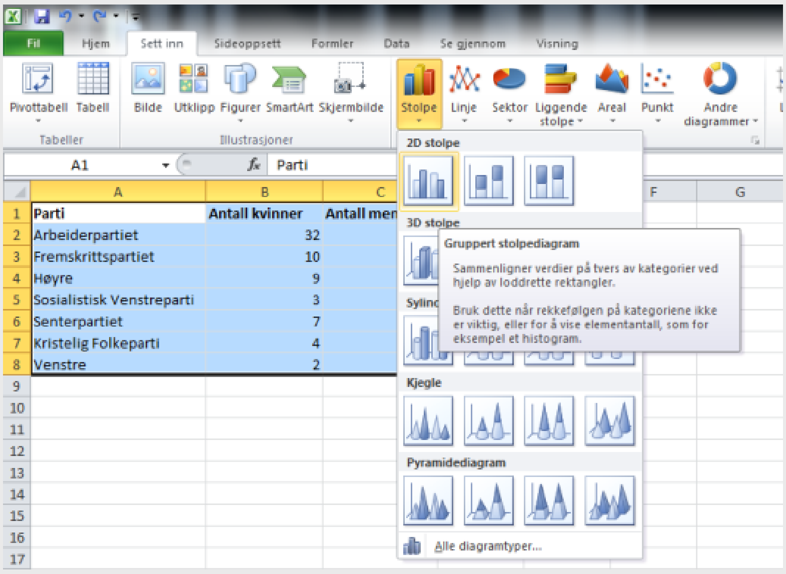
Lag et passende diagram som illustrerer opplysningene gitt i tabellen ovenfor.

Løsningsforslag b)

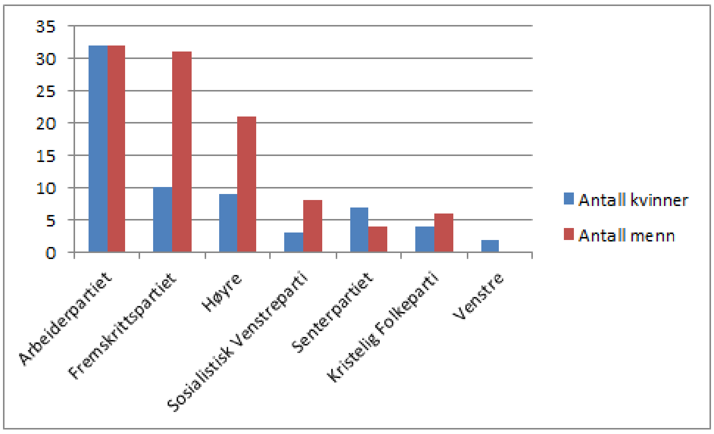
Vi bruker Excel. Det første vi gjør er som vanlig å legge inn tabellen i regnearket.

Parti	Antall kvinner	Antall menn
Arbeiderpartiet	32	32
Fremskrittspartiet	10	31
Høyre	9	21
Sosialistisk Venstreparti	3	8
Senterpartiet	7	4
Kristelig Folkeparti	4	6
Venstre	2	0

Vi markerer tabellen, og trykker “Sett inn” for å finne et passende diagram. Vi velger et gruppert stolpediagram, for da er det lett å se hvor mange kvinner og menn som har stemt på de diverse partiene. Resultatet er vist under.



Svar:



Oppgave 2 (6 poeng) Nettkode: E-4BXT

Familien din er på ferie og skal leie en bil. Tabellen nedenfor viser hvor mye det koster å leie bilen hvis dere kjører 100 km, og hvor mye det koster hvis dere kjører 150 km.

Antall kilometer	100	150
Pris (kroner)	500	625

Det er en lineær sammenheng mellom antall kilometer og pris.

a)
Hva vil det koste å leie bilen dersom dere skal kjøre 300 km?

Løsningsforslag a)

Det koster $500\ \mathrm{kr}$ å kjøre $100\ \mathrm{km}$, og $625\ \mathrm{kr}$ for å kjøre $150\ \mathrm{km}$. Det betyr at det koster $625\ \mathrm{kr} - 500\ \mathrm{kr} = 125\ \mathrm{kr}$ ekstra per 50 kilometer man kjører. Hvis vi skal kjøre bilen i $300\ \mathrm{km}$, så må vi legge til $3 \cdot 125\ \mathrm{kr}$ til prisen det koster å kjøre $150\ \mathrm{km}$. Dermed har vi pris for $300\ \mathrm{km}$ er lik

$$\text{pris for } 150 \text{ km} + 3 \cdot 125 \text{ kr} = 625 \text{ kr} + 375 \text{ kr} = 1\,000 \text{ kr}\,.$$

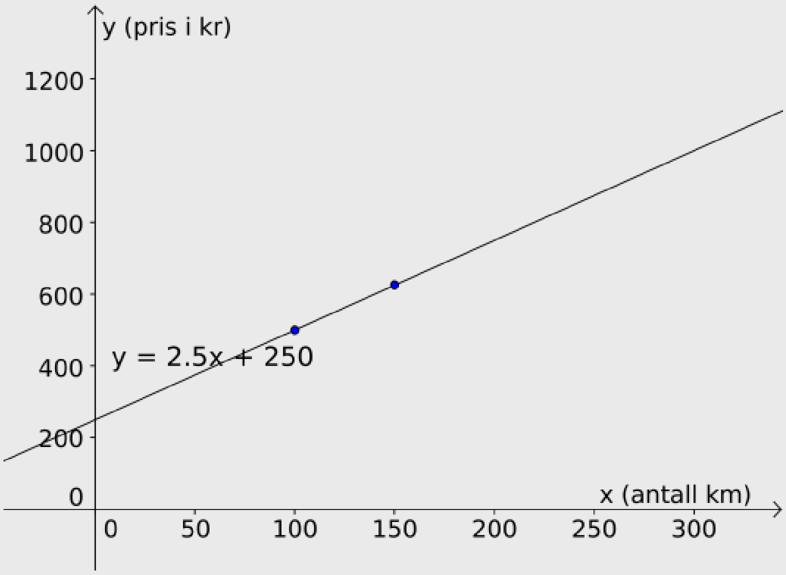
Svar: $\underline{\underline{1\,000\ \mathrm{kr}.}}$

b)
Dersom dere kjører x km, må dere betale y kroner.

Bestem en modell på formen $y = ax + b$ som viser sammenhengen mellom x og y.

Løsningsforslag b)

Vi finner den lineære (rette) modellen i *GeoGebra*. Først legger vi inn de to punktene på *grafen* som vi har fra **a)**, nemlig $(100, 500)$ og $(150, 625)$. Punktet $(100, 500)$ er på grafen fordi det koster $500\ \mathrm{kr}$ å kjøre $100\ \mathrm{km}$, og tilsvarende for det andre punktet. Vi finner den rette linjen mellom punktene, høyreklikker og trykker "Likning $y = ax + b$" for å få likningen på kjent form.



Her ser vi at likningen til modellen vår er $y = 2,5x + 250$.

ALTERNATIV LØSNING

Svar: $\underline{\underline{y = 2,5x + 250}}$.

c)

Gi en praktisk tolkning av tallene a og b i denne oppgaven.

Løsningsforslag c)

Vi vet at hvis man reiser x kilometer, så må man betale $2,5x + 250$ kroner. Hvis vi reiser i $0\,\text{km}$, så må vi betale $2,5 \cdot 0 + 250 = 250$ kroner. Det betyr at det koster $250\,\text{kr}$ å leie bilen i utgangspunktet, så startprisen er $250\,\text{kr}$. Videre koster det $2,5\,\text{kr}$ per kilometer vi kjører.

Svar: Tallet b er hvor mye det koster å leie bilen i utgangspunktet, og a er antall kroner det koster å kjøre per kilometer.

Oppgave 3 (3 poeng) Nettkode: E-4BXX

Petter vil sende en e-post med en matematikkoppgave til to personer 1. januar. Anta at hver av de to personene sender e-posten videre til to nye personer dagen etter, at hver av de fire som da får den, også sender den videre til to nye personer dagen etter at de mottok den, og at e-posten fortsetter å spres på samme måte i dagene framover.

a)

Hvor mange personer vil motta e-posten 6. januar?

Løsningsforslag a)

1. januar sendes (og mottas) det 2 e-poster. 2. januar sender hver av disse 2 e-poster hver, og så da mottas det $2 \cdot 2 = 4$ e-poster. Den 3. januar sender hver av disse 2 e-poster, så det mottas $4 \cdot 2 = 8$ e-poster. Hver dag dobles altså antall e-poster mottatt. Den 4. januar mottas det $8 \cdot 2 = 16$ e-poster, den 5. januar mottas det $16 \cdot 2 = 32$ e-poster, og den 6. januar mottas det $32 \cdot 2 = 64$ e-poster. Generelt mottas det 2^n e-poster etter n dager.

Svar: 64 e-poster

b)

På hvilken dato vil antall mottatte e-poster på én dag for første gang bli større enn én milliard?

Løsningsforslag b)

Vi vil finne ut hvor stor n må være for at 2^n skal være større enn én milliard ($= 1\,000\,000\,000 = 10^9$). Det kan vi gjøre ved å prøve å sette inn større og større tall for n, eller så kan vi løse problemet grafisk. Vi finner ved prøving og feiling at

$$2^{29} < 10^9 < 2^{30}$$

så første dag med mer enn én milliard mottatte e-poster er 30. januar.

ALTERNATIV LØSNING

Svar: Den 30. januar.

Oppgave 4 (7 poeng) Nettkode: E-4BY5

Tabellene nedenfor viser resultatene for de åtte beste utøverne på 1500 m skøyter for menn under OL i 1968 og under OL i 2010.

OL 1968

Plass	Utøver	Land	Tid (sekunder)
1	Kees Verkerk	Nederland	123,4
2	Ivar Eriksen	Norge	125,0
2	Ard Schenk	Nederland	125,0
4	Magne Thomassen	Norge	125,1
5	Johnny Höglin	Sverige	125,2
6	Bjørn Tveter	Norge	125,2
7	Svein-Erik Stiansen	Norge	125,5
8	Eduard Matusevitsj	Sovjetunionen	126,1

OL 2010

Plass	Utøver	Land	Tid (sekunder)
1	Mark Tuitert	Nederland	105,57
2	Shani Davis	USA	106,10
3	Håvard Bøkko	Norge	106,13
4	Ivan Skobrev	Russland	106,42
5	Mo Tae-bum	Korea	106,47
6	Chad Hedrick	USA	106,69
7	Simon Kuipers	Nederland	106,76
8	Mikael Flygind Larsen	Norge	106,77

a)

Hvor mange prosent sank vinnertiden med fra 1968 til 2010?

Løsningsforslag a)

Vi vil finne ut hvor mange prosent vinnertiden sank med fra 1968 til 2010. Hvis x er *vekstfaktoren* fra 1968 til 2010, så skal altså

$$123,4 \cdot x = 105,57.$$

Hvis vi kan finne denne vekstfaktoren, så kan vi konvertere til prosent og få svaret. Vi dividerer begge sider i uttrykket over med tallet foran x og forkorter. Da får vi at

$$\frac{123{,}4 \cdot x}{123{,}4} = \frac{105{,}57}{123{,}4},$$
$$x = \frac{105{,}57}{123{,}4}.$$

Da får vi at $x \approx 0,8555 = 85,55\ \%$. Dette tolkes til at vinnertiden i 2010 var $85,55\ \%$ av vinnertiden i 1968. Derfor har vinnertiden sunket med cirka $100\ \% - 85,55\ = 14,45\ \%$.

Svar: Cirka $\underline{\underline{14,45\ \%}}$.

b)
Bestem gjennomsnittstiden for de åtte beste i 1968 og for de åtte beste i 2010.

Løsningsforslag b)

Hvis vi skulle ha regnet ut *gjennomsnittet* med regning, måtte vi ha lagt sammen de 8 beste tidene og dividert dette med 8. Dette vil ta mer av eksamenstiden enn å regne det ut med hjelp av et *regneark*, spesielt siden vi må bruke regneark i neste oppgave også. Derfor legger vi inn informasjonen i et regneark; vi bruker Excel.

	A	B	C	D
1		**Plass**	**1968**	**2010**
2		**1**	123,4	105,57
3		**2**	125	106,1
4		**3**	125	106,13
5		**4**	125,1	106,42
6		**5**	125,2	106,47
7		**6**	125,2	106,69
8		**7**	125,5	106,76
9		**8**	126,1	106,77
10	**Gjennomsnitt**			

Vi kan finne gjennomsnittene på to måter. Enten kan vi gjøre det manuelt, ved å summere opp tallene i hver kolonne og dividere med 8. For 1968 gjør vi dette ved å skrive

```
=SUMMER(C2:C9)/8
```

(**C2:C9** refererer til rutene **C2**, **C3**, ..., **C9**, og det er i disse rutene tidene ligger i.) Vi kan også bruke Excels innebygde funksjoner, ved å skrive

```
=GJENNOMSNITT(C2:C9)
```

Uavhengig av hvilken metode vi bruker, får vi at gjennomsnittet i 1968 var cirka $125,1$ sekunder, mens gjennomsnittet i 2010 var cirka $106,36$ sekunder. Vi bruker samme antall desimaler som dataene som er oppgitt.

Svar: Gjennomsnittet i 1968 var cirka $125,1$ sekunder, og gjennomsnittet i 2010 var cirka $106,36$ sekunder.

c)
Bestem standardavviket for de to tallmaterialene.

Hvorfor er standardavviket større i 1968 enn i 2010?

Løsningsforslag c)

Vi bruker samme *regneark* som i forrige oppgave. Vi bruker Excels innebygde funksjon for å finne *standardavvikene*, og for 1968 skriver vi

```
=STDAV.P(C2:C9)
```

Vi bruker **STDAV.P** fordi vi vil regne ut standardavviket for hele datasettet. Hvis vi hadde brukt **STDAV**, ville vi fått estimerte verdier basert på utvalg.

Det er det samme med 2010, bare at vi bytter ut C med D. Da får vi følgende regneark.

	Plass	1968	2010
	1	123,4	105,57
	2	125	106,1
	3	125	106,13
	4	125,1	106,42
	5	125,2	106,47
	6	125,2	106,69
	7	125,5	106,76
	8	126,1	106,77
Gjennomsnitt		125,0625	106,36375
Standardavvik		0,71403344	0,3868442

Standardavviket til tidene i 1968 var cirka $0,71$, og standardavviket for 2010 var cirka $0,39$. Vi ser at tidene i 1968 ligger mellom $123,4$ til $126,1$ sekunder, mens tidene i 2010 ligger mellom $105,57$ og $106,77$, altså et betydelig mindre intervall. Vi ser dermed at tidene i 1968 varierer mer enn tidene i 2010, og det er akkurat derfor standardavviket er størst i 1968.

Svar: Standardavviket til tidene i 1968 var cirka $0,71$ sekunder, og standardavviket for 2010 var cirka $0,39$ sekunder. Standardavviket i 1968 er større enn i 2010 fordi de åtte beste tidene varierte mer i 1968 enn i 2010.

Oppgave 5 (8 poeng) Nettkode: E-4BYC

Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom diameteren til en dorull og hvor mange meter papir som er brukt av dorullen.

Antall meter papir som er brukt av dorullen	0	2	6	10	12
Dorullens diameter (millimeter)	102	96	83	72	67

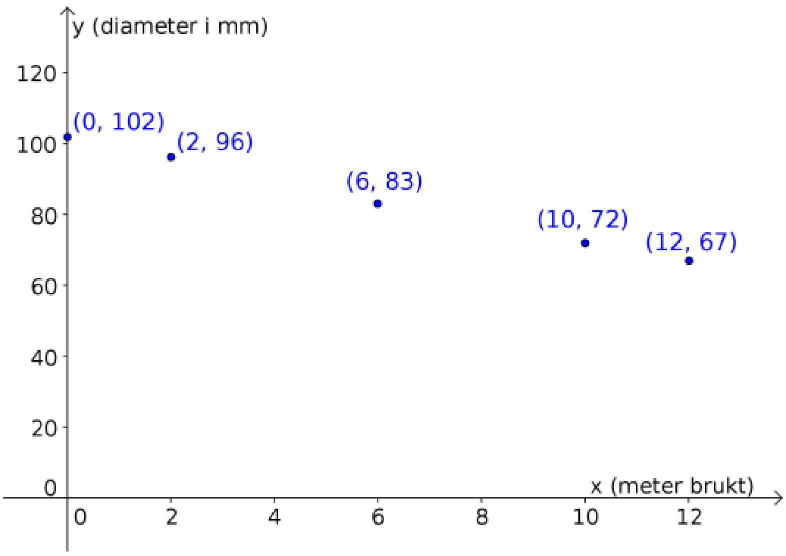
a)

Tegn et koordinatsystem med meter som enhet langs x-aksen og millimeter som enhet langs y - aksen. Marker verdiene fra tabellen ovenfor som punkter i koordinatsystemet.

Løsningsforslag a)

Først skriver vi inn alle punktene i *GeoGebra*. Punktene er $(0, 102)$, $(2, 96)$, og så videre. Deretter tilpasser vi aksene slik at vi ser alle punktene. Vi velger passende navn til aksene. Resultatet er vist under.

Svar:



b)
Bruk regresjon til å bestemme en lineær funksjon som passer godt med punktene fra oppgave 5 a). Tegn grafen til funksjonen i samme koordinatsystem som du brukte i oppgave 5 a).

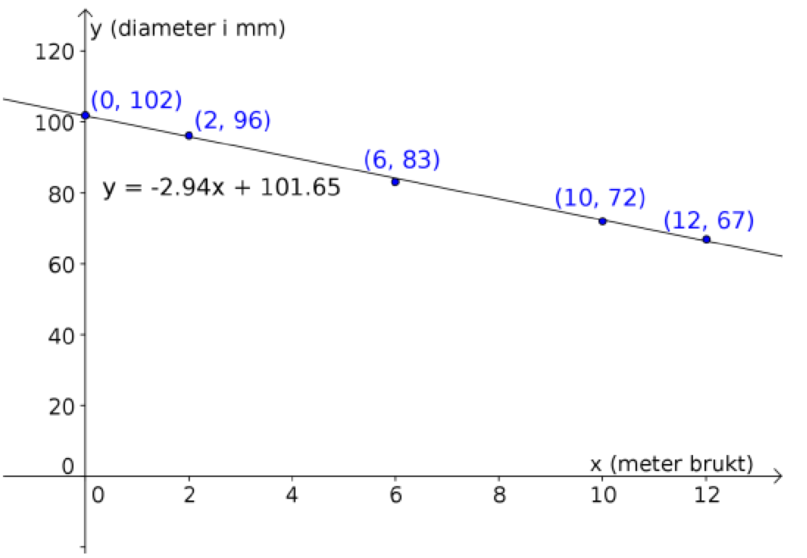
Løsningsforslag b)

Vi kan finne den *lineære funksjonen* som passer best med punktene ved å bruke **RegLin**-funksjonen i GeoGebra. De seks punktene vi lagde i koordinatsystemet i sted, ble hetende A, B, C, D og E. Vi finner linjen ved å skrive

```
RegLin[A, B, C, D, E]
```

i "Skriv inn"-feltet i GeoGebra. Resultatet er vist under. Vi høyreklikker på linjen i algebrafeltet, og velger "Likning $y = ax + b$" for å få ligningen til linjen på den kjente formen. Vi ser at linjen har ligningen $y = -2,94x + 101,65$.

Svar: Linjen har likningen $y = -2,94x + 101,65$.



c)
En tom dorull har en diameter på 38 mm.

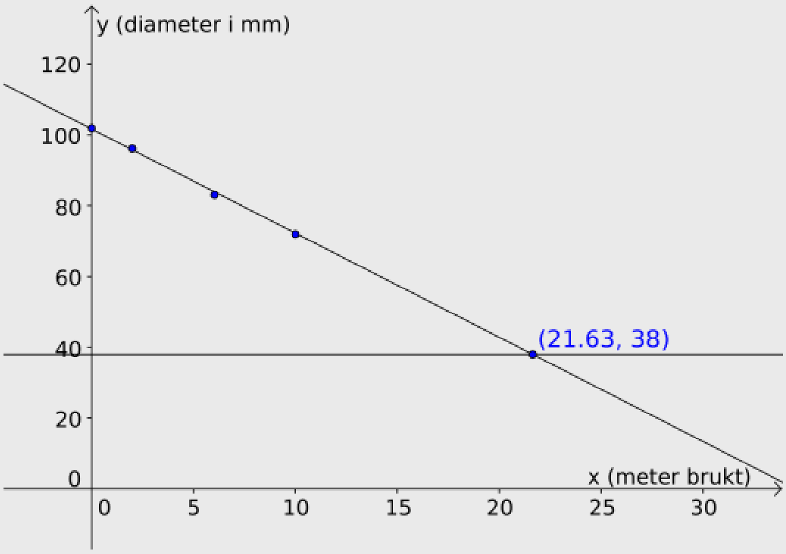
Hvor mange meter papir er det på en ny dorull ifølge modellen i oppgave 5 b)?

Løsningsforslag c)

Vi er ute etter å finne hvor mange meter dopapir som er brukt når diameteren til dorullen er 38 mm. Det gjør vi ved å finne ut når den *lineære funksjonen* vi fant i deloppgave b), treffer linjen $y = 38$. Vi tegner den *konstante* linjen ved å skrive

```
y = 38
```

i "Skriv inn"-linjen i den samme *GeoGebra*-filen som før. Vi må tilpasse aksene slik at vi ser *skjæringspunktet* mellom de to linjene, og vi finner koordinatene til skjæringspunktet ved å trykke på det stedet linjene møtes, eller bruke skjæringsverktøyet.



Vi ser at skjæringspunktet har koordinater $(21.63, 38)$. Det tolkes slik: Når vi har brukt $21,63$ meter dopapir, så er diameteren til dorullen 38 millimeter, altså er dorullen tom. Det må bety at det er $21,63$ meter dopapir på dorullen når den er ny.

Svar: $21,63$ meter

d)

På pakken med doruller står det at hver dorull inneholder 160 ark. Hvert ark er 14 cm langt.

Hvordan stemmer modellen i oppgave 5 b) med dette?

Løsningsforslag d)

Hvis hvert ark er $14\ \mathrm{cm}$ langt og hver dorull har 160 ark, så må det være

$$14\ \mathrm{cm} \cdot 160 = 2\,240\ \mathrm{cm} = 22,4\ \mathrm{m}$$

dopapir på hver dorull. I følge modellen vår er det $21,63$ meter, så vi var ikke så langt unna.

Svar: I følge pakken er det $22,4\ \mathrm{m}$ dopapir per rull, og i følge modellen vår er det $21,63\ \mathrm{m}$. Det er en akseptabel feilmargin.

Oppgave 6 (6 poeng) Nettkode: E-4C0R

Bilmerke	Volvo
Bilmodell	V50
Nybilpris i 2006	299 990
Antatt verdi i 2011	171 000
Verditap	128 900
Verditap årlig	25 780

I 2011 kjøpte Helene en bruktbil. Hun fant da tabellen ovenfor på Internett. Alle beløp er oppgitt i kroner.

a)

Forklar at det årlige verditapet på bilen er beregnet ved hjelp av en lineær modell, og bestem denne modellen.

Løsningsforslag a)

Bilen var verdt $299\,990\ \mathrm{kr}$ i utgangspunktet, og i følge tabellen mistet den $25\,780\ \mathrm{kr}$ i verdi årlig. Det betyr at etter ett år, så var bilen verdt $299\,990\ \mathrm{kr} - 25\,780\ \mathrm{kr}$; etter to år var bilen verdt $299\,990\ \mathrm{kr} - 2 \cdot 25\,780\ \mathrm{kr}$, og så videre. Etter x år var bilen dermed verdt

$$299\,990\ \mathrm{kr} - x \cdot 25\,780\ \mathrm{kr}.$$

Hvis $f(x)$ er bilens verdi i kroner etter x år, så er altså

$$f(x) = -25\,780x + 299\,990.$$

Dette er modellen som er brukt i tabellen, og det er på formen $ax + b$, så modellen er lineær.

Svar: Hvis $f(x)$ er bilens verdi i kroner etter x år, så er $f(x) = -25\,780x + 299\,990$ (i følge tabellens modell). Dette funksjonsuttrykket er på formen $y = ax + b$, så modellen er lineær.

b)

Helene lurer på om det vil være mer realistisk å bruke en eksponentiell modell.

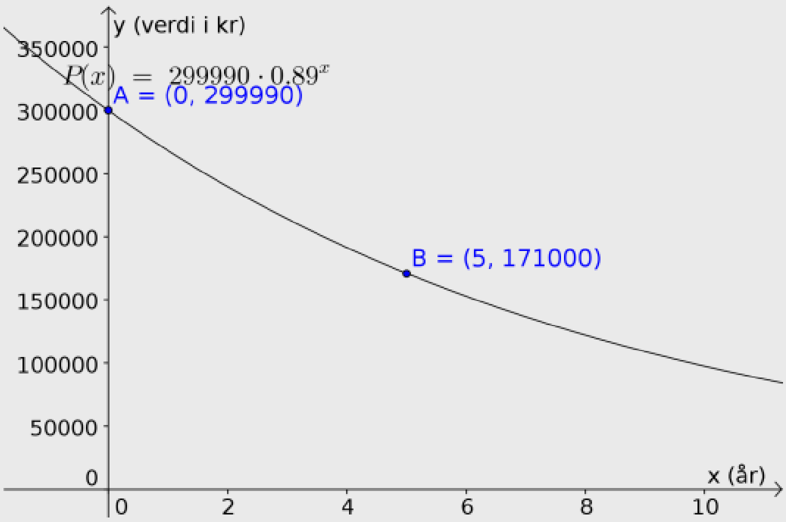
Bestem en eksponentiell modell som totalt gir samme verditap på bilen fra 2006 til 2011 som den lineære modellen.

Løsningsforslag b)

Vi bruker *regresjon* i *GeoGebra*. Vi skal finne en *eksponentiell* modell for prisen av bilen. For å finne en eksponentiell modell, må vi først ha noen punkter som er grunnlaget for modellen. Det eneste vi skal regne ut modellen fra, er prisen fra 2006 og den antatte verdien i 2011. La x være antall år etter 2006. I 2006 var bilen verdt $299\,990\,\mathrm{kr}$, så når $x = 0$ er prisen $P(x)$ lik $299\,990$. Derfor skriver vi inn punktet $(0, 299\,990)$. Videre er den antatte prisen i 2011 lik $171\,000\,\mathrm{kr}$, så vi skriver inn punktet $(5, 171\,000)$. Disse punktene blir hetende A og B. Vi finner den eksponentielle modellen ved å skrive

```
P(x) = RegEksp[A, B]
```

i "Skriv inn"-vinduet i GeoGebra.



Vi ser at den eksponentielle modellen har funksjonsuttrykk $P(x) = 299\,990 \cdot 0,89^x$.

Svar: Hvis $P(x)$ er verdien til bilen x år etter 2016, så er $P(x) = 299\,990 \cdot 0,89^x$.

c)

Hva er Helenes bil verd i 2013 ifølge den lineære modellen?

Hva er Helenes bil verd i 2013 ifølge den eksponentielle modellen?

Løsningsforslag c)

Den *lineære* modellen fra **a)** var $P_1(x) = -25\,780x + 299\,990$, og den *eksponentielle* modellen fra **b)** var $P_2(x) = 299\,990 \cdot 0,89^x$. Vi skal finne ut hvor mye bilen er verdt i 2013, altså der $x = 7$. Det gjør vi ved å regne ut $P_1(7)$ og $P_2(7)$. Vi får at

$$
\begin{aligned}
P_1(7) &= -25\,780 \cdot 7 + 299\,990 = 119\,530, \\
P_2(7) &= 299\,990 \cdot 0,89^7 \approx 132\,690.
\end{aligned}
$$

Dermed har vi at bilen vil være verdt $119\,530\ \mathrm{kr}$ i følge den lineære modellen, og $132\,690\ \mathrm{kr}$ i følge den eksponentielle modellen.

Svar: I følge den lineære modellen vil bilen være verdt $119\,530\ \mathrm{kr}$, og i følge den eksponentielle modellen vil den være verdt $132\,690\ \mathrm{kr}$.