MAT1015 2014 Høst

Eksamenstid:

5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:

Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Du skal svare på alle oppgavene.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.

- Melk: http://www.melk.no/meierifakta/ (02.10.2014)
- Andre bilder, tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (1 poeng) Nettkode: E-4C0Y

Regn ut og skriv svaret på standardform

$\frac{0{,}0003 \cdot 500\,000\,000}{0{,}002}$

Løsningsforslag

Vi skriver alle tallene i brøken som *tall på standardform*. Nevneren er $0{,}002$. Her er 2 -tallet tre plasser fra enerplassen, så vi har at nevneren er lik $2 \cdot 10^{-3}$. Så tar vi *telleren*. Tallet $0{,}0003$ kan skrives som $3 \cdot 10^{-4}$, og tallet $500\,000\,000$ kan skrives som $5 \cdot 10^{8}$. Dermed er brøken vår lik

$$\frac{0{,}0003 \cdot 500\,000\,000}{0{,}002} = \frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{8}}{2 \cdot 10^{-3}}.$$

Vi kan gjøre om på dette så vi får alle tierne for seg selv. Dette kan vi gjøre fordi når vi multipliserer, så har det ingenting å si i hvilken rekkefølge vi multipliserer. Vi får at

$$\frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{8}}{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{3 \cdot 5}{2} \cdot \frac{10^{-4} \cdot 10^{8}}{10^{-3}}.$$

Vi vet at $\frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$. Nå skal vi bruke regnereglene vi har for *potenser*, for å finne ut hva $\frac{10^{-4} \cdot 10^{8}}{10^{-3}}$ kan skrives som. Vi får bort *nevneren* ved å multiplisere med 10^{3} over og under brøkstreken: $\frac{10^{-4} \cdot 10^{8} \cdot 10^{3}}{10^{-3} \cdot 10^{3}} = 10^{-4} \cdot 10^{8} \cdot 10^{3}$. (Her blir nevneren 1 fordi $10^{-3} \cdot 10^{3} = 10^{-3+3} = 10^{0} = 1$.) Dette tilsvarer regneregelen som sier at vi kan "flytte opp" en potens hvis vi setter en minus foran *eksponenten*. Til slutt kan vi summere opp alle eksponentene:

$$10^{-4} \cdot 10^{8} \cdot 10^{3} = 10^{-4+8+3} = 10^{7}.$$

Dermed har vi fått at tallet på standardform er

$$7{,}5 \cdot 10^{7}.$$

Svar: $\underline{\underline{7{,}5 \cdot 10^{7}}}$

Oppgave 2 (1 poeng) Nettkode: E-4C10

Prisen for en vare er satt opp med 25 %. Nå koster varen 250 kroner. Hva kostet varen før prisen ble satt opp?

Løsningsforslag

La oss si at varen kostet x kroner før prisen ble satt opp. Den ble satt opp $25\ \%$, så den nye prisen ble $x \cdot 1,25\ \mathrm{kr}$. Men vi vet allerede at den nye prisen er 250 kroner; derfor er

$$x \cdot 1,25 = 250.$$

En annen måte å sette opp den samme likningen på, er å se at $25\ \%$ er det samme som en fjerdedel. Det betyr at prisen på varen ble satt opp med $\frac{1}{4}$, så den nye prisen er $\left(1 + \frac{1}{4}\right)x = \frac{5}{4}x$, eller

$$x \cdot \frac{5}{4} = 250.$$

(Dette er den samme likningen som før, fordi $1,25 = \frac{5}{4}$.) Vi vil altså finne tallet x som passer inn i ligningen over. Derfor multipliserer vi med $\frac{4}{5}$ på hver side av likhetstegnet, og forkorter. Da får vi

$$\begin{aligned} x \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{4}{5} &= 250 \cdot \tfrac{4}{5}, \\ x &= 250 \cdot \tfrac{4}{5}. \end{aligned}$$

Vi regner ut at

$$250 \cdot \frac{4}{5} = 4 \cdot \frac{250}{5} = 4 \cdot 50 = 200.$$

Dermed kostet varen 200 kroner.

ALTERNATIV LØSNING

Svar: $\underline{\underline{200\ \mathrm{kr}}}$

Oppgave 3 (2 poeng) Nettkode: E-4C12

En bunke med 500 ark er 6 cm høy.

Hvor mange ark vil det være i en bunke som er 300 m høy?

Skriv svaret på standardform.

Løsningsforslag

Vi finner først ut hvor mange bunker på 6 cm det er i en bunke på 300 m. Vi vet at $300 \text{ m} = 300 \cdot 100 \text{ cm} = 3 \cdot 10^4 \text{ cm}$, og vi vet at en bunke på 6 cm vil ha 500 ark i seg. Det trengs

$$\frac{3 \cdot 10^4 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 0,5 \cdot 10^4$$

slike bunker oppå hverandre for å få en bunke på 300 m. Siden vi har en bunke på 500 ark, er det dermed

$$0,5 \cdot 10^4 \cdot 500$$

ark i. Vi regner om til standardform:

$$0,5 \cdot 10^4 \cdot 500 = \left(5 \cdot 10^{-1}\right) \cdot 10^4 \cdot \left(5 \cdot 10^2\right) = 25 \cdot 10^{-1+4+2} = 25 \cdot 10^5 = 2,5 \cdot 10^6,$$

altså $2,5$ millioner ark.

Svar: Det er $2,5 \cdot 10^6$ ark i bunken.

Oppgave 4 (1 poeng) Nettkode: E-4C14

Regn ut

$\frac{2^3 \cdot 2^0}{2} - 8 \cdot 2^{-2}$

Løsningsforslag

Vi regner ut hvert ledd for seg. Får å regne ut brøken $\frac{2^3 \cdot 2^0}{2}$, husker vi at 2 er det samme som 2^1, at $2^0 = 1$ og at vi kan "flytte" en potens opp fra *nevneren* hvis vi bytter fortegn på *eksponenten*. Da får vi at

$$\frac{2^3 \cdot 2^0}{2} = \frac{2^3 \cdot 1}{2^1} = 2^3 \cdot 2^{-1}.$$

Nå kan vi bruke potensregelen som sier at vi kan legge sammen eksponenter når vi multipliserer to potenser med samme *grunntall*. Da får vi at
$2^3 \cdot 2^{-1} = 2^{3-1} = 2^2 = 4$.

Nå skal vi regne ut $8 \cdot 2^{-2}$. Den enkleste måten å gjøre dette på, er å se at $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, så $8 \cdot 2^{-2} = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2$. Vi kan også regne det ut ved å se at $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$. Da får vi $8 \cdot 2^{-2} = 2^3 \cdot 2^{-2} = 2^{3-2} = 2^1 = 2$.

Nå kan vi regne ut hele uttrykket. Ved å sette inn det vi har regnet ut i det opprinnelige uttrykket, får vi

$$\frac{2^3 \cdot 2^0}{2} - 8 \cdot 2^{-2} = 4 - 2 = 2.$$

Svar: 2

Oppgave 5 (4 poeng) Nettkode: E-4C1F

I 2014 er det 350 elever ved en skole. Anta at det vil være 275 elever ved skolen i 2029, og at antall elever avtar lineært i denne perioden.

a)
Bestem en modell som viser hvor mange elever $A\left(x\right)$ det vil være ved skolen x år etter 2014.

Løsningsforslag a)

Vi er ute etter å finne de *konstantene* a og b i funksjonsuttrykket $A(x) = ax + b$. Vi vet at funksjonsuttrykket til A skal være på denne formen fordi antallet elever avtar *lineært*. Videre vil vi at A skal passe inn med at det er 350 elever ved skolen i 2014 og 275 i 2029, med andre ord at

$$A(0) = 350$$

og

$$A(15) = 275.$$

Dette har vi fra at $A(x)$ er antall elever ved skolen x år etter 2014; $x = 0$ representerer derfor 2014 og $x = 15$ representerer 2029. Det første vi gjør er å finne konstantleddet til A, nemlig b. Det er der grafen til A krysser y-aksen, altså $A(0)$. Vi vet allerede at $A(0) = 350$, så $b = 350$. Neste steg er å finne *stigningstallet* a til A. Fra 2014 til 2029 sank antallet elever ved skolen fra 350 til 275. Det er en forskjell på $350 - 275 = 75$ elever. Dette skjedde over 15 år. Siden antallet elever sank med 75 på 15 år, så sank antallet elever per år med

$$\frac{75}{15} = 5.$$

Det betyr at stigningstallet til A er -5, altså $a = -5$. Stigningstallet er negativt fordi antallet elever *synker*. Nå setter vi sammen alt vi har funnet ut, og får at

$$A(x) = -5x + 350.$$

Dette er den lineære modellen vår.

Svar: $\underline{\underline{A(x) = -5x + 350}}$.

b)

Hvor mange elever vil det være ved skolen i 2024 ifølge modellen i oppgave a)?

Løsningsforslag b)

Tallet $A(x)$ er antallet elever ved skolen x år etter 2024, i følge den *lineære* modellen vår. Derfor er alt vi trenger å gjøre å sette inn $x = 10$ i funksjonsuttrykket. Vi får

$$A(10) = -5 \cdot 10 + 350 = -50 + 350 = 300.$$

Altså skal det være 300 elever ved skolen i 2024, i følge modellen.

Svar: 300 elever

c)

Ved en annen skole antar ledelsen at funksjonen B gitt ved

$B\left(x\right) = 200 \cdot 1{,}03^{x}$

kan brukes som modell for antall elever ved skolen x år etter 2014.

Hva kan du si, uten å gjøre beregninger, om antall elever ved denne skolen ut fra modellen?

Løsningsforslag c)

B er en *eksponentiell* modell, med *vekstfaktor* $1,03$. Det betyr at antallet elever vokser med $3\ \%$ hvert år. Videre ser vi at tallet foran potensen er 200; det betyr at $B(0) = 200$. Med samme tolkning som for $A(x)$ betyr dette at det er 200 elever ved skolen i 2014.

Svar: Antall elever ved skolen i 2014 er 200, og antallet øker med $3\ \%$ hvert år etter det.

Oppgave 6 (3 poeng) Nettkode: E-4C1K

I september 2014 ble en mobilapplikasjon lastet ned 1500 ganger. Antall nedlastinger har økt med 8 % per måned det siste året, og vi antar at denne utviklingen vil fortsette.

a)

Sett opp et uttrykk som du kan bruke til å bestemme hvor mange ganger mobilapplikasjonen vil bli lastet ned i desember 2014.

Løsningsforslag a)

Utviklingen der antall nedlastninger øker med en viss prosentandel hvert år kan modelleres med en *eksponentialfunksjon*. I september ble applikasjonen lastet med $1\,500$ ganger, og dette tallet øker med $8\,\%$ hver måned fremover. Desember er 3 måneder etter september, så antall nedlastninger i desember har økt med $8\,\%$ tre ganger siden september. Derfor er antall nedlastninger i desember lik

$$1\,500 \cdot 1,08^3,$$

der vi har brukt at $1,08$ er *vekstfaktoren* når noe øker med $8\,\%$. Vi merker oss at antallet nedlastninger *ikke* har økt med $8\,\% \cdot 3 = 24\,\%$; da tar man ikke hensyn til “renters rente”.

Svar: $\underline{\underline{1\,500 \cdot 1,08^3}}$

b)

Sett opp et uttrykk som du kan bruke til å bestemme hvor mange ganger mobilapplikasjonen til sammen ble lastet ned i juli, august, september og oktober 2014.

Løsningsforslag b)

Vi vil finne den *eksponentielle* modellen $a \cdot v^x$, som sier hvor mange nedlastninger applikasjonen hadde x måneder etter september 2014. Her er a antall nedlastninger i september, og v er *vekstfaktoren*. Hvis vi vil finne ut hvor mange nedlastninger det var i månedene *før* september, kan vi sette inn *negative* x-verdier. Vi vet at antall nedlastninger i september var $1\,500$, og at vekstfaktoren er $1,08$, så den eksponentielle modellen vår er

$$1\,500 \cdot 1,08^x,$$

der x er antall måneder etter september. Månedene juli, august, september og oktober representeres her som henholdsvis $x = -2, -1, 0$ og 1. Derfor er antall nedlastninger i disse månedene henholdsvis

$$1\,500 \cdot 1,08^{-2}, 1\,500 \cdot 1,08^{-1}, 1\,500 \cdot 1,08^{0} \text{og } 1\,500 \cdot 1,08^{1}.$$

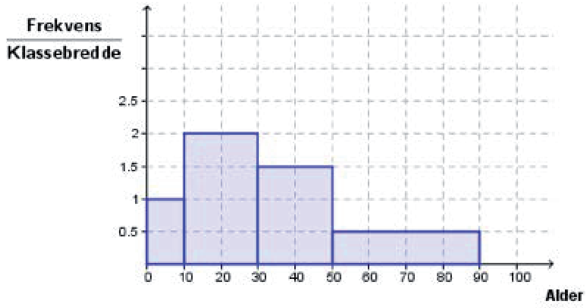
Vi skulle finne ut hvor mange ganger applikasjonen ble nedlastet i disse månedene til sammen, og det blir

$$\begin{aligned} & 1\,500 \cdot 1,08^{-2} + 1\,500 \cdot 1,08^{-1} + 1\,500 \cdot 1,08^{0} + 1\,500 \cdot 1,08^{1} \\ = \quad & 1\,500 \cdot \left(1,08^{-2} + 1,08^{-1} + 1,08^{0} + 1,08^{1}\right). \end{aligned}$$

(Dette taller er cirka $5\,795$.)

Svar: $1\,500 \cdot \left(1,08^{-2} + 1,08^{-1} + 1,08^{0} + 1,08^{1}\right)$ ganger

Oppgave 7 (4 poeng) Nettkode: E-4C20



Histogrammet ovenfor viser aldersfordelingen blant de besøkende på en kinoforestilling.

a)

Forklar at det var 30 besøkende mellom 30 og 50 år.

Løsningsforslag a)

Husk hva som skiller et histogram fra et søylediagram. Søylen som representerer antall besøkende mellom 30 og 50 år, er $1,5$ høy og $50-30=20$ bred. Arealet av søylen er antall besøkende mellom 30 og 50 år, altså $20 \cdot 1,5 = 30$.

Svar: Arealet av den relevante søylen er $20 \cdot 1,5 = 30$.

b)

Hvor mange prosent av de besøkende var mellom 0 og 10 år?

Løsningsforslag b)

Vi viser her den raskeste måten å løse oppgaven på - se på arealet av søylen tilhørende klassen 0 til 10 år, og det totale arealet. I alternativ løsning kan du se hvordan du kan løse oppgaven ved å regne ut antall besøkende totalt og hvor mange det var mellom 0 og 10 år.

Vi teller antall ruter det er i søylene, og ser på antall ruter i søylen for besøkende mellom 0 og 10 år i forhold til det totale antallet. Vi ser først at den første søylen, altså den tilhørende aldersgruppen 0 til 10 år, inneholder 2 ruter. De neste søylene inneholder henholdsvis 8, 6 og 4 ruter. Antall ruter til sammen er $2+8+6+4=20$, og siden 2 av disse rutene var fra aldersgruppen 0 til 10 år, var $\frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 10\ \%$ av de besøkende i denne gruppen, akkurat som før.

Grunnen til at vi kun trenger å se på antall ruter i hver søyle i stedet for arealet, er at vi er ute etter en prosentandel. Én rute tilsvarer $0,5 \cdot 10 = 5$ mennesker, så om vi multipliserer antall ruter i en søyle med 5, så får vi antall mennesker i denne aldersgruppen. For eksempel hadde den første søylen 2 ruter, så det var $2 \cdot 5 = 10$ besøkende i denne kategorien. Når vi ser på andelen av noe i forhold til noe annet, har det ikke noe å si om vi ser på de faktiske tallene, eller alle tallene dividert med 5.

ALTERNATIV LØSNING

Svar: $\underline{\underline{10\ \%}}$.

c)

Bestem gjennomsnittsalderen blant de besøkende.

Løsningsforslag c)

Vi jobber med gruppert materiale, og da antar vi at aldrene er uniformt/jevnt fordelt. Dette vil si at gjennomsnittsalderen i hver gruppe er i midten av aldersgruppen. For eksempel antar vi at gjennomsnittsalderen i aldesgruppen 50 til 90 år, er midt mellom 50 og 90, altså 70 år. Når vi beregner gjennomsnitt av alle de besøkende, er dette det samme som å anta at alle personene i en aldersgruppe er like gamle som gjennomsnittsalderen.

Som i deloppgave b), kan vi løse dette problemet på to måter. Den ene måten går ut på å bruke de faktiske besøkstallene, som for eksempel at det er 10 stykker som er mellom 0 og 10 år og så videre. I stedet gjør vi som vi viste sist i forrige oppgave: Vi later som om antallet mennesker i hver kategori, er lik antall ruter i søylen til den kategorien. Derfor antar vi at det var 2 besøkende mellom 0 og 10 år, 8 besøkende mellom 10 og 30 år og så videre. Siden vi jobber med gruppert materiale, antar vi også at alle de besøkende i aldersgruppen 0 til 10 år var 5 år, at alle i gruppen 10 til 30 var 20 år, og så videre. Med dette har vi derfor 2 besøkende på 5 år, 8 besøkende på 20 år, 6 besøkende på 40 år og 4 besøkende på 70 år. Gjennomsnittet av disse er

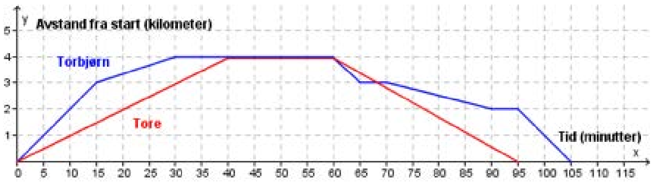
$$\frac{2\cdot5 \text{ år}+8\cdot20 \text{ år}+6\cdot40 \text{ år}+4\cdot70 \text{ år}}{2+8+6+4}$$
$$= \frac{10 \text{ år}+160 \text{ år}+240 \text{ år}+280 \text{ år}}{20} = \frac{690 \text{ år}}{20} = 34,5 \text{ år}.$$

Vi kunne også ha regnet ut dette med å bruke de faktiske tallene. Det ville sett slik ut.

$$\frac{10\cdot5 \text{ år}+40\cdot20 \text{ år}+30\cdot40 \text{ år}+20\cdot70 \text{ år}}{10+40+30+20}$$
$$= \frac{50 \text{ år}+800 \text{ år}+1\ 200 \text{ år}+1\ 400 \text{ år}}{100} = \frac{3\ 450 \text{ år}}{100} = 34,5 \text{ år}.$$

Svar: $\underline{\underline{34,5 \text{ år}}}$

Oppgave 8 (3 poeng) Nettkode: E-4C28



Torbjørn og Tore padler fra Flekkefjord til Torsøy. Der går de i land og tar en pause før de padler tilbake. Ovenfor ser du en forenklet grafisk framstilling av padleturen til Torbjørn (blå graf) og padleturen til Tore (rød graf).

a)

Hvem kommer først til Torsøy?

Hvor lenge er hver av de to guttene på Torsøy?

Løsningsforslag a)

Vi antar at guttene padler i retning rett mot Torsøy og deretter rett tilbake til Flekkefjord. Når de tar en pause på Torsøy, så er de på samme sted over en lengre periode, og grafen skal ikke gå opp eller ned. Dette ser vi skje der $y = 4$, og spørsmålet er hvem som kommer frem til der $y = 4$ først.

Ut i fra grafen ser vi at Flekkefjord er cirka 4 kilometer fra Torsøy. Vi er ute etter hvem som padler de 4 kilometerene først. Vi ser at grafen til Torbjørn kommer seg til $y = 4$ når $x = 30$, altså på 30 minutter, mens Tore bruker 40 minutter. Derfor kom Torbjørn fram først. Videre ser vi at begge grafene begynner å synke igjen der $x = 60$, så 60 minutter etter start begynner de å padle tilbake igjen. Derfor var Torbjørn på Torsøy i $60 - 30 = 30$ minutter, mens Tore var der i 20 minutter.

Svar: Torbjørn kom fram først, og var der i 30 minutter. Tore var der i 20 minutter.

b)

Hvor fort padler Tore på vei ut til Torsøy?

Løsningsforslag b)

Der grafen til Tore er en rett linje, betyr det at Tore padler i konstant fart. Tore padler til Torsøy på 40 minutter, og han holder konstant fart. Fra grafen ser vi at Torsøy er 4 kilometer fra Flekkefjord; dette ser vi fordi den lange pausen på Flekkefjord er der $y = 4$. Dermed vet vi at Tore padler 4 kilometer på 40 minutter. Det gir en fart på $\frac{4 \text{ km}}{40 \text{ min}}$. Vi vet at 40 minutter er to tredjedeler av en time, så vi kan skrive farten som

$$\frac{4 \text{ km}}{40 \text{ min}} = \frac{4 \text{ km}}{\frac{2}{3}\text{time}} = 4 \cdot \frac{3}{2} \frac{\text{km}}{\text{time}} = 6 \text{ km/t}$$

Svar: 6 km/t.

c)

Hva kan du si om hjemturen ut fra grafene ovenfor?

Løsningsforslag c)

Svar: Hjemveien begynner der $x = 60$. Tores graf er en rett linje herfra, så han padler med jevn fart. Torbjørns graf begynner først å avta fortere enn Tores, og det betyr at han starter med høyere fart enn Tore. Etter det står grafen hans stille, så han hviler litt, før han begynner å padle litt sakte igjen. Etter en stund hviler han nok en gang, før han til slutt padler fort med en brått synkende graf. Kanskje var Torbjørn sliten etter å ha padlet fort til Torsøy, og klarte ikke å holde samme fart på tilbakeveien, så han måtte ta det litt roligere en stund. Han kom tilbake 10 minutter etter Tore.

Oppgave 9 (5 poeng) Nettkode: E-4C2D

Antall mål per kamp	Frekvens
0	2
1	6
2	3
3	4
4	1

Oda spiller ishockey. Tabellen ovenfor viser hvor mange mål hun skåret per kamp i løpet av forrige sesong.

a)

Bestem gjennomsnittet og medianen.

Løsningsforslag a)

Husk at *gjennomsnittet* er forholdet mellom antall mål og antall kamper, mens *medianen* er et midterste tallet hvis man setter opp alle scoringene i stigende rekkefølge. Vi starter med å finne hvor mange mål Oda skåret gjennomsnittlig per kamp. Da må vi finne ut to ting: Hvor mange mål Oda skåret totalt, og hvor mange kamper hun spilte. Gjennomsnittet er forholdet mellom disse to. I øverste rad i tabellen står det 0 under antall mål og 2 under frekvens; dette betyr at Oda skåret 0 mål i 2 av kampene sine. I de neste radene står det at hun skåret 1 mål i 6 av kampene, 2 mål i 3 av kampene, og så videre. Summerer vi opp alle tallene på høyre side, får vi derfor antall kamper Oda spilte:

$$\text{antall kamper} = 2 + 6 + 3 + 4 + 1 = 16.$$

Antall mål Oda har skåret totalt i alle kampene, får vi ved å multiplisere tallene i venstre kolonne med tallene i høyre. For eksempel skåret hun 1 mål i 6 av kampene, som gir 6 mål; videre skåret hun 2 mål i 3 av kampene, som gir $2 \cdot 3 = 6$ mål, og så videre. Antall mål totalt blir dermed

$$\begin{aligned}\text{totalt antall mål} &= 0 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \\ &= 0 + 6 + 6 + 12 + 4 = 28.\end{aligned}$$

Nå har vi funnet ut at Oda har skåret 28 mål på 16 kamper; gjennomsnittet er derfor

$$\frac{28}{16}$$

mål per kamp. Denne brøken kan vi forkorte. Vi primtallsfaktoriserer og får

$$\frac{28}{16} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1,75,$$

så gjennomsnittet er $\frac{7}{4} = 1,75$ mål per kamp.

Nå skal vi finne medianen. Den kan vi faktisk finne veldig fort ved å se at Oda skåret 1 eller færre mål i 8 av kampene, og 2 eller flere mål i de resterende 8 kampene. Det betyr at medianen er gjennomsnittet av 1 og 2, altså $\frac{1+2}{2} = 1,5$. Vi kan også se dette ved å skrive opp antall mål Oda skåret i kampene i stigende rekkefølge. Som over vet vi at hun skåret 0 mål i 2 av kampene, 1 mål i 6 av kampene og så videre, så listen vår ser slik ut:

$$0 - 0 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 2 - 2 - 2 - 3 - 3 - 3 - 3 - 4$$

Vi vil finne det miderste tallet i denne listen, eller eventuelt gjennomsnittet av de to midterste. Listen kan deles i to mellom 1 og 2:

$$0 - 0 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 \mid 2 - 2 - 2 - 3 - 3 - 3 - 3 - 4$$

Nå ser vi at medianen må bli gjennomsnittet av 1 og 2, altså $1,5$.

Svar: Gjennomsnittet er $1,75$, og medianen er $1,5$.

b)

Bestem den kumulative frekvensen for to mål per kamp.

Løsningsforslag b)

Den *kumulative frekvensen* for to mål per kamp, er antall kamper Oda skåret to eller færre mål. Vi vil finne antall kamper Oda skåret to eller færre mål i. Oda skåret 0 mål i 2 kamper, 1 mål i 6 kamper og 2 mål i 3 kamper. Da blir den kumulative frekvensen lik $2 + 6 + 3 = 11$.

Svar: 11

c)

Bestem den relative frekvensen for tre mål per kamp.

Løsningsforslag c)

Den *relative frekvensen* for tre mål per kamp, er andelen av kampene Oda skåret tre mål. Fra tabellen vet vi at Oda skåret tre mål i 4 kamper, og at hun spilte 16 kamper totalt. Derfor er den relative frekvensen for tre mål per kamp lik

$$\frac{\text{antall ganger Oda skåret tre mål per kamp}}{\text{antall kamper Oda spilte}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 25\,\%$$

Svar: $\frac{1}{4}$ eller $25\,\%$

d)

Forklar hva svarene i b) og c) forteller om antall mål Oda skåret denne sesongen.

Løsningsforslag d)

Den kumulative frekvensen for to mål per kamp var 11. Det betyr at i 11 av 16 kamper, altså de fleste kampene, så skåret Oda to mål eller færre. Den relative frekvensen for tre mål per kamp var $25\ \%$, og det betyr at Oda skåret tre mål i $25\ \%$ av kampene.

Svar: Oda skåret to mål eller færre i 11 av de 16 kampene, og i $25\ \%$ av kampene skåret hun 3 mål.

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng) Nettkode: E-4C2J

I kroppsøvingstimen kastet Svein spyd seks ganger. Nedenfor ser du hvor langt han kastet i hvert av de seks kastene.

23,5 m   26,1 m   18,4 m   22,8 m   25,1 m   20,3 m

a)

Bestem gjennomsnittet og standardavviket.

Løsningsforslag a)

Gjennomsnittet er forholdet mellom hvor langt Svein kastet spyd totalt, og antall ganger han kastet. Standardavviket er et mål på hvor forskjellige kastene var fra gjennomsnittet.

Svein kastet spyd seks ganger med de oppgitte lengdene. Gjennomsnittet av kastene er

$$\frac{23,5\text{ m} + 26,1\text{ m} + 18,4\text{ m} + 22,8\text{ m} + 25,1\text{ m} + 20,3\text{ m}}{6} = \frac{136,2\text{ m}}{6} = 22,7\text{ m}.$$

Vi kan også gjøre dette i et regneark, og da er det lettere å finne standardavviket. Det første vi gjør er å legge inn kastelengdene.

	A	B	C
1	Kastelengde	Gjennomsnitt	Standardavvik
2	23,5	22,7	2,652671609
3	26,1		
4	18,4		
5	22,8		
6	25,1		
7	20,3		

Her har vi lagt verdiene i rute A2 til rute A7 . For å regne ut gjennomsnittet av dette, skriver vi i rute 2B

```
=GJENNOMSNITT(A2:A7)
```

Standardavviket er like enkelt, og i 2C skriver vi

```
=STDAV.P(A2:A7)
```

Resultatet ligger i bildet over. Dermed har vi funnet ut at Svein kastet i gjennomsnitt $22,7\text{ m}$ med et standardavvik på cirka $2,65\text{ m}$. Vi bruker STDAV.P fordi vi vil regne ut standardavviket for hele datasettet. Hvis vi hadde brukt STDAV , ville vi fått estimerte verdier basert på utvalg.

Svar: Gjennomsnittet er $22,7\text{ m}$, og standardavviket er cirka $2,65\text{ m}$.

b)
Kjell kastet også spyd seks ganger. Standardavviket for kastene til Kjell var 3,2 m.

Hva kan du ut fra dette si om kastene til Kjell sammenliknet med kastene til Svein?

Løsningsforslag b)

Svar: *Standardavviket* til Svein var cirka $2,65\ \mathrm{m}$, mens standardavviket til Kjell var $3,2\ \mathrm{m}$. Standardavviket sier noe om hvor langt unna gjennomsnittet kastene er, eller med andre ord, hvor mye kastene varierer i lengde. Større standardavvik betyr større variasjon i kastelengdene. Kjell har størst standardavvik, så Kjell kaster mindre jevnt enn Svein. Vi merker oss at dette ikke betyr at Kjell kaster kortere eller lengre enn Svein.

Oppgave 2 (5 poeng) Nettkode: E-4C2M

En tankbil med gift har vært innblandet i en ulykke. Noe av giften har havnet i en innsjø. Innsjøen brukes som drikkevannskilde.

Giftkonsentrasjonen $f(x)$ mg/L i drikkevannet x døgn etter ulykken er gitt ved

$f(x) = 1{,}42 \cdot 0{,}87^x$

a)
Bestem giftkonsentrasjonen i drikkevannet rett etter ulykken.

Hvor mange prosent avtar giftkonsentrasjonen i drikkevannet per døgn?

Løsningsforslag a)

Ulykken skjer der $x = 0$. Derfor får vi giftkonsentrasjonen rett etter ulykken ved å sette inn $x = 0$ i uttrykket for $f(x)$ – med andre ord regner vi ut $f(0)$. Vi får

$$f(0) = 1,42 \cdot 0,87^0 = 1,42 \cdot 1 = 1,42.$$

Dermed var giftkonsentrasjonen $1,42\ \mathrm{mg/L}$ rett etter ulykken.

Videre ser vi at uttrykket $1,42 \cdot 0,87^x$ er en potensuttrykk med *vekstfaktor* $0,87$. Det betyr at når x øker med 1, så reduseres $f(x)$ til $87\ \%$. Det er en reduksjon på $100\ \% - 87\ \% = 13\ \%$, så hvert døgn avtar giftkonsentrasjonen med $13\ \%$.

Svar: Giftkonsentrasjonen rett etter ulykken var $1,42\ \mathrm{mg/L}$, og den avtar $0{,}13\ \mathrm{mg/L}$ per døgn.

b)

Hvor mye avtok giftkonsentrasjonen i drikkevannet i gjennomsnitt per døgn den første uken etter ulykken?

Løsningsforslag b)

Giftkonsentrasjonen rett etter ulykken er $f(0)\ \mathrm{mg/L}$, og etter en uke er den $f(7)\ \mathrm{mg/L}$. Vi vet allerede hva $f(0)$ er fra forrige oppgave. Vi regner ut $f(7)$:

$$f(7) = 1,42 \cdot 0,87^7 \approx 0,54.$$

Dermed har giftkonsentrasjonen avtatt fra $1,42\ \mathrm{mg/L}$ til $0,54\ \mathrm{mg/L}$, som er en negativ endring på

$$1,42\ \mathrm{mg/L} - 0,54\ \mathrm{mg/L} = 0,88\ \mathrm{mg/L}.$$

Denne endringen skjer over 7 dager. Giftkonsentrasjonen avtar derfor i gjennomsnitt

$$\frac{0,88\ \mathrm{mg/L}}{7} \approx 0,13\ \mathrm{mg/L}$$

per døgn den første uken.

Svar: Cirka $1,13\ \mathrm{mg/L}$ per døgn.

c)
Når giftkonsentrasjonen kommer under 0,40 mg/L, er det ikke lenger farlig å drikke vannet.

Hvor mange døgn tar det før vannet igjen kan drikkes?

Løsningsforslag c)

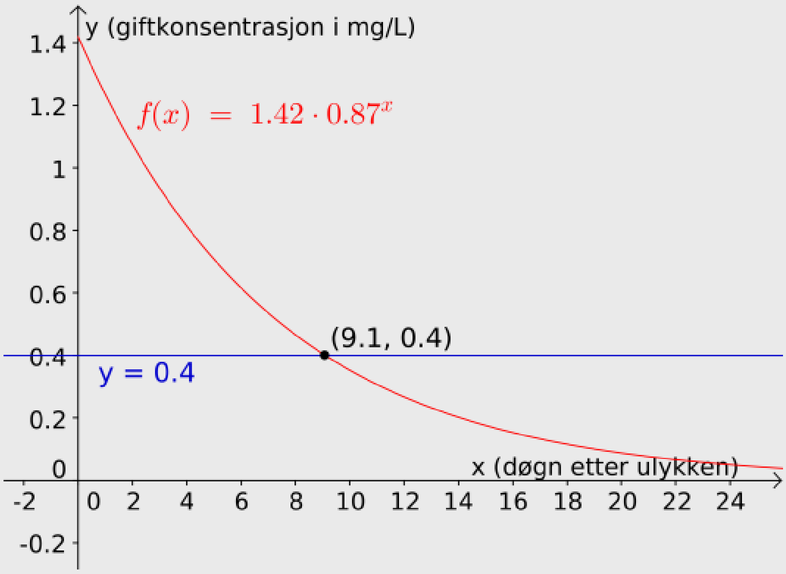
Vi velger å løse likningen $f(x) = 0,4$ grafisk i *GeoGebra*. Det gjør vi ved å finne *skjæringspunktet* mellom *funksjonen* f og linjen $y = 0,4$. Vi lager disse funksjonene ved å skrive

```
f(x) = 1.42*0.87^x
```

og

```
y = 0.4
```

i "Skriv inn"-vinduet i GeoGebra. Deretter tilpasser vi aksene slik at vi ser skjæringspunktet. Vi bruker verktøyet "Skjæring mellom to objekt" og får at koordinatene er $(9.1, 0.4)$, som vist under.



Det betyr at $f(9.1) = 0,4$, altså at det etter cirka 9 døgn er $0,4\,\mathrm{mg/L}$ gift i drikkevannet. Dermed kan vannet drikkes igjen etter litt over 9 døgn.

Svar: Vannet kan drikkes etter $9,1$ døgn.

Oppgave 3 (4 poeng) Nettkode: E-4C2Q

Da Mads og Malin ble konfirmert, opprettet de hver sin konto i banken. Begge satte inn 25 000 kroner. Renten er 2,25 % per år.

a)

Hvor mye vil Mads ha på kontoen 10 år etter konfirmasjonen dersom han lar pengene stå urørt?

Hvor mange prosent har beløpet på kontoen hans til sammen økt i denne perioden?

Løsningsforslag a)

Etter ett år har Mads $25\,000 \cdot 1,0225\ \mathrm{kr}$ på kontoen sin. Etter to år har han $25\,000 \cdot 1,0225 \cdot 1,0225\ \mathrm{kr}$ på kontoen sin, og så videre. Etter 10 ti år har Mads dermed

$$25\,000 \cdot 1,0225^{10}\ \mathrm{kr} \approx 31\,230,09\ \mathrm{kr}.$$

på kontoen sin. Dette gir en total *vekstfaktor* (over de ti årene) på $1,0225^{10} \approx 1,25$, og det betyr at beløpet har økt med cirka $25\ \%$. Vi kan også se dette ved å finne ut hvor mange prosent $31\,230,09$ er av $25\,000$. Det finner vi ved å se på forholdet deres. Vi ser at

$$\frac{31\,230,09}{25\,000} \approx 1,25 = 125\ \%,$$

så beløpet har økt med cirka $25\ \%$, akkurat som før.

Svar: Etter 10 år vil beløpet være $31\,230,09\ \mathrm{kr}$, som er en økning på cirka $25\ \%$.

b)

Malin lar pengene stå urørt i 5 år. Så setter hun inn 25 000 kroner til på kontoen sin.

Hvor mye vil Malin ha på kontoen 10 år etter konfirmasjonen?

Løsningsforslag b)

Ved tilsvarende argumenter som i forrige oppgave, vet vi at Malin etter 5 år har $25\,000 \cdot 1{,}0225^5\ \mathrm{kr} \approx 27\,941,94\ \mathrm{kr}$i banken. Så setter hun inn $25\,000\ \mathrm{kr}$ til, som gir en total på

$$27\,941,94\ \mathrm{kr} + 25\,000\ \mathrm{kr} = 52\,941,94\ \mathrm{kr}.$$

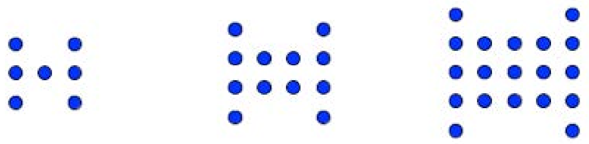
Disse pengene samler renter i 5 år til. Etter dette er det

$$52\,941,94 \cdot 1,0225^5\ \mathrm{kr} \approx 59\,172,03\ \mathrm{kr}$$

på kontoen.

Svar: Cirka $59\,172,03\ \mathrm{kr}$.

Oppgave 4 (4 poeng) Nettkode: E-4C2U



F_1 F_2 F_3

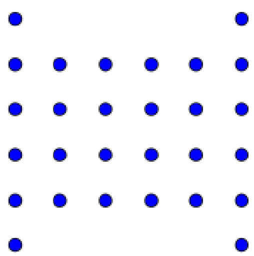
Ole lager figurer av runde perler. Ovenfor ser du tre figurer F_1, F_2 og F_3 .

a)
Følg samme mønster, og tegn figuren F_4 .

Løsningsforslag a)

Figuren F_1 består av én perle i midten, med to kolonner av tre perler på hver side. Neste figur består av fire perler i et kvadrat i midten, altså et kvadrat med sidelengde to, med to kolonner med fire perler på hver side. Helt tilsvarende består F_3 av et kvadrat med sidelengde tre i midten, og to kolonner med lengde fem på hver side. Kvadratet i midten øker med én i sidelengde for hver figur, og kolonnene øker med én i høyde. Derfor skal det være et kvadrat med sidelengde fire i F_4, og på sidene skal det være to kolonner med lengde seks. Det vil se ut som under.

Svar:



b)
Sett opp en modell som viser hvor mange perler det vil være i figur F_n uttrykt ved n.

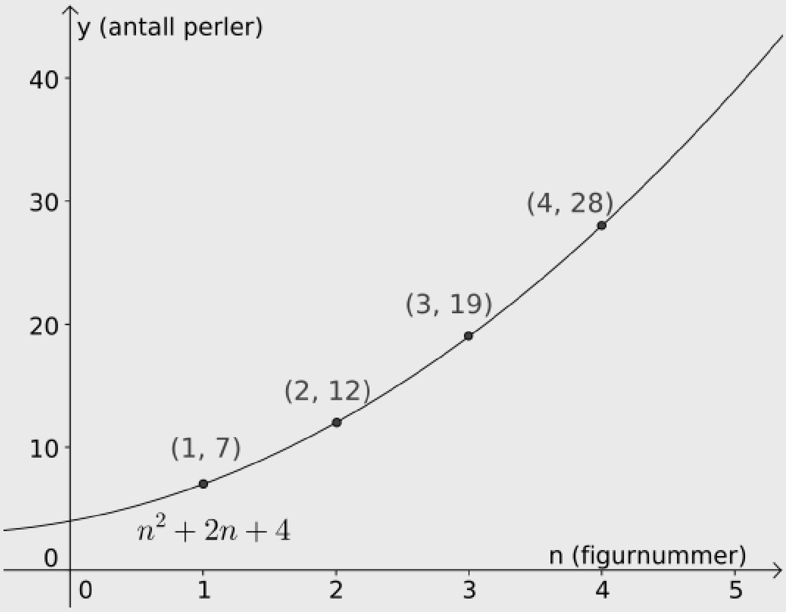
Løsningsforslag b)

Vi kan løse denne oppgaven på flere måter. For en matematisk forståelse for problemet, se alternativ løsning. Her løser vi ved å bruke *regresjon* i *GeoGebra*.

Vi vet allerede hvor mange perler de fire første figurene inneholder; dette kan vi legge inn som en liste med punkter i GeoGebra. Videre skal vi finne en passende funksjon. Måten figurene er bygget opp på indikerer at antall perler vokser som et polynom av grad 2. Dette kan vi se ved å se at hvis hver figur F_n bestod av et kvadrat med n perler i hver side, så er antall perler n^2, altså et andregradspolynom. Derfor skriver vi

```
RegPoly[Liste1, 2]
```

i "Skriv inn"-vinduet. Resultatet er vist under.



Dermed ser vi at $n^2 + 2n + 4$ er en god modell for antall perler.

ALTERNATIV LØSNING

Svar: Antall perler i figur F_n er $\underline{\underline{n^2 + 2n + 4}}$.

c)
Bruk modellen til å bestemme hvor mange perler det vil være i figuren F_{50} .

Løsningsforslag c)

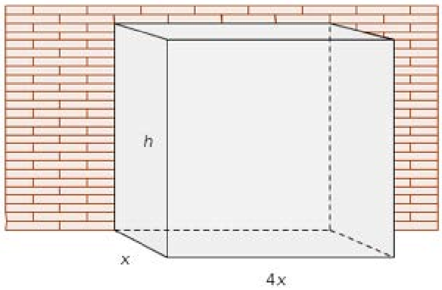
I figur F_n er det $n^2 + 2n + 4$ perler. I figur F_{50} er det derfor

$$50^2 + 2 \cdot 50 + 4 = 2\,500 + 100 + 4 = 2\,604$$

perler.

Svar: $\underline{\underline{2\,604 \text{ perler}}}$

Oppgave 5 (4 poeng) Nettkode: E-4C2Z



Du skal lage et fuglebur av hønsenetting. Buret skal ha form som et rett, firkantet prisme. Buret skal bygges langs en mur slik at muren utgjør den ene veggen. Buret skal stå på bakken og trenger ikke bunn.

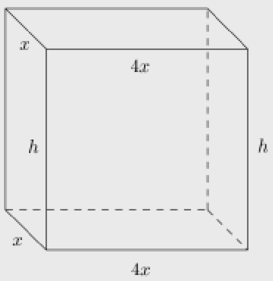
Sett bredden av buret lik x meter og høyden lik h meter. Buret skal være fire ganger så langt som det er bredt. Se skissen ovenfor.

a)
Vis at overflaten $O(x)$ m^2 som skal lages av hønsenetting, er gitt ved

$O(x) = 4x^2 + 6hx$

Løsningsforslag a)

Dimensjonene av figuren er vist under.



Taket av buret er et rektangel med sidelengder x og $4x$. Arealet av taket er derfor $4x \cdot x = 4x^2$. Fronten av buret er et rektangel med sidelengder $4x$ og h, og har dermed areal $4x \cdot h$. De to sideflatene er rektangler med sidelengder x og h, og hver av dem har derfor areal $x \cdot h$. Det totale overflatearealet til den delen av buret som skal lages av hønsenetting, er derfor

$$4x^2 + 4x \cdot h + x \cdot h + x \cdot h = 4x^2 + 6hx.$$

Svar: $O(x) = 4x^2 + 4x \cdot h + x \cdot h + x \cdot h = 4x^2 + 6hx$.

b)

Du skal bruke 40 m^2 hønsenetting.

Vis at høyden h meter av buret da er gitt ved

$h = \frac{40-4x^2}{6x}$

Løsningsforslag b)

Overflatearealet til den delen av buret som skal lages av hønsenetting, er $O(x) = 4x^2 + 6hx$ og vi skal bruke nøyaktig 40 m^2 hønsenetting. Nå har vi to uttrykk som bestemmer det samme tallet, og da må de uttrykkene være de samme. Derfor har vi at $4x^2 + 6hx = 40$.

Vi vil finne den verdien for h som passer inn i likningen $4x^2 + 6hx = 40$. Det er to ukjente i likningen, både x og h; siden vi er ute etter å finne h uttrykt ved hjelp av x, så bare antar vi at x er et vanlig tall og at vi skal løse dette som en førstegradslikning (*lineær likning*). Som vanlig i likninger, starter vi med å "flytte" alt med den ukjente h-en i seg på én side av likhetstegnet. Det gjør vi ved å subtrahere $4x^2$ på begge sider av likhetstegnet.

$$\begin{aligned} 4x^2 + 6hx - 4x^2 &= 40 - 4x^2, \\ 6hx &= 40 - 4x^2. \end{aligned}$$

Nå vil vi ha h helt alene på venstre side. Det gjør vi ved å dividere med $6x$ på begge sider og forkorte.

$$\begin{aligned} \frac{6hx}{6x} &= \frac{40-4x^2}{6x}, \\ h &= \frac{40-4x^2}{6x}. \end{aligned}$$

Vi merker oss at for å kunne dividere med $6x$, så må vi ha at $x \neq 0$. Uttrykket over er akkurat det vi ville vise.

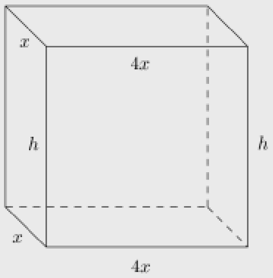
Svar: Hvis vi løser ligningen $4x^2 + 6hx = 40$ for h, så får vi at $h = \frac{40-4x^2}{6x}$.

c)

Hvordan må du lage buret for at volumet skal bli størst mulig?

Løsningsforslag c)

Buret har form som et rett *prisme*. *Volumet* til et rett prismet er grunnflaten multiplisert med høyden. Fra tegningen under ser vi at grunnflaten har areal $x \cdot 4x = 4x^2$.



Dermed er volumet til buret lik $V = 4x^2 \cdot h$. Dette er det vanskelig å lage en graf ut av, siden uttrykket avhenger av både x og h. Heldigvis fant vi i forrige oppgave at $h = \frac{40-4x^2}{6x}$; derfor er volumet V av buret gitt ved

$$V\left(x\right) = 4x^2 \cdot \frac{40 - 4x^2}{6x}.$$

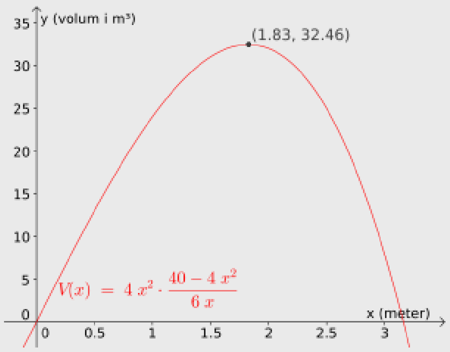
Her ser vi at volumet bare avhenger av tallet x. Nå kan vi tegne grafen i *GeoGebra*. Vi skriver det følgende i "Skriv inn"-vinduet.

```
V(x) = 4*x^2*(40 - 4*x^2)/(6x)
```

Vi drar til aksene slik at vi ser den interessante delen av *grafen*. Vi er bare interesserte i verdier for x som gir et positivt volum for buret, og bare positive x-verdier. Den x-verdien som gir størst volum til buret, er x-verdien til *toppunktet* til grafen. Dette punktet finner vi ved å skrive

```
Ekstremalpunkt[V, 0, 3]
```

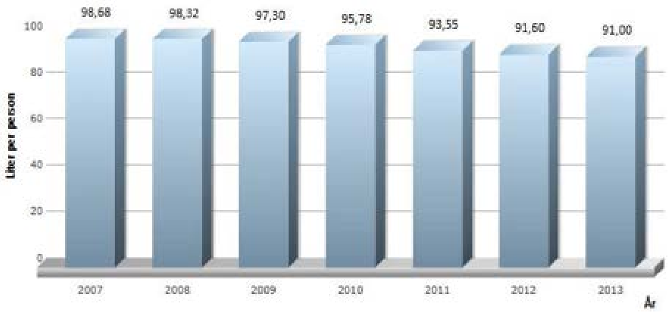
i "Skriv inn"-vinduet. Vi velger grensene $x = 0$ og $x = 3$ fordi vi ser at toppunktet ligger mellom disse x-verdiene. Vi får dermed toppunktet $(1.83, 32.46)$ som vist under.



Dette betyr at når $x = 1,83\ \mathrm{m}$, så er volumet av buret lik $32,46\ \mathrm{m}^3$, og dette er det største mulige volumet. Fra forrige oppgave får vi at høyden av buret må være $h = \frac{40-4\cdot 1,83^2}{6\cdot 1,83}\ \mathrm{m} \approx 2,42\ \mathrm{m}$.

Svar: Buret får størst volum når $x = 1,83\ \mathrm{m}$ og $h = 2,42\ \mathrm{m}$; da er volumet $32,46\ \mathrm{m}^3$.

Oppgave 6 (8 poeng) Nettkode: E-4C45



Diagrammet ovenfor viser hvor mange liter melk hver person i Norge drakk i gjennomsnitt hvert år i perioden 2007-2013.

Sett $x = 0$ i 2007, $x = 1$ i 2008 og så videre.

a)
Bruk opplysningene i diagrammet til å bestemme

- en lineær funksjon som viser hvordan forbruket av melk har endret seg i denne perioden

- en andregradsfunksjon som viser hvordan forbruket av melk har endret seg i denne perioden

Løsningsforslag a)

Vi skal finne funksjonsuttrykkene ved hjelp av *GeoGebra*. Det første vi gjør er å legge inn all informasjonen vi har i et *regneark* i GeoGebra. Vi trykker derfor på "Regneark" i "Vis"-menyen. Vi skal sette $x = 0$ i 2007, $x = 1$ i 2008 og så videre. Vi skriver x-verdier opp til 6 i én kolonne, og antall liter melk i den andre.

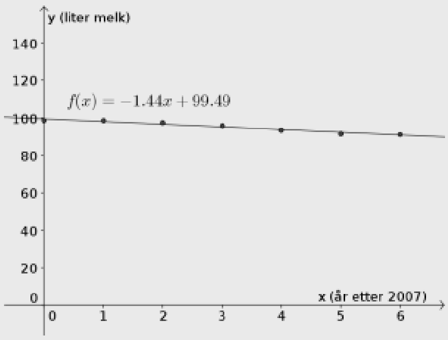
Regneark

	A	B
1	0	98.68
2	1	98.32
3	2	97.3
4	3	95.78
5	4	93.55
6	5	91.6
7	6	91

Deretter lager vi en liste med punkter ut i fra tabellen. Det gjør vi ved å markere tabellen, høyreklikke, og velge "Liste med punkt" i "Lag"-menyen. Listen blir hetende **Liste1**. Vi er først bedt om å lage en lineær funksjon som passer med dataene. Det gjør vi ved å skrive

```
f(x) = RegLin[Liste1]
```

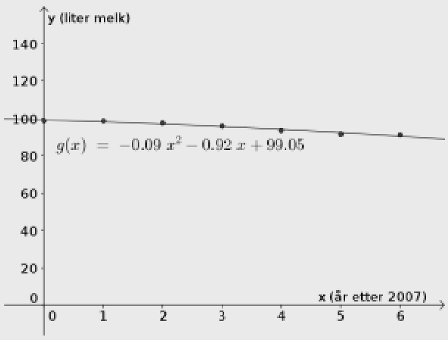
i "Skriv inn"-menyen. Vi høyreklikker på den resulterende funksjonen og klikker "Likning $y = ax + b$" for å få funksjonsuttrykket på en mer kjent form.



Det er det samme når vi skal finne andregradsfunksjonen, bare at vi skriver

```
f(x) = RegPoly[Liste1, 2]
```

i stedet.



Svar: Den lineære funksjonen er $f(x) = -1,44x + 99,49$, mens andregradsfunksjonen er $g(x) = -0,09x^2 - 0,92x + 99,05$.

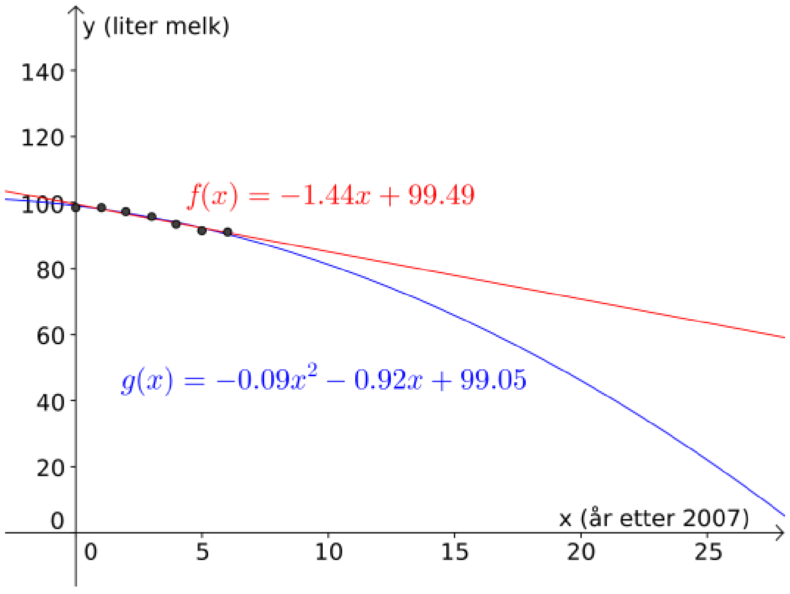
b)

Tegn grafene til funksjonene du fant i oppgave a) i et koordinatsystem for $0 \leq x \leq 25$.

Løsningsforslag b)

Det eneste vi gjør er å justere aksene i filen fra deloppgave a). Vi husker å gi passende navn og enheter til aksene. Resultatet er vist under.

Svar:

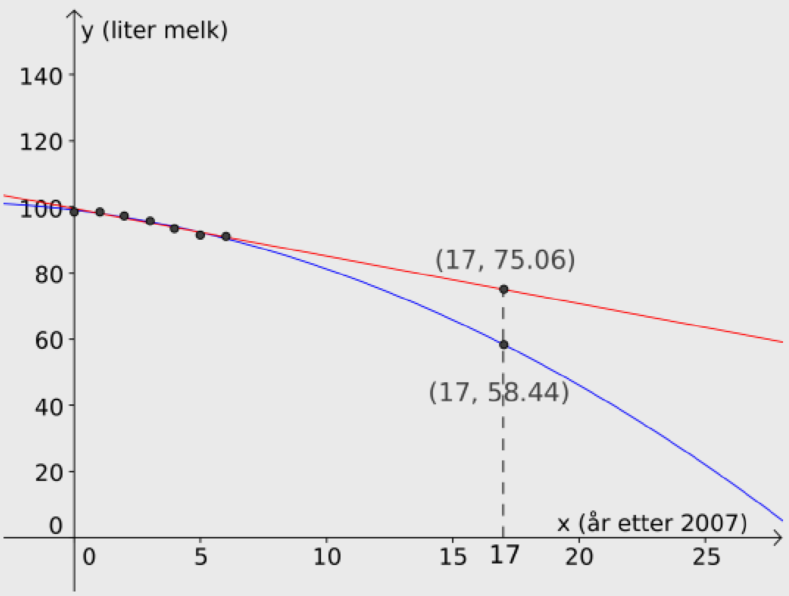


c)

Hvor mange liter melk vil hver person i Norge i gjennomsnitt drikke hvert år om ti år ifølge hver av de to funksjonene?

Løsningsforslag c)

Vi kalte den *lineære* modellen vår for f, og andregradsmodellen for g. Vi vil finne ut hvor mange liter melk nordmenn drikker i *gjennomsnitt* i 2024 i følge de to modellene, altså $f(17)$ og $g(17)$. Dette kan vi skrive direkte inn i *GeoGebra*.



Her ser vi at antall liter er $75,06$ i følge den lineære modellen, og $58,44$ i følge andregradsmodellen.

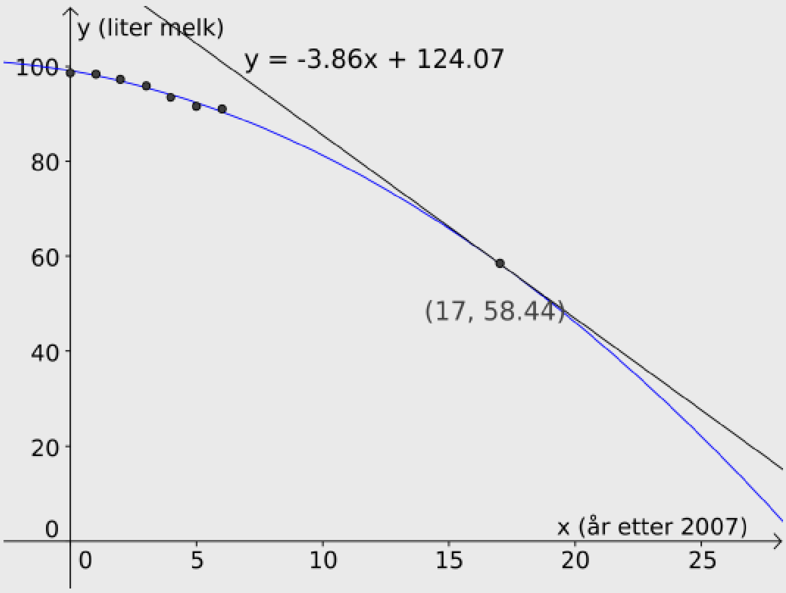
Svar: $75,06$ L i følge den lineære modellen, og $58,44$ L i følge andregradsmodellen.

d)
Hvor mange liter vil forbruket per person avta med per år om ti år ifølge hver av de to funksjonene?

Løsningsforslag d)

I den *lineære* modellen avtar forbruket like mye per år, nemlig *stigningstallet* til linjen. Vi kan se fra tidligere oppgaver at stigningstallet er $-1,44$, så i følge den lineære modellen vil forbruket avta med $1,44\,\mathrm{L}$ per år.

For andregradsfunksjonen må vi finne *tangentlinjen* gjennom punktet $(17, g(17))$ på *grafen*. Det gjør vi fordi stigningstallet til tangenten er den *momentane vekstfarten* til funksjonen. Vi bruker "Tangenter"-verktøyet, og velger andregradsfunksjonen og punktet $(17, g(17))$.



Stigningstallet til linjen er $-3,86$, så i følge denne modellen vil forbruket avta med $3,86\,\mathrm{L}$ per år i 2017.

Svar: I følge den lineære modellen vil forbruket avta med $1,44\,\mathrm{L}$ per år i 2017. I følge andregradsmodellen vil det avta med $3,86\,\mathrm{L}$.

Oppgave 7 (8 poeng) Nettkode: E-4C6W

I displayet på en tredemølle kan farten justeres mellom 0 km/h og 20 km/h. Det er mistanke om at båndet på tredemøllen går for fort i forhold til farten som angis i displayet (angitt fart). En gruppe 2P-elever får i oppgave å undersøke dette.

Elevene måler at løpebåndet på tredemøllen er 3,25 meter langt. Når båndet har gått én runde, har man altså løpt 3,25 meter. For å undersøke sammenhengen mellom angitt fart og reell fart teller elevene antall runder båndet går i løpet av ett minutt ved ulike fartsangivelser.

Angitt fart x **km/h**	**Antall runder i løpet av ett minutt**	**Reell fart** $f(x)$ **km/h**
$2,5$	18	$3,51$
$5,0$	35	
$10,0$	65	
$15,0$	95	
$20,0$	124	

a)
Skriv av tabellen ovenfor i besvarelsen din, gjør beregninger, og fyll inn verdiene for reell fart i kolonnen til høyre.

Løsningsforslag a)

Det første vi gjør er å skrive av den oppgitte tabellen.

Angitt fart x **km/h**	**Antall runder i løpet av ett minutt**	**Reell fart** $f(x)$ **km/h**
$2,5$	18	$3,51$
$5,0$	35	
$10,0$	65	
$15,0$	95	
$20,0$	124	

I kolonnen til høyre skal vi skrive hvor fort båndet går, når antall runder per minutt står i kolonnen i midten. Vi viser to måter å gjøre dette på. De to måtene er essensielt like, men den første metoden sier litt mer om hvorfor utregningene er som de er, og den andre er raskere. Vi kan spare en del tid ved å bruke proposjonale størrelser, og denne metoden viser vi senere.

I den andre raden står det at båndet går 35 runder på et minutt. Hver runde er $3,25\ \mathrm{m}$, så 35 runder tilsvarer

$$3,25\ \mathrm{m} \cdot 35 = 113,75\ \mathrm{m}.$$

Dette gir en fart på $113,75\ \mathrm{m}$ per minutt. Vi skal omregne dette til kilometer per time. Før det første er $113,75\ \mathrm{m} = 0,11375\ \mathrm{km}$, fordi det er $1\,000$ meter i én kilometer. For det andre er ett minutt lik $\frac{1}{60}$ time. Derfor har vi

$$\frac{113{,}75 \text{ m}}{1 \text{ min}} = \frac{0{,}11375 \text{ km}}{\frac{1}{60}\text{time}} = 60 \cdot 0{,}11375 \text{ km/t} \approx 6{,}83 \text{ km/t}$$

Derfor fyller vi inn $6,83$ på riktig plass i tabellen.

Angitt fart x **km/h**	**Antall runder i løpet av ett minutt**	**Reell fart** $f(x)$ **km/h**
$2,5$	18	$3{,}51$
$5,0$	35	$6{,}83$
$10,0$	65	
$15,0$	95	
$20,0$	124	

Dette skal vi gjøre for de andre radene også. Det kan ta litt tid å gjøre disse utregningene om og om igjen, men det trenger vi ikke. Det som tar mest tid er å regne om fra meter per minutt til kilometer per time. For å konvertere, multipliserte vi først antall meter med 10^{-3} for å få antall kilometer, og deretter dividerte vi antall minutter med 60 for å få antall timer. Fordi brøken $\frac{1}{60}$ var i telleren, "flyttet" vi 60 opp. Sluttresultatet er at vi multipliserte den opprinnelige farten med $60 \cdot 10^{-3}$, og på denne måten kan vi konvertere all fart på formen m/min til km/t. For eksempel er 400 m/min lik $400 \cdot 60 \cdot 10^{-3} = 24 \text{ km/t}$.

Nå kan vi fortsette med tabellen vår. I den tredje raden står det 65 runder per minutt. Siden hver runde er $3,25$meter langt, er 65 runder $65 \cdot 3,25 = 211,25$ meter. Det gir en fart på $211,25$ meter per minutt, og av diskusjonen over vet vi at $211,25$ meter per minutt er

$$211,25 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \approx 12,68$$

kilometer per time. Derfor fyller vi inn $12,68$ i tredje rad.

Angitt fart x **km/h**	**Antall runder i løpet av ett minutt**	**Reell fart** $f(x)$ **km/h**
$2,5$	18	$3{,}51$
$5,0$	35	$6{,}83$
$10,0$	65	$12,68$
$15,0$	95	
$20,0$	124	

På tilsvarende måte regner vi ut at 95 runder per minutt gir

$$95 \cdot 3,25 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \text{ km/t} \approx 18,53 \text{ km/t},$$

og 124 runder per minutt gir

$$124 \cdot 3,25 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \text{ km/t} \approx 24,18 \text{ km/t}.$$

Dette fyller vi inn i tabellen i henholdsvis fjerde og femte rad.

Angitt fart x **km/h**	**Antall runder i løpet av ett minutt**	**Reell fart** $f(x)$ **km/h**
$2,5$	18	$3{,}51$
$5,0$	35	$6{,}83$
$10,0$	65	$12,68$
$15,0$	95	$18,53$
$20,0$	124	$24,18$

Vi kan også løse problemet ved å se at antall runder per minutt og reell fart er proposjonale størrelser. Det betyr at

$$\frac{\text{reell fart}}{\text{runder per minutt}} = k$$

der k er en konstant. Dette betyr at

$$\text{reell fart} = k \cdot (\text{runder per minutt}).$$

I tabellen ser vi at 18 runder per minutt gir $3,51 \text{ km/t}$ i reell fart, så konstanten k er

$$k = \frac{3,51}{18} = 0,195.$$

Det betyr at n antall runder per minutt tilsvarer farten $n \cdot 0,195 \text{ km/t}$. For eksempel gir 10 runder per minutt $10 \cdot 0,195 \text{ km/t} = 1,95 \text{ km/t}$. Ut i fra dette finner vi tallene som skal inn i tabellen.

$$\begin{gathered}
\text{Reell fart med 35 runder per minutt} = 35 \cdot 0,195 \approx 6,83 \\
\text{Reell fart med 65 runder per minutt} = 65 \cdot 0,195 \approx 12,68 \\
\text{Reell fart med 95 runder per minutt} = 95 \cdot 0,195 \approx 18,53 \\
\text{Reell fart med 124 runder per minutt} = 124 \cdot 0,195 = 24,18
\end{gathered}$$

Dette er de samme tallene som vi fikk over.

Svar:

Angitt fart x **km/h**	**Antall runder i løpet av ett minutt**	**Reell fart** $f(x)$ **km/h**
$2,5$	18	$3{,}51$
$5,0$	35	$6{,}83$
$10,0$	65	$12,68$
$15,0$	95	$18,53$
$20,0$	124	$24,18$

b)

Elevene vil lage en modell som viser den reelle farten $f(x)$ km/h som funksjon av den angitte farten x km/h.

Bestem den lineære funksjonen som passer best som modell for denne sammenhengen.

Bestem den potensfunksjonen som passer best som modell for denne sammenhengen.

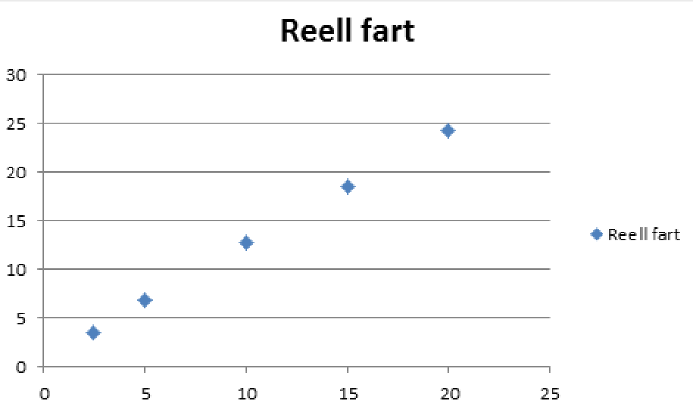
Hvilken av disse to modellene mener du elevene bør velge? Begrunn svaret.

Løsningsforslag b)

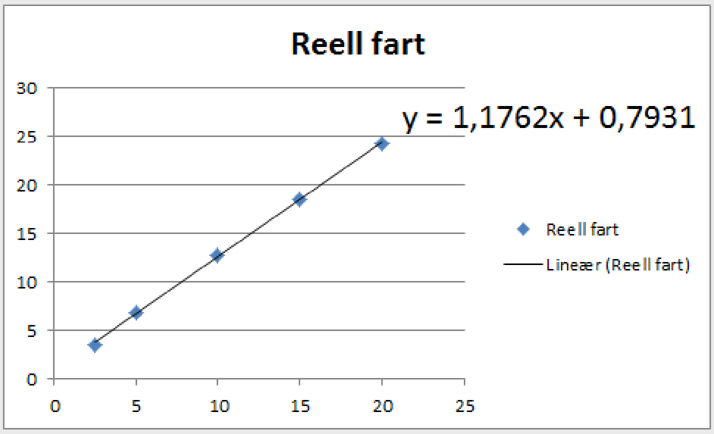
Her kan vi bruke både Excel og *GeoGebra*. Vi velger Excel. Det første vi gjør er å sette opp dataene våre i en tabell.

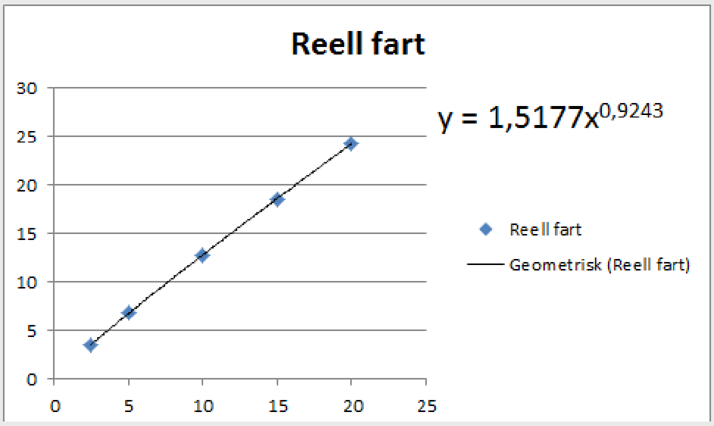
	A	B
1	Angitt fart	Reell fart
2	2,5	3,51
3	5	6,825
4	10	12,675
5	15	18,525
6	20	24,18

Vi vil ha tabellen inn i et *koordinatsystem*. Derfor markerer vi tabellen, går til "Sett inn" og velger punktdiagram.



For å utføre *regresjonen*, høyreklikker vi på punktene i diagrammet og velger "Vis trendlinje". Her kan vi velge den typen regresjon vi vil ha; vi er interesserte i både lineær regresjon og regresjon med en potensfunksjon. Derfor gjør vi dette to ganger. Vi husker å klikke på "Vis formel i diagrammet". Vi får følgende resultater:





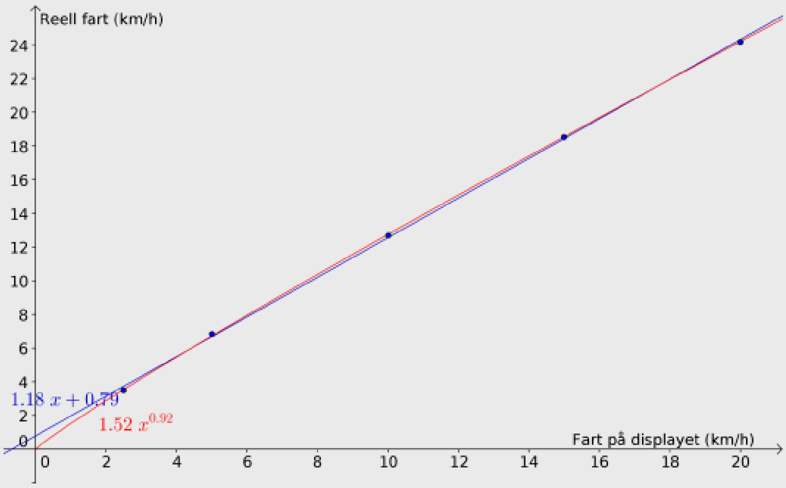
Dermed har vi funnet ut at den beste lineære funksjonen er

$$f(x) = 1,1762x + 0,7931,$$

og at den beste potensfunksjonen er

$$g(x) = 1,5177x^{0,9243}.$$

Vi kan tegne funksjonene inn i GeoGebra for å sammenligne dem.



Her ser vi at funksjonene er nesten helt like overalt. Det største unntaket er at potensfunksjonen går gjennom origo, og at den lineære funksjonen ikke gjør det. Fordi funksjonene er ganske like ellers, er det lurt å la dette bestemme hvilken som passer best. Hvis displayet viser at man beveger seg i rundt $1\,\mathrm{km/t}$ når båndet står står stille, så passer den lineære funksjonen best, men hvis displayet starter på $0\,\mathrm{km/t}$ er potensfunksjonen best. Det er sannsynlig at tredemøllen starter på $0\,\mathrm{km/t}$, så vi velger potensfunksjonen.

Svar: Den beste lineære funksjonen er

$$f(x) = 1,1762x + 0,7931,$$

og den beste potensfunksjonen er

$$g(x) = 1,5177x^{0,9243}.$$

Potensfunksjonen er sannsynligvis best, fordi den starter i origo.

c)
Henrik vil løpe i 15 km/h.

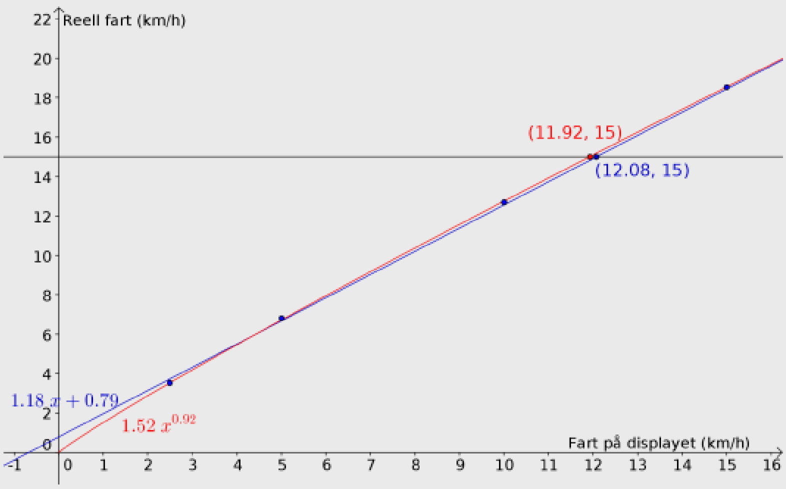
Hvilken fart bør han angi i displayet på tredemøllen ifølge modellen du valgte i oppgave b)?

Løsningsforslag c)

Vi valgte potensfunksjonen g som modell. Vi har $g(x) = 1,5177x^{0,9243}$. Hvis x er farten som er vist på displayet, så er $g(x)$ den egentlige farten (i følge modellen vår). Vi vil finne ut hva displayet må vise (x) hvis den egentlige farten ($g(x)$) skal være lik $15\ \mathrm{km/t}$. Med andre ord må vi finne en x slik at $g(x) = 15$. Det kan gjøres grafisk i *GeoGebra* ved å finne *skjæringspunktet* mellom grafen til g og linjen $y = 15$. Vi tegnet grafen i forrige oppgave, så alt vi trenger å gjøre er å skrive

```
y = 15
```

i "Skriv inn"-vinduet, og bruke skjæringsverktøyet for å finne skjæringspunktet mellom denne linjen og grafen. Prosedyren er for øvrig helt lik dersom vi hadde valgt den lineære funksjonen som modell. Under viser vi skjæringspunktene med begge grafene.



Det er det røde skjæringspunktet vi er interessert i. Der står det at $g(11,92) = 15$; det betyr at hvis vi vi skal jogge i $15\ \mathrm{km/t}$, så skal det stå $11,92\ \mathrm{km/t}$ på displayet. Hadde vi valgt den lineære modellen, skulle det stått $12,08\ \mathrm{km/t}$.

Svar: I følge potensfunksjonen skal det stå $11,92\ \mathrm{km/t}$, og den lineære funksjonen gir $12,08\ \mathrm{km/t}$. (Svaret avhenger av hvilken funksjon man valgte i forrige oppgave.)

d)

Elevene vil lage et oppslag som skal henge ved siden av tredemøllen, slik at de som løper, kan finne den reelle farten.

Lag et forslag til oppslag.

Løsningsforslag d)

Vi lager en *graf* i *GeoGebra*. Grafen er den samme som deloppgavene b) og c), men vi velger et tettere rutenett slik at det blir lettere å finne hvilke reelle hastigheter som hører til hvilke angitte hastigheter. Dette gjør vi ved å høyreklikke på x-aksen eller y-aksen, og endre "Avstand"-boksen i begge aksene. Et forslag er vist under.

Svar: