



www.matematikk.org

Eksamensoppgavesettet er utarbeidet av Utdanningsdirektoratet. Avvik fra det originale eksamenssettet er eventuelle spesifiseringer og illustrasjoner. Løsningsforslagene i sin helhet er utarbeidet av matematikk.org.

Nettkoden som står til høyre for oppgavetittelen brukes i søkefeltet på www.matematikk.org for å åpne oppgaven og se utfyllende løsningsforslag.

Våre samarbeidspartnere:



MAT1011 2016 Vår



Eksamenstid:

5 timer:

Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.

Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:

Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:

Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Bruk av digitale verktøy som graftegner og regneark skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.

Veiledning om vurderingen:

Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
- vurderer om svar er rimelige

Andre opplysninger:

Kilder for bilder, tegninger osv.

- Bensintank: (<http://www.bestmarin.no>, 6.07.2016)
- Torus: (<http://www.freeimages.com>, 6.07.2016)
- Andre bilder, tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet



DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng) [Nettkode: E-4B3K](#)

Ved kommunevalget i høst fikk et politisk parti 4,5 % av stemmene. Ved forrige kommunevalg fikk partiet 3,6 % av stemmene.

a)

Hvor mange prosentpoeng har økningen vært på?

Løsningsforslag a)

Andelen stemmer har økt fra 3,6 % til 4,5 %. Det er en økning på

$$4,5 - 3,6 = 0,9$$

prosentpoeng.

Svar: 0,9 prosentpoeng.

b)

Hvor mange prosent har økningen vært på?

Løsningsforslag b)

Vi skal finne ut hvor mange prosent økning det er fra 3,6 til 4,5. Det gjør vi ved å se på vekstfaktoren, som er $\frac{4,5}{3,6}$, eller $\frac{45}{36}$. (I den siste brøken har vi multiplisert telleren og nevneren med 10 for å unngå desimaltallene.) Vi kan regne ut brøken enklere ved å faktorisere telleren og nevneren. Vi vet at $45 = 5 \cdot 9 = 5 \cdot 3 \cdot 3$ og at $36 = 6 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Vi setter dette inn i brøken og forkorter. Da får vi

$$\frac{45}{36} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{5}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1,25.$$

Vekstfaktoren er 1,25, så prosentfaktoren er 0,25. Det gir en økning på 25 %.

Vi kunne også ha brukt økningen i prosentpoeng som vi fant i forrige oppgave. Da hadde vi sett at økningen var på

$$\frac{0,9}{3,6} = \frac{9}{36} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 25 \%.$$

Svar: 25 %.



Oppgave 2 (1 poeng) Nettkode: E-4B30



En bensintank har form som et rett, firkantet prisme. Tanken er 40 cm bred, 90 cm lang og 30 cm høy (innvendige mål).

Hvor mange liter rommer tanken?

Løsningsforslag

Et rett, firkantet *prisme* med bredde b , lengde l og høyde h , har *volum* lik

$$V = b \cdot l \cdot h.$$

I vårt tilfelle er $b = 40 \text{ cm} = 4 \text{ dm}$, $l = 90 \text{ cm} = 9 \text{ dm}$ og $h = 30 \text{ cm} = 3 \text{ dm}$. Vi har regnet om til desimeter fordi det gjør det enklere å konvertere svaret til liter. Vi setter tallene inn i formelen over, og får at

$$V = 4 \text{ dm} \cdot 9 \text{ dm} \cdot 3 \text{ dm} = (4 \cdot 9 \cdot 3) \text{ dm}^3.$$

Vi vet at $4 \cdot 9 = 36$, og videre er $36 \cdot 3 = 108$, så tanken rommer $108 \text{ dm}^3 = 108 \text{ L}$.

Svar: Tanken rommer 108 L.



Oppgave 3 (2 poeng) Nettkode: E-4B3Q

I 2012 var indeksen for en vare 80. Varen kostet da 2 000 kroner. I 2016 var indeksen for varen 60.

Hvor mye ville varen kostet i 2016 dersom prisen hadde fulgt indeksen?

Løsningsforslag

Vi har at

$$\frac{\text{pris i 2012}}{\text{indeks i 2012}} = \frac{\text{pris i 2016}}{\text{indeks i 2016}}.$$

Vi vet at indeksen og prisen for varen i 2012 var henholdsvis 80 og 2 000 kr. Videre var indeksen for varen 60 i 2016. Setter vi dette inn i ligningen over, får vi at

$$\frac{2\,000 \text{ kr}}{80} = \frac{\text{pris i 2016}}{60}.$$

Dette er en ligning der den ukjente er prisen i 2016. Vi kan løse ligningen ved å multiplisere med 60 på hver side av likhetstegnet, og forkorte. Vi får

$$\begin{aligned}\frac{2\,000 \text{ kr}}{80} \cdot 60 &= \frac{\text{pris i 2016}}{60} \cdot 60, \\ \frac{2\,000 \text{ kr}}{80} \cdot 60 &= \text{pris i 2016}.\end{aligned}$$

Videre regner vi ut $\frac{2\,000 \text{ kr}}{80} \cdot 60$, eller $2\,000 \text{ kr} \cdot \frac{60}{80}$. Vi faktorerer, og regner ut at prisen er

$$2\,000 \text{ kr} \cdot \frac{3 \cdot 20}{4 \cdot 20} = 2\,000 \text{ kr} \cdot \frac{3}{4} = 1\,500 \text{ kr}.$$

Svar: 1 500 kr.



Oppgave 4 (1 poeng) Nettkode: E-4B3S

På et kart er avstanden mellom to byer 12 cm. I virkeligheten er avstanden 240 km. Bestem målestokken til kartet.

Løsningsforslag

Vi vet at 12 cm på kartet er 240 km i virkeligheten. Det betyr at én centimeter på kartet tilsvarer

$$\frac{240 \text{ km}}{12} = \frac{24 \cdot 10 \text{ km}}{12} = 2 \cdot 10 \text{ km} = 20 \text{ km}$$

i virkeligheten. Én kilometer er 1 000 meter, så 20 kilometer er 20 000 meter. Videre må vi multiplisere med 100 for å få antall centimeter, så én centimeter på kartet tilsvarer

$$20\,000 \cdot 100 = 2\,000\,000$$

centimeter i virkeligheten. Det gir en målestokk på

$$1 : 2\,000\,000.$$

Svar: 1 : 2 000 000.



Oppgave 5 (1 poeng) Nettkode: E-4B3V

x	2,5	7,5	
y	50		200

Gitt tabellen ovenfor. x og y er proporsjonale størrelser.

Skriv av tabellen ovenfor i besvarelsen din. Gjør beregninger, og fyll ut tabellen.

Løsningsforslag

Det første vi gjør er å skrive av tabellen slik den står.

x	2,5	7,5	
y	50		200

Vi vet at x og y er proporsjonale størrelser, og det betyr at forholdet mellom dem er konstant. Vi vet at når $x = 2,5$, så er $y = 50$; det betyr at

$$\frac{y}{x} = \frac{50}{2,5} = \frac{100}{5} = 20.$$

(Vi kunne også ha brukt det omvendte forholdet $\frac{x}{y} = \frac{1}{20}$.) Hvis vi multipliserer med x på begge sider av likhetstegnet, kan vi skrive dette på formen $y = 20x$. Med andre ord skal y alltid være 20 ganger større enn x . Når $x = 7,5$, skal y dermed være $20 \cdot 7,5$. Vi kunne ha regnet ut dette for hånd, men det kan gå fortere hvis vi ser at $7,5 = \frac{15}{2}$. Da får vi nemlig at

$$y = 20 \cdot \frac{15}{2} = \frac{20}{2} \cdot 15 = 10 \cdot 15 = 150.$$

Dette fyller vi inn i tabellen. Tallet skal være i y -raden, rett under der det står $x = 7,5$.

x	2,5	7,5	
y	50	150	200

Til sist skal vi finne ut hva x skal være når $y = 200$. Vi vet at y alltid skal være 20 ganger større enn x , så x skal være lik

$$x = \frac{200}{20} = \frac{20 \cdot 10}{20} = 10.$$

Vi fyller dette inn i den siste ruten i tabellen.

x	2,5	7,5	10
y	50	150	200

Svar:

x	2,5	7,5	10
y	50	150	200



Oppgave 6 (4 poeng) [Nettkode: E-4B44](#)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = -x^2 + 4x + 5$$

a)

Skriv av og fyll ut verditabellen nedenfor.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$									

Løsningsforslag a)

Først skriver vi av tabellen vi skal fylle ut.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$									

Vi starter med ruten lengst til venstre, under -2 . Der skal vi regne ut og skrive tallet $f(-2)$. Det gjør vi ved å sette inn -2 der det står x i funksjonsuttrykket til f . Vi regner ut at

$$f(-2) = -(-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 5.$$

Her må vi huske på at når vi multipliserer to negative tall, så får vi noe positivt. Derfor blir $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$, så $-(-2)^2 = -4$. Videre blir $4 \cdot (-2) = -8$, så vi får at

$$f(-2) = -4 - 8 + 5 = -7.$$

Vi fyller dette inn i tabellen.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-7								

Vi regner ut $f(-1)$ på samme måte. Vi får

$$f(-1) = -(-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 5.$$

Vi husker igjen at vi får noe positivt når vi multipliserer to negative tall. Derfor blir

$$f(-1) = -1 - 4 + 5 = 0,$$

og dette fyller vi inn i tabellen.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-7	0							

Vi regner ut de neste verdiene på helt samme måte. Vi får



$$\begin{aligned}
 f(0) &= -0^2 + 4 \cdot 0 + 5 = 0 + 0 + 5 = 5, \\
 f(1) &= -1^2 + 4 \cdot 1 + 5 = -1 + 4 + 5 = 8, \\
 f(2) &= -2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = -4 + 8 + 5 = 9, \\
 f(3) &= -3^2 + 4 \cdot 3 + 5 = -9 + 12 + 5 = 8, \\
 f(4) &= -4^2 + 4 \cdot 4 + 5 = -16 + 16 + 5 = 5, \\
 f(5) &= -5^2 + 4 \cdot 5 + 5 = -25 + 20 + 5 = 0, \text{ og} \\
 f(6) &= -6^2 + 4 \cdot 6 + 5 = -36 + 24 + 5 = -7.
 \end{aligned}$$

Vi fyller ut tabellen.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-7	0	5	8	9	8	5	0	-7

Svar:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-7	0	5	8	9	8	5	0	-7

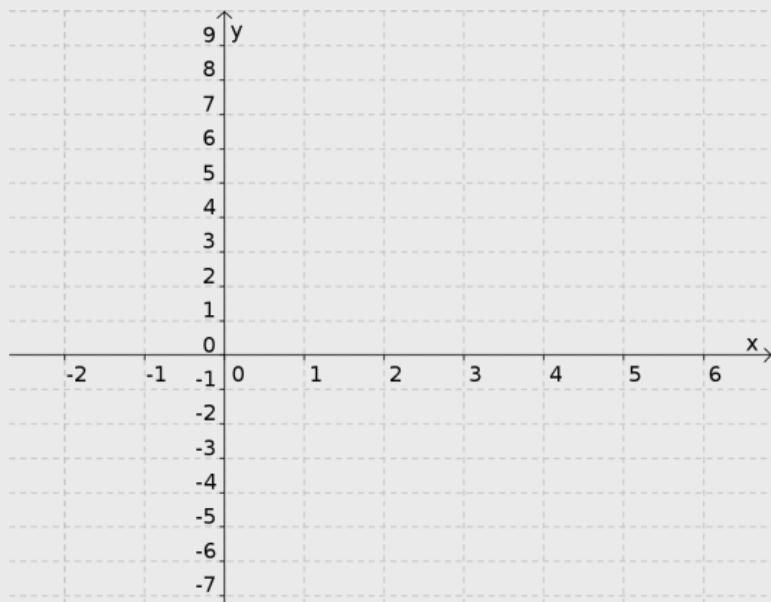


b)

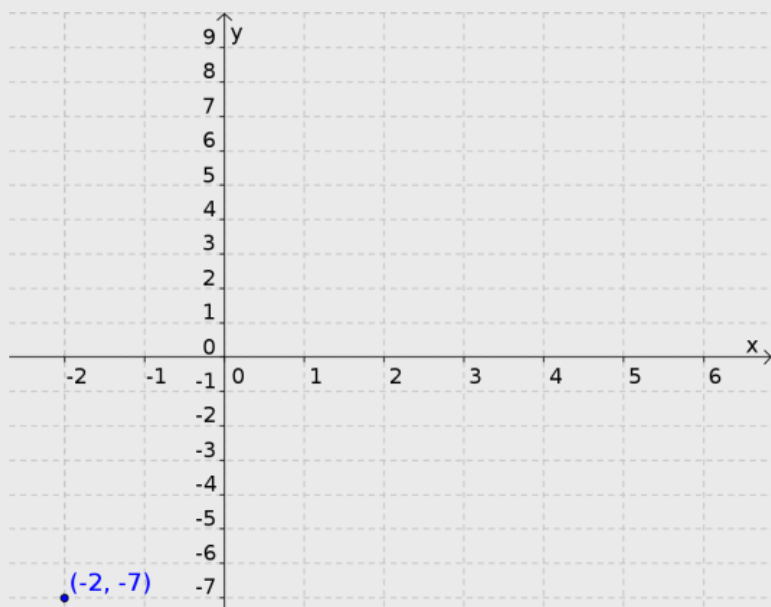
Tegn grafen til f .

Løsningsforslag b)

I tabellen fra forrige oppgave står det at $f(x) = -7$ når $x = -2$. Det betyr at grafen til f går gjennom punktet $(-2, -7)$. Det samme gjelder alle de andre kolonnene i tabellen. Vi skal tegne disse punktene inn i et koordinatsystem, og da er det viktig at vi tegner koordinatsystemet i passende størrelse. Vi tegner x -aksen omtrentlig fra -2 til 6 og y -aksen mellom -7 og 9 .

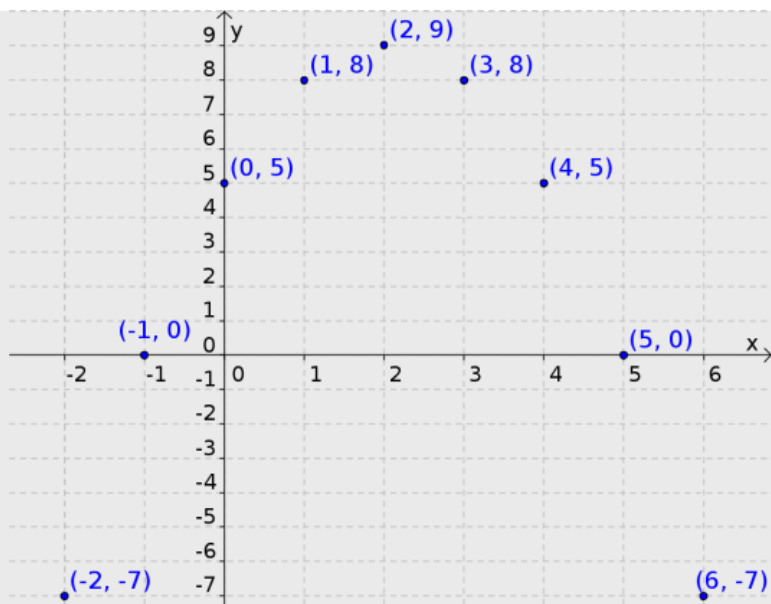


Videre skal vi tegne inn punktet $(-2, -7)$ som grafen går gjennom. Punktet er plassert der $x = -2$ og $y = -7$.



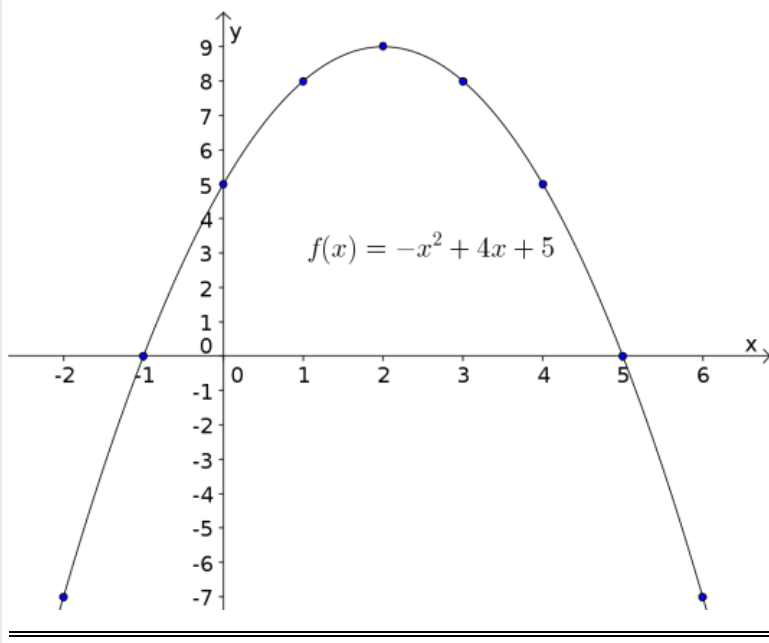
Vi gjør det samme med alle de andre punktene også. For eksempel står det i tabellen at $f(x) = 0$ når $x = -1$, at $f(x) = 5$ når $x = 0$, og så videre.





Nå har vi et ganske godt inntrykk av hvordan grafen til f ser ut, og da gjenstår det bare å tegne den. Grafen skal gå gjennom alle punktene, og ikke ha noen skarpe hjørner. (Ikke tegn rette streker mellom punktene.) Resultatet er under.

Svar:



Oppgave 7 (4 poeng) Nettkode: E-4B48



Snorre har seks blå og fire rosa ballonger. Han tar tilfeldig tre ballonger.

a)

Bestem sannsynligheten for at han tar tre blå ballonger.

Løsningsforslag a)

Det er 6 blå ballonger og 4 rosa; det blir totalt 10 ballonger. Snorre skal trekke tre tilfeldige ut i fra disse. Sannsynligheten for at han trekker en av de 6 blå ballongene første gang, er

$$P(\text{blå ballong på første}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Vi antar videre at Snorre trakk en blå ballong første gang. Når Snorre skal trekke den andre ballongen, er det bare 9 ballonger igjen, og 5 av disse er blå. Derfor er sannsynligheten for at han trekker en blå ballong andre gangen, lik

$$P(\text{blå ballong på andre}) = \frac{5}{9}.$$

Hvis han trakk blå de to første gangene, er det 8 ballonger igjen, hvorav 4 er blå. Sannsynligheten for at han trekker blå den siste gangen er dermed

$$P(\text{blå ballong på tredje}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Sannsynligheten for at Snorre trekker blått alle de tre gangene, er sannsynligheten for at alle de tre hendelsene over har skjedd. Produktregelen sier dermed at

$$P(\text{blå ballong på alle tre}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2}.$$

Her har vi brukt at $9 = 3 \cdot 3$ i nevneren. Vi kan forkorte to treere og to femmere mot hverandre, og da blir brøken over det samme som $\frac{1}{3 \cdot 2}$, eller $\frac{1}{6}$. Derfor er det én sjettedels sannsynlighet for at Snorre trekker tre blå ballonger.

Svar: $P(\text{blå ballong på alle tre}) = \frac{1}{6}.$



b)

Bestem sannsynligheten for at han tar minst én rosa ballong.

Løsningsforslag b)

Vi har at

$$P(\text{minst én rosa}) = P(\text{ikke blå ballong på alle tre})$$

og videre er

$$P(\text{ikke blå ballong på alle tre}) = 1 - P(\text{blå ballong på alle tre})$$

I forrige oppgave regnet vi ut at sannsynligheten var $\frac{1}{6}$ for at Snorre kun trakk blå ballonger, og derfor blir sannsynligheten for at han trekker minst én rosa ballong lik

$$P(\text{minst én rosa}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Vi kunne også ha løst oppgaven ved å sette opp et sannsynlighetstre, men dette ville tatt unødvendig lang tid.

Svar: $P(\text{minst én rosa}) = \frac{5}{6}.$

c)

Bestem sannsynligheten for at han tar én rosa og to blå ballonger.

Løsningsforslag c)

For at Snorre skal trekke én rosa ballong og to blå, kan han enten

RBB- trekke en rosa først, og deretter to blå,

BRB- trekke først en blå, deretter en rosa, og til sist en blå, eller

BBR- trekke to blå først og deretter en rosa.

Vi har forkortet de tre hendelsene med henholdsvis RBB, BRB og BBR. Vi må regne ut sannsynligheten for hver av disse tre hendelsene, og vi får den korrekte sannsynligheten ved å legge sammen disse.

Vi tar RBB først. Vi starter med 10 ballonger hvorav 4 er rosa. Sannsynligheten for at den første trukne ballongen er rosa, er derfor



$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Når vi har trukket den rosa ballongen, er det 9 igjen hvorav 6 er blå. Derfor blir sannsynligheten for at den neste ballongen er blå, lik

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Til sist er det 8 ballonger igjen, hvorav 5 er blå. Sannsynligheten for at den siste ballongen er blå, blir derfor

$$\frac{5}{8}.$$

Totalt har vi dermed

$$P(\text{RBB}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 8} = \frac{1}{6}.$$

Sannsynlighetene for de andre hendelsene regner vi ut på tilsvarende måte. Vi får at

$$\begin{aligned} P(\text{BRB}) &= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{6}, \text{ og} \\ P(\text{BBR}) &= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Totalt har vi dermed at

$$P(\text{to blå og én rosa ballong}) = P(\text{RBB}) + P(\text{BRB}) + P(\text{BBR}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Vi merker oss at $P(\text{RBB})$, $P(\text{BRB})$ og $P(\text{BBR})$ alle var like. Det er fordi vi bare har byttet om rekkefølgen på faktorene i brøken

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8}$$

når vi har regnet dem ut.

Svar: $P(\text{to blå og én rosa ballong}) = \frac{1}{2}$



Oppgave 8 (3 poeng) Nettkode: E-4B4D

Eirik har vært hos fotografen. Etter fotograferingen får han tilbud om å kjøpe en fotobok. Han kan selv bestemme hvor mange bilder han vil ha med i boken. Tabellen nedenfor viser prisen for fotobøker med 8, 14 og 24 bilder.

Antall bilder i fotoboken (x)	8	14	24
Pris for fotoboken med bilder (y)	1 000 kroner	1 300 kroner	1 800 kroner

Sammenhengen mellom antall bilder og pris kan beskrives ved hjelp av likningen

$y = ax + b$ der x er antall bilder i boken og y er prisen.

a)

Bestem tallene a og b .

Løsningsforslag a)

Først finner vi stigningstallet til linjen. Stigningstallet er hvor mye y øker hvis x øker med 1; med andre ord, hvor mye det koster å legge til ett bilde. Det koster 1 000 kroner for 8 bilder og 1 300 for 14 bilder. Det betyr at en økning på $14 - 8 = 6$ bilder gir en økning i pris på $1\,300 - 1\,000 = 300$ kroner. Prisen per bilde er derfor

$$\frac{300}{6} \text{ kr} = 50 \text{ kr.}$$

Derfor må stigningstallet a bli 50.

Vi fortsetter med å finne konstantleddet, altså hvor mye det koster å få tilsendt fotoboken overhodet. Vi har fra avsnittet over at $y = 50x + b$, der b er konstantleddet. Vi vet at det koster 1 000 kroner å få 8 bilder; med andre ord er $y = 1\,000$ når $x = 8$. Dette kan vi sette inn i likningen $y = 50x + b$, og da får vi at

$$1\,000 = 50 \cdot 8 + b.$$

Vi ser at $50 \cdot 8 = 400$. Vi vil finne tallet b som passer inn i likningen over, og den eneste muligheten er at $b = 1\,000 - 400 = 600$.

Svar: $a = 50, b = 600$.

b)

Gi en praktisk tolkning av tallene a og b i denne oppgaven.



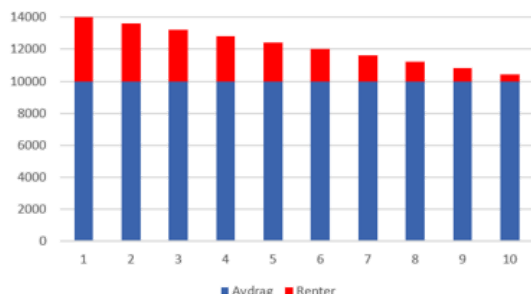
Løsningsforslag b)

Prisen y for å kjøpe x bilder er $y = 50x + 600$. Hvis vi kjøper en fotobok med 0 bilder, altså bare fotoboken, blir prisen $y = 600$, så vi kan tenke oss at fotoboken i seg selv koster 600 kr. Hvis vi vil ha med x bilder, så øker prisen med $50x$, så hvert bilde koster 50 kr.

Svar: Fotoboken koster 600 kr, og hvert bilde koster 50 kr.



Oppgave 9 (3 poeng) Nettkode: E-4B4N



Julie har tatt opp et lån med en fast årlig rente. Lånet skal betales tilbake i løpet av 10 år, med én termin i året. Figuren ovenfor viser nedbetalingsplanen.

a)

Er dette et serielån eller et annuitetslån? Begrunn svaret.

Løsningsforslag a)

De blå stolpene i diagrammet representerer avdragene. Alle de blå stolpene er like høye, og det betyr at avdraget i hver termin er like stort. Rentene kommer i tillegg, så det totale terminbeløpet er større i begynnelsen. Derfor er dette et serielån. Hadde det vært et annuitetslån, hadde den *sammenlagte* høyden på de blå og røde stolpene vært lik.

Svar: Dette er et serielån.

b)

Hvor mange prosent årlig rente betaler Julie på lånet?

Løsningsforslag b)

Lånebeløpet er summen av avdragene. Julie betaler 10 000 kr i avdrag i 10 terminer, og det betyr at hun lånte $10 \cdot 10\,000 \text{ kr} = 100\,000 \text{ kr}$. I første termin betalte hun 4 000 kr i renter; det ser vi ved at den første røde stolpen i diagrammet går fra 10 000 til 14 000. Renten er altså 4 000 kr av 100 000 kr, som blir

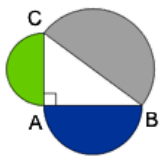
$$\frac{4\,000}{100\,000} = \frac{4}{100} = 4\%,$$

altså 4 % rente. Det er én termin i året, så Julie betaler 4 % rente per år.

Svar: 4 % rente per år.



Oppgave 10 (3 poeng) Nettkode: E-4B4R



Gitt $\triangle ABC$ slik at $AB = 8$ og $BC = 10$. Se figuren ovenfor.

Vis at arealet av den grønne og den blå halvsirkelen til sammen er like stort som arealet av den grå halvsirkelen.

Løsningsforslag

Vi viser to måter oppgaven kan løses på. Den første er mindre teoretisk, men den tar lengre tid.

Det stilles spørsmål om arealet av halvsirklene. Den første strategien vår er å skrive ut arealene som vi klarer å finne, og deretter prøve å bruke Pytagoras' setning. Vi husker at arealet til en *halvsirkel* med radius r er

$$\text{areal} = \frac{1}{2} \pi r^2.$$

Vi starter med den blå halvsirkelen. Den har diameter $AB = 8$, og derfor har den radius $\frac{8}{2} = 4$. Derfor har vi

$$\text{areal av blå halvsirkel} = \frac{1}{2} \pi 4^2 = 8\pi$$

Vi kan også finne arealet til den grå halvsirkelen, som har radius $\frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Arealet blir

$$\text{areal av grå halvsirkel} = \frac{1}{2} 5^2 \pi = \frac{25}{2} \pi$$

Til slutt har vi lyst til å finne arealet til den grønne halvsirkelen. Radien til halvsirkelen er $\frac{AC}{2}$. Vi vet ikke hva AC er, men heldigvis er $\triangle ABC$ en rettvinklet trekant, så vi kan bruke Pytagoras' setning. Den sier at

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Hvis vi setter inn $BC^2 = 10^2 = 100$ og $AB^2 = 8^2 = 64$, så får vi

$$100 = 64 + AC^2.$$

Det må bety at $AC^2 = 100 - 64 = 36$, så $AC = 6$. Radien i den grønne halvsirkelen er derfor $\frac{6}{2} = 3$, så arealet blir

$$\text{areal av grønn halvsirkel} = \frac{1}{2} \pi 3^2 = \frac{9}{2} \pi$$

Vi kan legge sammen arealet av den grønne og den blå halvsirkelen. Da får vi

$$\frac{9}{2} \pi + 8 \pi = \frac{9+16}{2} \pi = \frac{25}{2} \pi.$$

Dette er akkurat det samme som arealet til den grå halvsirkelen, og det var det vi ville vise.



Vi viser en annen måte å løse oppgaven på. Denne måten er raskere, og grei å bruke hvis man føler seg trygg på Pytagoras' setning og likninger. Siden $\triangle ABC$ er rettvinklet, har vi

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Vi vet at hvis en halvsirkel har diameter d , så vil halvsirkelen ha areal lik $\frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{2}d\right)^2 = \frac{1}{8} \pi d^2$. Hvert av tallene BC , AB og AC representerer diametre i forskjellige halvsirkler. Det er motivasjonen til å multiplisere likningen over med $\frac{1}{8} \pi$ på begge sider av likhetstegnet. Da får vi

$$\frac{1}{8} \pi BC^2 = \frac{1}{8} \pi AB^2 + \frac{1}{8} \pi AC^2.$$

Nå kan vi merke oss at venstre side av likningen over, $\frac{1}{8} \pi BC^2$, er lik arealet til den grå halvsirkelen. På samme måte er $\frac{1}{8} \pi AB^2$ og $\frac{1}{8} \pi AC^2$ arealet til henholdsvis den blå og den grønne halvsirkelen. Men da sier likningen over at

areal av grå halvsirkel = areal av blå halvsirkel + areal av grønn halvsirkel

og det var akkurat det vi ville vise. Vi merker oss at vi ikke trenger å bruke målene $AB = 8$ og $BC = 10$.

Svar: Arealet av den grå halvsirkelen er $\frac{25}{2} \pi$, mens arealet av den grønne og den blå halvsirkelen er henholdsvis $\frac{9}{2} \pi$ og $\frac{16}{2} \pi$. Alternativt gir Pytagoras' setning direkte at

$$\frac{1}{8} \pi BC^2 = \frac{1}{8} \pi AB^2 + \frac{1}{8} \pi AC^2.$$



DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng) Nettkode: E-4B4U



Anta at antall registrerte elbiler i Norge x år etter 2010 tilnærmet er gitt ved funksjonen g der

$$g(x) = 560x^3 - 1767x^2 + 2501x + 2577, \quad 0 \leq x \leq 8$$

a)

Bruk graftegner til å tegne grafen til g .

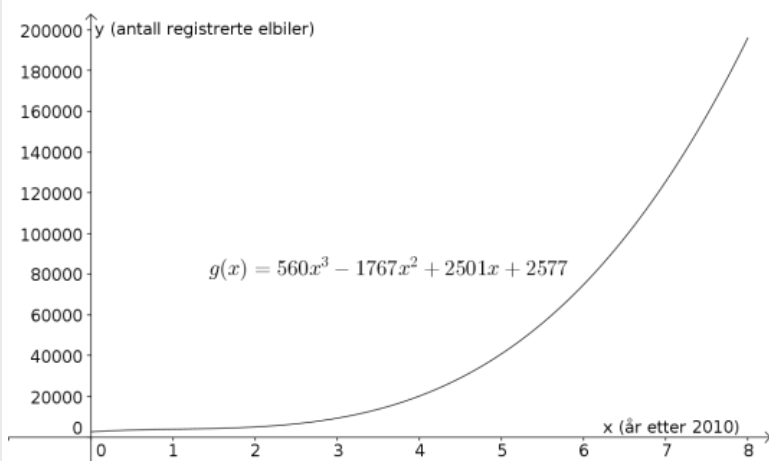
Løsningsforslag a)

Vi bruker GeoGebra. Alt vi trenger å gjøre er å skrive

$$g = \text{Funksjon}[560x^3 - 1767x^2 + 2501x + 2577, 0, 8]$$

i "Skriv inn"-vinduet. Vi tilpasser aksene slik at vi ser hele grafen, og setter på passende navn. Resultatet er vist under.

Svar:



b)

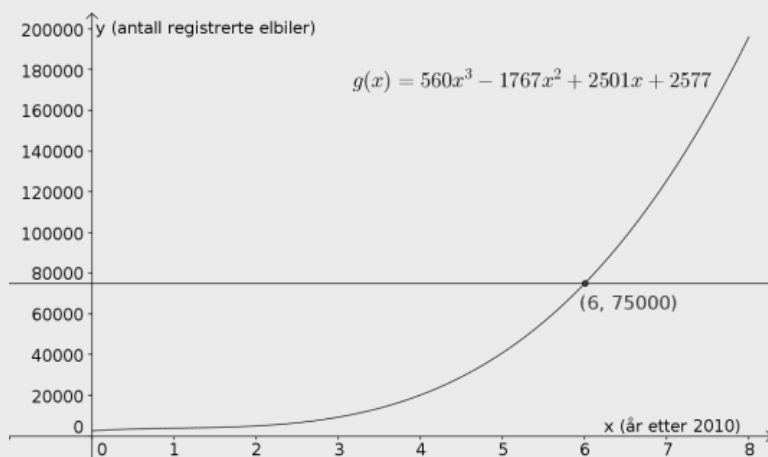
Når vil antall registrerte elbiler passere 75 000 ifølge denne funksjonen?

Løsningsforslag b)

Vi vil finne ut når grafen til g krysser linjen $y = 75\,000$. Med andre ord vil vi finne ut hva x skal være for at $g(x) = 75\,000$. Dette kan vi gjøre grafisk. Vi tegner den nevnte linjen ved å skrive

$$y = 75000$$

i den samme GeoGebra-filen som i forrige oppgave. Vi finner skjæringspunktet mellom grafene ved å bruke skjæringsverktøyet.



Vi ser at grafen til g når 75 000 når $x = 6$. Det betyr at antallet registrerte elbiler passerer 75 000 i 2016.

Svar: I 2016 (der $x = 6$).

c)

Bestem $g(4)$. Hva forteller denne verdien om antall elbiler?

Løsningsforslag c)

Vi regner ut $g(4)$. Det kan vi gjøre ved å sette inn $x = 4$ i formelen

$$g(x) = 560x^3 - 1767x^2 + 2501x + 2577,$$

eller så kan vi ganske enkelt skrive

$$g(4)$$

i den samme GeoGebra-filen som før. Da får vi at $g(4) = 20\,149$. Det betyr at 4 år etter 2010 – med andre ord, i 2014 – så var det 20 149 registrerte elbiler i Norge.

Svar: I følge modellen var det $g(4) = 20\,149$ registrerte elbiler i Norge i 2014 .



Oppgave 2 (2 poeng) Nettkode: E-4B4Y

I 2010 hadde Eirik en nominell lønn på 450 000 kroner. Konsumprisindeksen var da 128,8.

I 2015 var konsumprisindeksen 139,8. Hvor stor måtte den nominelle lønnen til Eirik ha vært i 2015 dersom han skulle hatt like stor kjøpekraft som i 2010?

Løsningsforslag

I hele denne oppgaven bruker vi likningen som viser forholdet mellom reallønn og nominell lønn, nemlig

$$\text{reallønn} = \text{nominell lønn} \cdot \frac{100}{\text{indeks}}.$$

Vi regner om den nominelle lønnen til Eirik til reallønn. Vi får at

$$\text{reallønn} = 450\,000 \text{ kr} \cdot \frac{100}{128,8} \approx 349\,379 \text{ kr}.$$

I 2015 var konsumprisindeksen 139,8. Spørsmålet er nå hvor mye lønn Eirik skulle hatt i 2015 hvis han skulle hatt like høy reallønn som i 2010. Med andre ord vil vi finne ut hva den nominelle lønnen skal være i ligningen

$$349\,379 \text{ kr} = \text{nominell lønn} \cdot \frac{100}{139,8}.$$

Det finner vi ut ved å multiplisere med den omvendte brøken $\frac{139,8}{100}$ på begge sider av likhetstegnet, og forkorte. Da får vi

$$\begin{aligned} 349\,379 \text{ kr} \cdot \frac{139,8}{100} &= \text{nominell lønn} \cdot \frac{100}{139,8} \cdot \frac{139,8}{100}, \\ 349\,379 \text{ kr} \cdot \frac{139,8}{100} &= \text{nominell lønn}. \end{aligned}$$

Dermed er den nominelle lønnen Eirik må ha, lik

$$\text{nominell lønn} = 349\,379 \text{ kr} \cdot \frac{139,8}{100} \approx 488\,432 \text{ kr}.$$

Svar: Cirka 488 432 kr.



Oppgave 3 (4 poeng) [Nettkode: E-4B50](#)

Marita driver eget firma. I 2015 hadde hun en omsetning på 1 200 000 kroner. Hun har som mål å øke omsetningen med 3,5 % per år.

a)

Hva vil omsetningen hennes bli i 2025 dersom hun klarer dette?

Løsningsforslag a)

Hvis Marita vil øke omsetningen med 3,5 % per år fra 2015, så vil omsetningen i 2016 være $1\,200\,000 \cdot 1,035$ kr. Etter to år vil den være

$1\,200\,000 \cdot 1,035 \cdot 1,035$ kr $= 1\,200\,000 \cdot 1,035^2$ kr, etter tre år vil den være $1\,200\,000 \cdot 1,035^3$ kr, og så videre. I 2025, altså etter 10 år, vil omsetningen derfor være

$$1\,200\,000 \cdot 1,035^{10} \text{ kr} \approx 1\,692\,719 \text{ kr.}$$

Svar: Cirka 1 692 719 kr.

b)

Marita endrer prisen på et produkt tre ganger. Først setter hun prisen opp med 40 %. Senere setter hun den ned igjen, først med 20 % og så med 20 % en gang til. Etter disse tre endringene koster produktet 560 kroner.

Hvor mye kostet produktet før prisendringene?

Løsningsforslag b)

La oss si at produktet kostet x kroner før prisendringene. Prisen ble satt opp med 40 %, som gir en vekstfaktor på 1,4; derfor kostet produktet $x \cdot 1,4$ etter prisøkningen. Deretter ble prisen satt ned 20 %, som gir en vekstfaktor på 0,8. Dette skjer to ganger, så til slutt koster produktet $x \cdot 1,4 \cdot 0,8 \cdot 0,8$. Vi regner ut at dette er det samme som $0,896x$. Men vi vet allerede at produktet kostet 560 kr etter prisendringene. Det må bety at 560 og $0,896x$ er det samme tallet. Derfor er

$$560 = 0,896x.$$

Vi dividerer begge sider med 0,896 for å finne ut hva x er. Vi får

$$\frac{560}{0,896} = \frac{0,896x}{0,896}, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{560}{0,896}.$$

Vi regner ut at $\frac{560}{0,896} = 625$, så produktet kostet opprinnelig 625 kroner.

Svar: 625 kr.



Oppgave 4 (4 poeng) Nettkode: E-4B5A

I en 1P-gruppe er det 26 elever. Elevene har valgt fag for neste skoleår.

- 20 elever har valgt Sosialkunnskap.
- 16 elever har valgt Internasjonal engelsk.
- 6 elever har verken valgt Sosialkunnskap eller Internasjonal engelsk.

a)

Systematiser opplysningene i teksten ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

Løsningsforslag a)

Vi viser hvordan vi lager en krysstabell, og viser et venndiagram til slutt. Det første vi gjør er å sette opp en tom krysstabell vi skal fylle ut. Tabellen skal vise hvor mange som tok og ikke tok Sosialkunnskap, og hvor mange som tok og ikke tok Internasjonal engelsk.

	Sosialkunnskap	Ikke sosialkunnskap	Totalt
Internasjonal engelsk			
Ikke-internasjonal engelsk			
Totalt			

Neste steg er å fylle inn informasjonen vi får fra teksten. Den aller første informasjonen vi får, er at det er totalt 26 elever i gruppen. Dette tallet skal stå der "Totalt"-raden krysser "Totalt"-kolonnen, altså nederst til høyre i tabellen.

	Sosialkunnskap	Ikke sosialkunnskap	Totalt
Internasjonal engelsk			
Ikke-internasjonal engelsk			
Totalt			26

Videre får vi vite at totalt 20 elever valgte Sosialkunnskap. Dette skriver vi der "Totalt"-raden krysser "Sosialkunnskap"-kolonnen. Tilsvarende var det totalt 16 elever som valgte Internasjonal engelsk, så vi plasserer dette tallet på tilsvarende måte.

	Sosialkunnskap	Ikke sosialkunnskap	Totalt
Internasjonal engelsk			16
Ikke-internasjonal engelsk			
Totalt	20		26

Til sist ser vi at 6 elever valgte verken Sosialkunnskap eller Internasjonal engelsk. Disse hører til der "Ikke Internasjonal engelsk"-raden krysser "Ikke Sosialkunnskap"-kolonnen.

	Sosialkunnskap	Ikke sosialkunnskap	Totalt
Internasjonal engelsk			16
Ikke internasjonal-engelsk		6	
Totalt	20		26



Dette var det siste av informasjonen vi fikk fra teksten, og vi må regne oss fram til hva som skal stå i de resterende rutene. Vi kan fylle ut alle rader og kolonner hvor vi har to av tre ruter fylt ut. Vi starter med den nederste raden. Der står det at av 26 elever, så valgte 20 elever Sosialkunnskap. Det betyr at 6 elever ikke valgte Sosialkunnskap.

	Sosialkunnskap	Ikke sosialkunnskap	Totalt
Internasjonal engelsk			16
Ikke-internasjonal engelsk		6	
Totalt	20	6	26

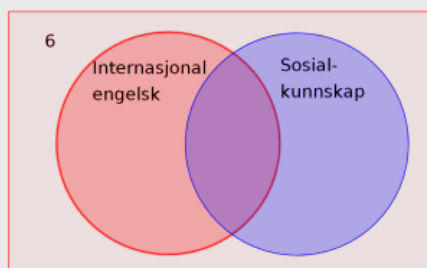
Vi kan regne oss fram til resten av rutene på samme måte. Det kan gå litt raskere hvis vi bruker at de to første rutene i hver rad og kolonne skal summeres opp til den tredje ruten. (I den nederste raden har vi $(20 + 6 = 26)$.) Vi bruker denne tankegangen på kolonnen helt til høyre. I første rute står det 16, og i siste rute står det 26. Da må det stå 10 i den andre ruten, fordi $16 + 10 = 26$. På samme måte skal det stå 0 i den første ruten i "Ikke Sosialkunnskap"-kolonnen.

	Sosialkunnskap	Ikke sosialkunnskap	Totalt
Internasjonal engelsk		0	16
Ikke-internasjonal engelsk		6	10
Totalt	20	6	26

Nå mangler bare første kolonne. I første rute må det stå 16, fordi $16 + 0 = 16$. I andre rute må det stå 4, fordi $4 + 6 = 10$.

	Sosialkunnskap	Ikke sosialkunnskap	Totalt
Internasjonal engelsk	16	0	16
Ikke-internasjonal engelsk	4	6	10
Totalt	20	6	26

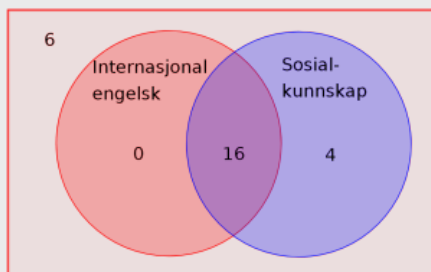
Vi kan også lage et venndiagram. Da starter vi med to avgrensede områder – et som representerer Internasjonal engelsk, og et som representerer Sosialkunnskap. Vi vet at det var 6 elever som valgte verken Sosialkunnskap eller Internasjonal engelsk. Derfor hører dette tallet hjemme på utsiden av begge områdene.



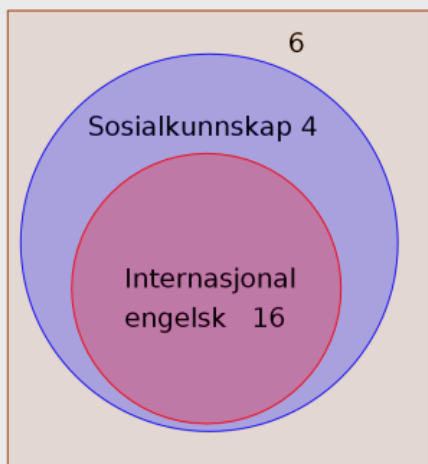
Siden det er totalt 26 elever og 6 av disse ikke tok noen av de nevnte fagene, så skal de resterende 20 elevene fordeles på de to sirklene. Vi vet allerede at 20 elever tok Sosialkunnskap, og det må bety at alle de 16 som tok Internasjonal engelsk også tok



Sosialkunnskap. Til sist kan vi konkludere med at $20 - 16 = 4$ elever tok Sosialkunnskap uten å ta Internasjonal engelsk, fordi vi skulle fordele totalt 20 elever.



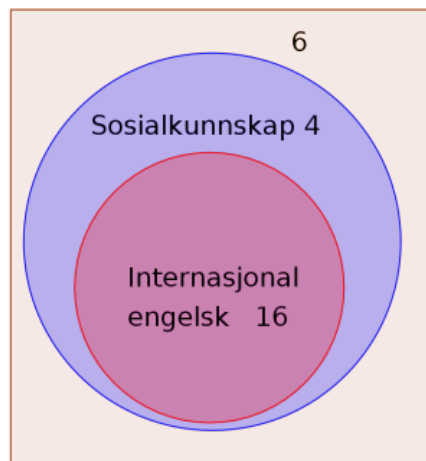
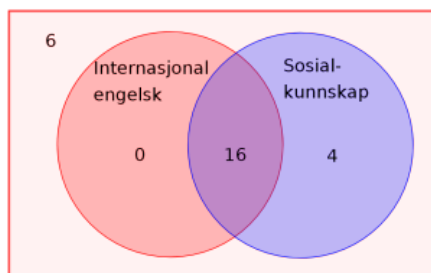
Siden alle som tok Internasjonal engelsk også tok Sosialkunnskap, kunne vi også ha laget vennadiagrammet som vist under.



Svar: Krysstabell:

	Sosialkunnskap	Ikke sosialkunnskap	Totalt
Internasjonal engelsk	16	0	16
Ikke-internasjonal engelsk	4	6	10
Totalt	20	6	26

Venn-diagram – ett av følgende:



b)

Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev fra gruppen har valgt Sosialkunnskap, men ikke Internasjonal engelsk.

Løsningsforslag b)

Vi trekker ut en tilfeldig elev, og vil finne sannsynligheten for at denne eleven har valgt Sosialkunnskap men ikke Internasjonal engelsk. Fra krysstabellen vår vet vi at det er 4 slike elever av totalt 26. Det gir en sannsynlighet på

$$P(S) = \frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}} = \frac{4}{26} = \frac{2}{13}$$

Svar: Sannsynligheten er $\frac{2}{13}$.

c)

Det viser seg at eleven som er trukket ut, har valgt Internasjonal engelsk.

Bestem sannsynligheten for at denne eleven også har valgt Sosialkunnskap.

Løsningsforslag c)

Svaret kan gis med én gang, fordi vi vet at alle som valgte Internasjonal engelsk også valgte Sosialkunnskap. Derfor er sannsynligheten 100 %. Det kan også regnes ut som i forrige oppgave. Fra krysstabellen vet vi at 16 elever valgte Internasjonal engelsk, og 16 av disse valgte Sosialkunnskap. Derfor er sannsynligheten

$$P(S, Ie) = \frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}} = \frac{16}{16} = 1$$

Svar: Sannsynligheten er 1, eller 100 %.



Oppgave 5 (7 poeng) Nettkode: E-4B5G

Fra og med måneden etter at et barn blir født, og til og med måneden før barnet fyller 18, får foreldrene utbetalt barnetrygd. Satsen for barnetrygd har vært 970 kroner per barn per måned siden 1996.

Stian ble født i september 1996.

a)

Hvor mye fikk foreldrene hans totalt utbetalt i barnetrygd?

Løsningsforslag a)

Stian fylte 18 år i september i 2014. For årene fra og med 1997 til og med 2013 fikk derfor foreldrene til Stian 12 måneder støtte per år. Det er totalt $12 \cdot 17 = 204$ måneder støtte. I tillegg fikk de støtte i oktober, november og desember i 1996, og i månedene før september i 2014. Det er $3 + 8 = 11$ måneder ekstra, så totalt har foreldrene fått støtte i 215 måneder. Støtten er på 970 kroner per måned, så totalt er dette

$$215 \cdot 970 \text{ kr} = 208\,550 \text{ kr.}$$

Svar: 208 550 kr.

b)

Tabellen til høyre viser konsumprisindeksen hvert år fra 1996 til 2015.

Stian mener at satsen for barnetrygd burde vært regulert i samsvar med konsumprisindeksen.

Vis at satsen for barnetrygd da skulle vært 1423 kroner per barn per måned i 2015.

År	KPI
1996	95,3
1997	97,8
1998	100
1999	102,3
2000	105,5
2001	108,7
2002	110,1
2003	112,8
2004	113,3
2005	115,1
2006	117,7
2007	118,6
2008	123,1
2009	125,7
2010	128,8
2011	130,4
2012	131,4
2013	134,2
2014	136,9
2015	139,8



Løsningsforslag b)

Svar:

Vi vil vite hva de 970 kronene fra 1996 er verdt i 2015. Vi har sammenhengen $\frac{\text{verdi i 1996}}{\text{indeks i 1996}} = \frac{\text{verdi i 2015}}{\text{indeks i 2015}}$. Vi vet at barnetrygden i 1996 var 970, og fra tabellen vet vi at konsumprisindeksen i 1996 og 2015 var henholdsvis 95,3 og 139,8. Vi setter dette inn i ligningen over, og får

$$\frac{970 \text{ kr}}{95,3} = \frac{\text{verdi i 2015}}{139,8}$$

Vi multipliserer begge sider av ligningen med 139,8, og forkorter. Da får vi

$$\frac{970 \text{ kr}}{95,3} \cdot 139,8 = \frac{\text{verdi i 2015}}{139,8} \cdot 139,8$$
$$\text{verdi i 2015} = \frac{970 \text{ kr}}{95,3} \cdot 139,8$$

Vi regner ut at $\frac{970 \text{ kr}}{95,3} \cdot 139,8 \approx 1\,423 \text{ kr}$. Det betyr at barnetrygden skulle ha vært på 1 423 kr hvis den skulle ha fulgt konsumprisindeksen, akkurat som vi skulle vise.

c)

Lag et regneark som viser hvor mye Stians foreldre totalt ville fått utbetalt dersom satsen for barnetrygd hvert år hadde blitt regulert i samsvar med konsumprisindeksen.

Løsningsforslag c)

Det første vi gjør er å kopiere tabellen med konsumprisindeksene. Vi vil også ha en kolonne for hvor mye satsen for barnetrygden skal være hvert år, antall måneder støtte foreldrene fikk hvert år, og en kolonne for den mottatte støtten. Vi husker at satsen var på 970 kroner i 1996.

	A	B	C	D	E
	År	KPI	Sats for barnetrygd	Antall måneder støtte	Mottatt støtte
1					
2	1996	95,3	970	3	
3	1997	97,8		12	
4	1998	100		12	
5	1999	102,30		12	
6	2000	105,50		12	
7	2001	108,70		12	
8	2002	110,10		12	
9	2003	112,80		12	
10	2004	113,30		12	
11	2005	115,10		12	
12	2006	117,70		12	
13	2007	118,60		12	
14	2008	123,10		12	
15	2009	125,70		12	
16	2010	128,80		12	
17	2011	130,40		12	
18	2012	131,40		12	
19	2013	134,20		12	
20	2014	136,90		8	
21	Totalt				



I 1996 skal foreldrene motta $970 \cdot 3$ kroner i støtte. Vi regner ut dette i Excel ved å skrive

$$= D2 * C2$$

i ruten E2. Videre vil vi regne ut støtten i 1997. Da må vi først regne ut hva satsen skal være. Det gjør vi på samme måte som i forrige oppgave, og vi får at

$$\text{sats i 1997} = \text{sats i 1996} \cdot \frac{\text{indeks i 1997}}{\text{indeks i 1996}}.$$

Derfor skriver vi

$$= C2 * B3 / B2$$

i rute C3. I rute E3 skriver vi tilsvarende som i E2:

$$= D3 * C3$$

	A	B	C	D	E
1	År	KPI	Sats for barnetrygd	Antall måneder støtte	Mottatt støtte
2	1996	95,3	970,00	3	2910,00
3	1997	97,8	995,45	12	11945,35
4	1998	100		12	
5	1999	102,30		12	
6	2000	105,50		12	
7	2001	108,70		12	
8	2002	110,10		12	
9	2003	112,80		12	
10	2004	113,30		12	
11	2005	115,10		12	
12	2006	117,70		12	
13	2007	118,60		12	
14	2008	123,10		12	
15	2009	125,70		12	
16	2010	128,80		12	
17	2011	130,40		12	
18	2012	131,40		12	
19	2013	134,20		12	
20	2014	136,90		8	
21	Totalt				

Slik fortsetter vi nedover. Til slutt summerer vi hele E-kolonnen for å få det totale barnebidraget.



	A	B	C	D	E
1	År	KPI	Sats for barnetrygd	Antall måneder støtte	Mottatt støtte
2	1996	95,3	970,00	3	2910,00
3	1997	97,8	995,45	12	11945,35
4	1998	100	1017,84	12	12214,06
5	1999	102,30	1041,25	12	12494,98
6	2000	105,50	1073,82	12	12885,83
7	2001	108,70	1106,39	12	13276,68
8	2002	110,10	1120,64	12	13447,68
9	2003	112,80	1148,12	12	13777,46
10	2004	113,30	1153,21	12	13838,53
11	2005	115,10	1171,53	12	14058,38
12	2006	117,70	1198,00	12	14375,95
13	2007	118,60	1207,16	12	14485,88
14	2008	123,10	1252,96	12	15035,51
15	2009	125,70	1279,42	12	15353,07
16	2010	128,80	1310,98	12	15731,71
17	2011	130,40	1327,26	12	15927,14
18	2012	131,40	1337,44	12	16049,28
19	2013	134,20	1365,94	12	16391,27
20	2014	136,90	1393,42	8	11147,37
21	Totalt				255346,14

Dermed skulle foreldrene ha mottatt 255 346,14 kr i barnebidrag, hvis satsen hadde fulgt konsumprisindeksen.

Under viser vi en oversikt over alle kommandoene som er brukt.

Svar: 255 346,14 kr.

	A	B	C	D	E
1	År	KPI	Sats for barnetrygd	Antall måneder støtte	Mottatt støtte
2	1996	95,3	970	3	=D2*C2
3	1997	97,8	=C2*B3/B2	12	=D3*C3
4	1998	100	=C2*B4/B2	12	=D4*C4
5	1999	102,3	=C2*B5/B2	12	=D5*C5
6	2000	105,5	=C2*B6/B2	12	=D6*C6
7	2001	108,7	=C2*B7/B2	12	=D7*C7
8	2002	110,1	=C2*B8/B2	12	=D8*C8
9	2003	112,8	=C2*B9/B2	12	=D9*C9
10	2004	113,3	=C2*B10/B2	12	=D10*C10
11	2005	115,1	=C2*B11/B2	12	=D11*C11
12	2006	117,7	=C2*B12/B2	12	=D12*C12
13	2007	118,6	=C2*B13/B2	12	=D13*C13
14	2008	123,1	=C2*B14/B2	12	=D14*C14
15	2009	125,7	=C2*B15/B2	12	=D15*C15
16	2010	128,8	=C2*B16/B2	12	=D16*C16
17	2011	130,4	=C2*B17/B2	12	=D17*C17
18	2012	131,4	=C2*B18/B2	12	=D18*C18
19	2013	134,2	=C2*B19/B2	12	=D19*C19
20	2014	136,9	=C2*B20/B2	8	=D20*C20
21	Totalt				=SUMMER(E2:E20)



Oppgave 6 (5 poeng) Nettkode: E-4B5L

I regnearket nedenfor har vi lagt inn timelønn, skatteprosent og antall timer Sara, Vilde og Peder arbeidet i juli.

	A	B	C	D
1		Sara	Vilde	Peder
2	Antall timer med ordinær timelønn	30	32	28
3	Antall timer med 40 % overtidstillegg	9	7	11
4	Ordinær timelønn	kr 147,00	kr 155,00	kr 152,00
5	Lønn for ordinært arbeid			
6	Lønn for overtidarbeid			
7	Bruttolønn			
8	Skattetrekk av ordinær lønn (prosent)	12 %	15 %	10 %
9	Skattetrekk av overtidslønn (prosent)	40 %	40 %	40 %
10	Skattetrekk (kroner)			
11	Nettolønn juli			
12	Gjennomsnittlig skatteprosent	20,3 %		

a)

Lag et regneark som vist ovenfor. Du skal sette inn formler i de blå cellene og beregne bruttolønn, skattetrekk og nettolønn.

Løsningsforslag a)

Vi bruker Excel. Vi trenger bare å gjøre utregninger for Sara, og så "dra" rutene fra hennes kolonne over til Vildes og Peders. Dette viser noe av styrken til regneark. Vi viser en oversikt over alle kommandoer som er brukt nederst.

Det aller første vi gjør, er å skrive av regnearket.

	A	B	C	D
1		Sara	Vilde	Peder
2	Antall timer med ordinær timelønn	30	32	28
3	Antall timer med 40 % overtidstillegg	9	7	11
4	Ordinær timelønn	kr 147,00	kr 155,00	kr 152,00
5	Lønn for ordinært arbeid			
6	Lønn for overtidarbeid			
7	Bruttolønn			
8	Skattetrekk av ordinær lønn (prosent)	12 %	15 %	10 %
9	Skattetrekk av overtidslønn (prosent)	40 %	40 %	40 %
10	Skattetrekk (kroner)			
11	Nettolønn juli			
12	Gjennomsnittlig skatteprosent	20,30 %		

Vi starter med utregning av bruttolønningen. Sara jobbet i B2 timer med ordinær timelønn, der timelønningen er B4. Lønningen for ordinært arbeid må derfor være disse produktet av disse to. Derfor skriver vi

$$= B2 * B4$$

i rute B5. Vi drar ruten over til Vilde og Peder for å gjøre samme utregning der. Videre jobbet Sara i B3 timer med 40 % overtidstillegg. Et lønnstillegg på 40 % gir en vekstfaktor på 1,4, så lønningen for overtidarbeidet er

$$= B3*B4*1,4$$

Dette skriver vi i rute B6. Bruttolønningen er summen av B5 og B6.



	A	B	C	D
1		Sara	Vilde	Peder
2	Antall timer med ordinær timelønn	30	32	28
3	Antall timer med 40 % overtidstillegg	9	7	11
4	Ordinær timelønn	kr 147,00	kr 155,00	kr 152,00
5	Lønn for ordinært arbeid	kr 4 410,00	kr 4 960,00	kr 4 256,00
6	Lønn for overtidarbeid	kr 1 852,20	kr 1 519,00	kr 2 340,80
7	Bruttolønn	kr 6 262,20	kr 6 479,00	kr 6 596,80
8	Skattetrekk av ordinær lønn (prosent)	12 %	15 %	10 %
9	Skattetrekk av overtidslønn (prosent)	40 %	40 %	40 %
10	Skattetrekk (kroner)			
11	Nettolønn juli			
12	Gjennomsnittlig skatteprosent	20,30 %		

Videre skal vi regne ut skattetrekket. Sara skatter B8 (i prosent) av den ordinære lønnen B5, som gir en skatt på $B5 \cdot B8$. Videre skatter hun B9 av overtidslønnen B6, som gir skatt på $B6 \cdot B9$. Derfor skriver vi

$$= B5 \cdot B8 + B6 \cdot B9$$

som det totale skattetrekket i rute B10. Nettolønnen får vi ved å trekke skatten fra bruttolønnen. Som vanlig trekker vi utregningene fra Saras kolonne over til Vildes og Peders.

	A	B	C	D
1		Sara	Vilde	Peder
2	Antall timer med ordinær timelønn	30	32	28
3	Antall timer med 40 % overtidstillegg	9	7	11
4	Ordinær timelønn	kr 147,00	kr 155,00	kr 152,00
5	Lønn for ordinært arbeid	kr 4 410,00	kr 4 960,00	kr 4 256,00
6	Lønn for overtidarbeid	kr 1 852,20	kr 1 519,00	kr 2 340,80
7	Bruttolønn	kr 6 262,20	kr 6 479,00	kr 6 596,80
8	Skattetrekk av ordinær lønn (prosent)	12 %	15 %	10 %
9	Skattetrekk av overtidslønn (prosent)	40 %	40 %	40 %
10	Skattetrekk (kroner)	kr 1 270,08	kr 1 351,60	kr 1 361,92
11	Nettolønn juli	kr 4 992,12	kr 5 127,40	kr 5 234,88
12	Gjennomsnittlig skatteprosent	20,30 %		

Her er oversikten over alle utregningene som er brukt.

	A	B	C	D
1		Sara	Vilde	Peder
2	Antall timer med ordinær timelønn	30	32	28
3	Antall timer med 40 % overtidstillegg	9	7	11
4	Ordinær timelønn	147	155	152
5	Lønn for ordinært arbeid	=B2*B4	=C2*C4	=D2*D4
6	Lønn for overtidarbeid	=B3*B4*1,4	=C3*C4*1,4	=D3*D4*1,4
7	Bruttolønn	=B5+B6	=C5+C6	=D5+D6
8	Skattetrekk av ordinær lønn (prosent)	0,12	0,15	0,1
9	Skattetrekk av overtidslønn (prosent)	0,4	0,4	0,4
10	Skattetrekk (kroner)	=B5*B8+B6*B9	=C5*C8+C6*C9	=D5*D8+D6*D9
11	Nettolønn juli	=B7-B10	=C7-C10	=D7-D10
12	Gjennomsnittlig skatteprosent	0,203		

Svar:

	A	B	C	D
1		Sara	Vilde	Peder
2	Antall timer med ordinær timelønn	30	32	28
3	Antall timer med 40 % overtidstillegg	9	7	11
4	Ordinær timelønn	kr 147,00	kr 155,00	kr 152,00
5	Lønn for ordinært arbeid	kr 4 410,00	kr 4 960,00	kr 4 256,00
6	Lønn for overtidarbeid	kr 1 852,20	kr 1 519,00	kr 2 340,80
7	Bruttolønn	kr 6 262,20	kr 6 479,00	kr 6 596,80
8	Skattetrekk av ordinær lønn (prosent)	12 %	15 %	10 %
9	Skattetrekk av overtidslønn (prosent)	40 %	40 %	40 %
10	Skattetrekk (kroner)	kr 1 270,08	kr 1 351,60	kr 1 361,92
11	Nettolønn juli	kr 4 992,12	kr 5 127,40	kr 5 234,88
12	Gjennomsnittlig skatteprosent	20,30 %		

b)

Sara har regnet ut at hun i gjennomsnitt betalte 20,3 % i skatt av bruttolønnen hun hadde i juli. Hun har derfor satt opp at hun har en gjennomsnittlig skatteprosent på 20,3.

Vis hvilke beregninger Sara har gjort. Legg inn formler i de røde cellene i siste rad i regnearket fra oppgave a), slik at du også får med gjennomsnittlig skatteprosent for Vilde og Peder.

Løsningsforslag b)

Sara har sett på hvor mye hun har skattet totalt i forhold til bruttolønnen. Hun har skattet B10 kroner av en bruttolønn på B7, og da blir skatteprosenten lik $\frac{B10}{B7}$

På helt tilsvarende måte kan vi finne Vildes gjennomsnittlige skatteprosent ved å skrive
 $= C10/C7$

i rute C12, og for Peder skriver vi

$= D10/D7$

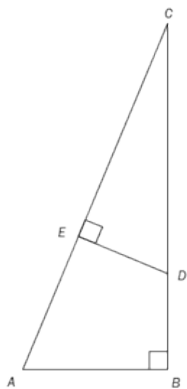
Resultatet er vist under. For å få svaret opp som prosent, markerer man cellene, velger "Formater celler" og klikker på prosent.

Svar: Sara har skattet i gjennomsnitt $\frac{B10}{B7}$

	A	B	C	D
1		Sara	Vilde	Peder
2	Antall timer med ordinær timelønn	30	32	28
3	Antall timer med 40 % overtidstillegg	9	7	11
4	Ordinær timelønn	kr 147,00	kr 155,00	kr 152,00
5	Lønn for ordinært arbeid	kr 4 410,00	kr 4 960,00	kr 4 256,00
6	Lønn for overtidarbeid	kr 1 852,20	kr 1 519,00	kr 2 340,80
7	Bruttolønn	kr 6 262,20	kr 6 479,00	kr 6 596,80
8	Skattetrekk av ordinær lønn (prosent)	12 %	15 %	10 %
9	Skattetrekk av overtidslønn (prosent)	40 %	40 %	40 %
10	Skattetrekk (kroner)	kr 1 270,08	kr 1 351,60	kr 1 361,92
11	Nettolønn juli	kr 4 992,12	kr 5 127,40	kr 5 234,88
12	Gjennomsnittlig skatteprosent	20,30 %	20,86 %	20,65 %



Oppgave 7 (5 poeng) Nettkode: E-4B5R



Gitt $\triangle ABC$ og $\triangle CED$. Se figuren ovenfor.

$BC = 36$, $AC = 39$ og $CD = 26$.

a)

Forklar hvorfor $\triangle ABC$ og $\triangle CED$ er formlike.

Løsningsforslag a)

Trekantene $\triangle ABC$ og $\triangle CED$ er formlike hvis de har parvis like store vinkler. Faktisk behøver de bare å ha to parvis like store vinkler, for da vil den siste vinkelen være bestemt av vinkelsummen på 180° . Vi ser at både $\triangle ABC$ og $\triangle CED$ har en rett vinkel. Videre deler begge trekantene $\angle C$. Siden vinkelsummen i en trekant er 180° , vil den siste vinkelen i begge trekantene være $180^\circ - 90^\circ - \angle C$, og derfor er trekantene formlike.

Svar: Begge trekantene har en rett vinkel, og $\angle C$. Dermed er også den siste vinkelen lik.

b)

Bestem lengden av CE .

Løsningsforslag b)

Vi vet fra forrige oppgave at $\triangle ABC$ og $\triangle CED$ er formlike. Derfor har vi at tilsvarende sider i de to trekantene har det samme forholdet. Med andre ord er

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{BC} = \frac{CD}{AC}.$$

Vi vet at $AC = 39$ og $CD = 26$, så alle brøkene over har verdi $\frac{26}{39}$. Vi vet også at $BC = 36$, så vi får at



$$\frac{CE}{36} = \frac{26}{39}.$$

Vi vil finne verdien for CE som passer inn i likningen over. Det gjør vi ved å multiplisere ligningen med 36 på begge sider, og forkorte. Vi får

$$\frac{CE}{36} \cdot 36 = \frac{26}{39} \cdot 36, \quad CE = \frac{26}{39} \cdot 36.$$

Vi regner ut at høyre side i likningen over er 24, så $CE = 24$.

Svar: $CE = 24$.

c)

Vis at forholdet mellom arealet av $\triangle ABC$ og arealet av $\triangle CED$ er $\frac{9}{4}$.

Løsningsforslag c)

Arealet til en trekant med lengde l og høyde h er $\frac{1}{2} \cdot l \cdot h$. I $\triangle ABC$ velger vi lengden til å være AB og høyden til å være BC , så arealet av $\triangle ABC$ er

$$\text{areal av } \triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot BC$$

I $\triangle CED$ lar vi lengden være DE og høyden være CE , så er arealet av

$$\text{areal av } \triangle CED = \frac{1}{2} DE \cdot CE$$

Nå har vi funnet uttrykk for arealene av trekantene, men det er variabler inne i dem som vi ikke vet hva er (AB og DE). Vi kunne brukt Pytagoras' setning til å finne disse sidene. Vi viser hvordan vi gjør dette til slutt, men foreløpig prøver vi å se på forholdet mellom arealene *uten* å sette inn tall for lengdene og høydene. Da får vi

$$\frac{\text{areal av } \triangle ABC}{\text{areal av } \triangle CED} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot BC}{\frac{1}{2} DE \cdot CE}$$

Vi kan forkorte $\frac{1}{2}$ over og under brøkstreken, og da står vi igjen med

$$(1) \quad \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC}{\frac{1}{2} \cdot DE \cdot CE} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{BC}{CE}$$

I forrige oppgave brukte vi formlikhet til å vise at $\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{BC} = \frac{26}{39}$. Vi kan snu på brøkene, og da får vi

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CE} = \frac{39}{26}$$

Setter vi dette inn i uttrykket (1), får vi at forholdet mellom arealet av trekantene er



$$\frac{AB}{DE} \cdot \frac{BC}{CE} = \frac{39}{26} \cdot \frac{39}{26} = \frac{9}{4},$$

og det var akkurat det vi ville vise.

Vi kunne også ha funnet lengdene til AB og DE ved å bruke Pytagoras' setning, deretter funnet begge arealene og sett på forholdet. Vi vet nemlig at

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{39^2 - 36^2} = 15$$

og

$$DE = \sqrt{CD^2 - CE^2} = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10.$$

Da får vi

$$\text{areal av } \triangle ABC = \frac{1}{2} 15 \cdot 36 = 270$$

og

$$\text{areal av } \triangle CED = \frac{1}{2} 10 \cdot 24 = 120$$

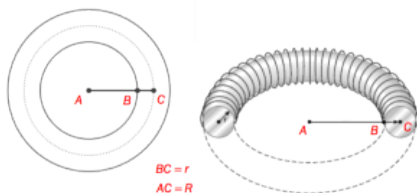
Da blir forholdet

$$\frac{270}{120} = \frac{9}{4}.$$

$$\textbf{Svar: } \frac{\text{areal av } \triangle ABC}{\text{areal av } \triangle CED} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot BC}{\frac{1}{2} DE \cdot CE} = \frac{39}{26} \cdot \frac{39}{26} = \frac{9}{4}$$



Oppgave 8 (4 poeng) Nettkode: E-4B60



Bildet ovenfor viser en torus. Torusen er laget av et aluminiumsrør. Figurene viser tverrsnitt av torusen.

Volumet V av en torus er gitt ved

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi R$$

der $BC = r$ er radius i aluminiumsrøret og $AC = R$ er avstanden fra sentrum i det sirkelformede hullet i midten av torusen til sentrum i aluminiumsrøret.

I en torus er $r = 5,1$ cm og $R = 20,4$ cm.

a)

Bestem volumet av denne torusen. Gi svaret i liter.

Løsningsforslag a)

Det første vi gjør er å regne om målene til desimeter, fordi det gjør det enklere å konvertere til liter. Vi har at $r = 5,1$ cm $= 0,51$ dm, og $R = 20,4$ cm $= 2,04$ dm. Dette skal vi sette inn i formelen

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi R.$$

Vi får

$$V = \pi (0,51 \text{ dm})^2 \cdot 2\pi \cdot 2,04 \text{ dm} \approx 10,47 \text{ dm}^3,$$

så volumet av torusen er cirka 10,47 L.

Svar: Cirka 10,47 L.

b)

I en annen torus er $R = 10,2$ cm. Torusen har volum $V = 8,6$ L.

Bestem omkretsen av sirkelen med radius AB .



Løsningsforslag b)

Det første vi må gjøre er å finne ut hva lengden AB er. Vi ser fra figuren i oppgaven at $AB = AC - BC = R - r$. Vi vet hva R er, men vi må finne r .

Først gjør vi om $R = 10,2 \text{ cm}$ til $1,02 \text{ dm}$, og $R = 8,6 \text{ L}$ til $8,6 \text{ dm}^3$. Vi setter målene inn i ligningen

$$V = \pi r^2 \cdot 2 \pi R,$$

og får

$$8,6 \text{ dm}^3 = \pi r^2 \cdot 2 \pi \cdot 1,02 \text{ dm}.$$

Vi vil finne ut hvilken verdi for r som passer inn i ligningen over. Vi kan endre rekkefølgen på faktorene, og skrive dette som

$$8,6 \text{ dm}^3 = r^2 \cdot 2 \pi^2 \cdot 1,02 \text{ dm}.$$

Vi regner ut at $2 \pi^2 \cdot 1,02 \approx 20,13$, så vi har at

$$8,6 \text{ dm}^3 \approx r^2 \cdot 20,13 \text{ dm}.$$

Vi vil ha r^2 alene på én side av likhetstegnet, og derfor dividerer vi med $20,13 \text{ dm}$ på hver side og forkorter. Vi får

$$\begin{aligned} \frac{8,6 \text{ dm}^3}{20,13 \text{ dm}} &\approx \frac{r^2 \cdot 20,13 \text{ dm}}{20,13 \text{ dm}}, \\ r^2 &\approx \frac{8,6 \text{ dm}^3}{20,13 \text{ dm}}. \end{aligned}$$

Vi regner ut at $\frac{8,6 \text{ dm}^3}{20,13 \text{ dm}} \approx 0,43 \text{ dm}^2$, så $r^2 \approx 0,43 \text{ dm}^2$. Da må

$$r \approx \sqrt{0,43 \text{ dm}^2} \approx 0,65 \text{ dm} = 6,5 \text{ cm}.$$

Nå kan vi fortsette med å regne ut omkretsen av sirkelen. Vi fant ut at $AB = R - r \approx 10,2 \text{ cm} - 6,5 \text{ cm} = 3,7 \text{ cm}$. Omkretsen av sirkelen er dermed $\text{omkrets} = 2 \pi \cdot AB \approx 2 \pi \cdot 3,7 \text{ cm} \approx 23,2 \text{ cm}$.

Svar: Cirka 23 cm.

