



www.matematikk.org

Eksamensoppgavesettet er utarbeidet av Utdanningsdirektoratet. Avvik fra det originale eksamenssettet er eventuelle spesifiseringer og illustrasjoner. Løsningsforslagene i sin helhet er utarbeidet av matematikk.org.

Nettkoden som står til høyre for oppgavetittelen brukes i søkefeltet på www.matematikk.org for å åpne oppgaven og se utfyllende løsningsforslag.

Våre samarbeidspartnere:



MAT1011 2015 Vår



Eksamenstid:

5 timer:

Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.

Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:

Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:

Del 1 har 10 oppgaver. Del 2 har 9 oppgaver.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Bruk av digitale verktøy som graftegner og regneark skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.

Veiledning om vurderingen:

Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
- vurderer om svar er rimelige

Andre opplysninger:

Kilder for bilder, tegninger osv.

- FN: (<http://www.dn.no>, 5.07.2016)
- Andre bilder, tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet



DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (1 poeng) Nettkode: E-4AZI

Skriv som prosent

a)

0,451

Løsningsforslag a)

Vi vet at $1 = 100 \%$, så alt vi trenger å gjøre for å konvertere desimaltall til prosent er å multiplisere med 100% . Dette tilsvarer å flytte kommategnet to hakk til høyre:

$$0,451 = 0,451 \cdot 1 = 0,451 \cdot 100 \% = 45,1 \%$$

Svar: 45,1 %

b)

$$\frac{5}{25}$$

Løsningsforslag b)

“Prosent” betyr “del av hundre”. Eksempelvis betyr 2% det samme som $\frac{2}{100}$. I vår oppgave kan vi få tallet på den samme formen ved å multiplisere med 4 over og under brøkstreken.

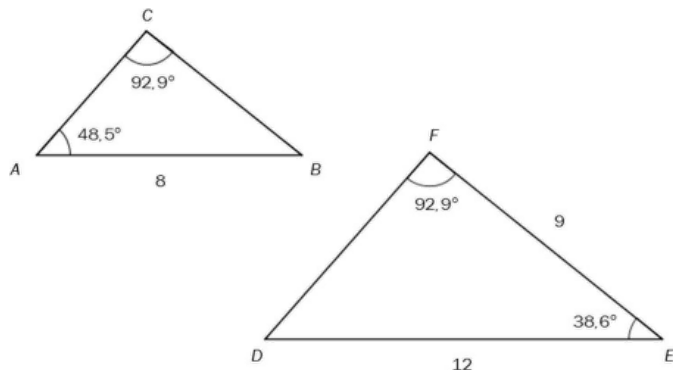
$$\frac{5}{25} = \frac{5 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{20}{100} = 20 \%$$

Vi kan også gjøre det på samme måte som forrige oppgave, ved å se at $\frac{5}{25} = 0,2 = 20 \%$.

Svar: 20 %



Oppgave 2 (2 poeng) Nettkode: E-4AZM



a)

Forklar at de to trekantene ovenfor er formlike.

Løsningsforslag a)

Denne oppgaven handler om vinkler i trekanter, og da skal vi ofte bruke at vinkelsummen i trekanter er 180° .

Svar:

To trekanter er formlike hvis de har parvis likestore vinkler, så vi må vise at $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ og $\angle C = \angle F$. Tegningen viser at $\angle C = \angle F = 92,9^\circ$. Summen av alle vinklene i en trekant er alltid lik 180° , så i $\triangle FDE$ har vi at

$$\angle D + \angle E + \angle F = 180^\circ.$$

I tegningen ser vi at $\angle F = 92,9^\circ$ og at $\angle E = 38,6^\circ$. Hvis vi setter dette inn i likningen $\angle D + \angle E + \angle F = 180^\circ$, får vi at

$$\angle D + 38,6^\circ + 92,9^\circ = 180^\circ,$$

eller med andre ord,

$$\angle D + 131,5^\circ = 180^\circ.$$

Vi løser likningen over med hensyn på $\angle D$ ved å trekke fra $131,5^\circ$ på hver side av likhetstegnet, og da får vi

$$\angle D = 180^\circ - 131,5^\circ.$$

Vi legger sammen gradene på høyre side og får til slutt

$$\angle D = 48,5^\circ.$$

Vi vet allerede at $\angle A = 48,5^\circ$, så $\angle A = \angle D$. Nå kan vi faktisk si oss ferdige, hvis vi merker oss at kun to vinkler må være parvis like store for at vi skal ha formlike trekanter. Vi kan sjekke at dette stemmer ved å bruke at vinkelsummen er lik 180° i den første trekanten. Som før må vi ha at

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ,$$



så

$$\angle B = 180^\circ - 48,5^\circ - 92,9^\circ.$$

Vi legger sammen gradene på høyre side og får

$$\angle B = 38,6^\circ;$$

dermed er også $\angle B = \angle E$. Nå har vi funnet ut at de to trekantene har parvis like store vinkler, så trekantene er formlike.

b)

Bestem lengden av siden BC ved regning.

Løsningsforslag b)

Fordi trekantene er formlike er forholdet mellom lengdene til tilsvarende sider det samme. For eksempel er $\frac{AB}{DE}$ det samme som $\frac{BC}{EF}$. Dette er nyttig for oss, siden vi allerede vet lengdene til AB , DE og EF ; de er henholdsvis 8, 12 og 9. Vi kan sette dette opp som en likning:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}.$$

Setter vi inn verdiene vi har fått oppgitt, får vi

$$\frac{8}{12} = \frac{BC}{9}.$$

Vi multipliserer med 9 på begge sider av likhetstegnet, og forkorter på høyre side.

$$\frac{8}{12} \cdot 9 = \frac{BC}{9} \cdot 9.$$

Vi regner ut at $\frac{8}{12} \cdot 9 = 6$ og forkorter $\frac{BC}{9} \cdot 9$ til BC . Til slutt får vi

$$BC = 6.$$

Svar: Lengden til BC er 6.



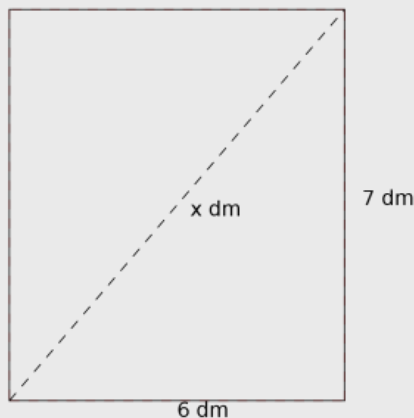
Oppgave 3 (2 poeng) Nettkode: E-4AZP

Et vindu har form som et rektangel. Vinduet er 6 dm bredt og 7 dm høyt.

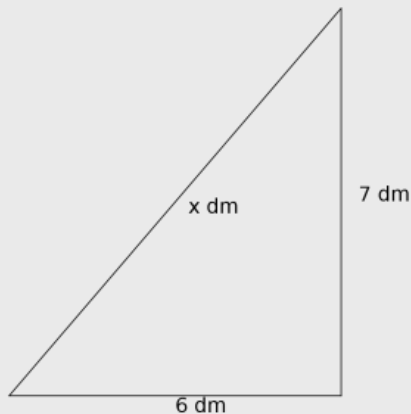
Gjør beregninger og avgjør om det er mulig å få en kvadratisk plate med sider 9 dm inn gjennom vinduet.

Løsningsforslag

Hvis vi holder kvadratet på skrå slik at det ligger på diagonalen til vinduet før vi prøver å ta det gjennom vinduet, er det mulig at vi får plass. Hvis vi skal få plass, må i så fall diagonalen på vinduet være lengre enn sidekantene til kvadratet, altså større enn 9 dm. La x være lengden til diagonalen, slik bildet under viser.



Siden alle hjørnevinklene i et rektangel er 90° , er trekanten under en rettvinklet trekant.



Dermed kan vi bruke *Pytagoras' setning*, som sier at

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

der a er lengden til trekantens hypotenus, og b og c er lengdene til katetene. I vårt tilfelle er $a = x$ dm, altså den ukjente hypotenusen, mens b og c er henholdsvis 6 dm og 7 dm. Vi setter dette inn i

$$a^2 = b^2 + c^2,$$



og får

$$x^2 = 6^2 + 7^2.$$

Vi regner ut høyre side over.

$$6^2 + 7^2 = 6 \cdot 6 + 7 \cdot 7 = 36 + 49 = 85.$$

Dette betyr at

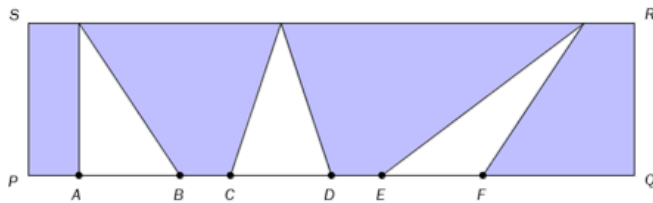
$$x^2 = 85.$$

Her kunne vi ha regnet ut x ved å finne kvadratroten av 85, men det eneste vi egentlig trenger å vite om x , er om den er større eller mindre enn 9. Siden $9^2 = 9 \cdot 9 = 81 < 85$, må x være mindre enn 9, så kvadratet vil få plass gjennom vinduet.

Svar: Ja, det er mulig, siden diagonalen i vinduet er lengere enn 9 dm.



Oppgave 4 (2 poeng) Nettkode: E-4AZX



Figuren ovenfor viser et rektangel $PQRS$. $PQ = 12$ cm, $QR = 3$ cm og

$$AB = CD = EF = 2 \text{ cm}$$

Bestem arealet av det blå området

Løsningsforslag

Arealet til det blå området er gitt ved arealet til hele rektangelet $PQRS$ minus arealene til de tre mindre trekantene. Vi skal regne ut arealet til alle figurene for seg, og deretter regne ut arealet til det blå området.

Grunnlinjen til rektangelet har lengde $PQ = 12$ cm, og høyden er $QR = 3$ cm. Arealet til rektangelet blir da

$$PQ \cdot QR = 12 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 36 \text{ cm}^2.$$

Vi anser sideflatene til trekantene som ligger på linjestykket PQ til å være grunnlinje. Med dette valget har alle trekantene lik grunnlinje, så selv om de tre trekantene ser ganske forskjellige ut, har alle tre likt areal. Grunnlinjen er $AB = CD = EF = 2$ cm og høyden er 3 cm, så arealet av hvert kvadrat er

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 3 \text{ cm}^2.$$

Arealet til det blå området blir nå

$$\begin{aligned} & 36 \text{ cm}^2 - 3 \text{ cm}^2 - 3 \text{ cm}^2 - 3 \text{ cm}^2 \\ &= 36 \text{ cm}^2 - 3 \cdot 3 \text{ cm}^2 = 36 \text{ cm}^2 - 9 \text{ cm}^2 = 27 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Svar: Arealet av det blå området er 27 cm^2 .



Oppgave 5 (4 poeng) Nettkode: E-4B03

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

a)

Skriv av verditabellen nedenfor i besvarelsen din, og fyll inn tallene som mangler.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$							

Løsningsforslag a)

Den eneste måten å løse dette på er å sette inn de oppgitte x -verdiene inn for x i funksjonsuttrykket $x^2 + 2x - 3$. Vi starter med $x = -4$, og vi må huske at når vi setter inn negative tall i et funksjonsuttrykk, så skal vi ha parenteser rundt tallet. På denne måten unngår vi fortegnsfeil. Med dette i tankene setter vi inn $x = -4$ i funksjonsuttrykket, og får

$$\begin{aligned} f(-4) &= (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 3 \\ &= (-4) \cdot (-4) + 2 \cdot (-4) - 3. \end{aligned}$$

Husk at når vi multipliserer to negative tall får vi et positivt, så da får vi

$$f(-4) = 16 - 8 - 3 = 5.$$

Vi setter resultatet inn i skjemaet:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5						

Vi gjør det samme for $x = -3$, og får

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 \\ &= 9 - 6 - 3 = 0. \end{aligned}$$

Vi fortsetter, og får

$$\begin{aligned} f(-2) &= 4 - 4 - 3 = -3, \\ f(-1) &= 1 - 2 - 3 = -4, \\ f(0) &= 0 + 0 - 3 = -3, \\ f(1) &= 1 + 2 - 3 = 0 \text{ og} \\ f(2) &= 4 + 4 - 3 = 5, \end{aligned}$$

så svaret blir

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5



Svar:

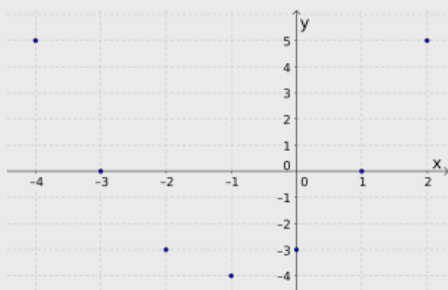
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

b)Tegn grafen til f for $-4 \leq x \leq 2$ **Løsningsforslag b)**

Først må vi tegne et koordinatsystem. Vi skal tegne grafen når x er mellom -4 og 2; derfor tegner vi x -aksen for disse verdiene. Fra verditabellen vet vi at funksjonen varierer mellom -4 og 5, og vi tegner y -aksen mellom disse verdiene. Vi setter navn på aksene for å vise hvilke variabler de representerer, og merker jevnlig av hvor vi er på aksene.



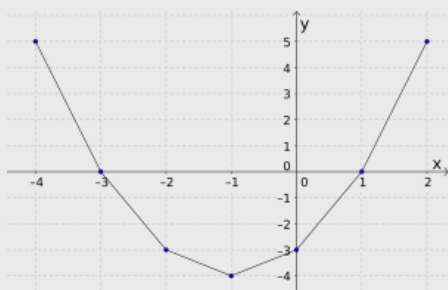
Vi skal tegne grafen til funksjonen, og ut i fra verditabellen vet vi cirka hvordan grafen går. Derfor markerer vi punkter på plassene som verditabellen indikerer. For eksempel sier tabellen at når $x = -4$, så er $y = f(-4) = 5$, så vi må markere punktet $(-4, 5)$ i koordinatsystemet. Vi gjør det samme for punktene $(-3, 0)$, $(-2, -3)$, $(-1, -4)$, $(0, -3)$, $(1, 0)$ og $(2, 5)$.



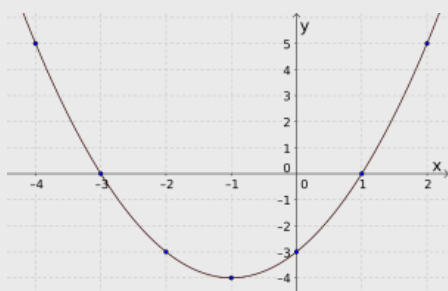
Nå kan vi se cirka hvordan grafen går, og vi må prøve å fylle inn grafen der vi ikke har punktene å støtte oss på. Én måte å gjøre det på er å tegne rette streker mellom punktene, men dette gjør ikke funksjonen like pen som den egentlig er. Helst skal vi



prøve å glatte ut kantene så mye som mulig. Under er et bilde av hvordan det ser ut når man tegner rette streker i kontrast til hvordan grafen egentlig skal tegnes.

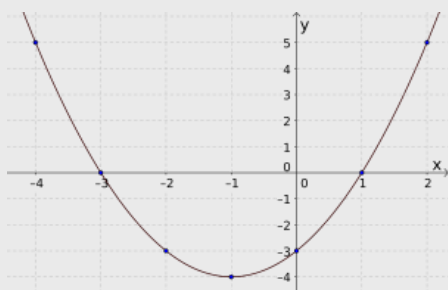


Her har vi tegnet rette linjer mellom punktene.



Her er den egentlige grafen tegnet. Linjene er mye glattere.

Svar:



Oppgave 6 (3 poeng) Nettkode: E-4B0B



Tenk deg at du har ni flasker med smoothie i kjøleskapet, to «Surf», tre «Jump» og fire «Catch».

Du tar tilfeldig to flasker.

a)

Bestem sannsynligheten for at du ikke tar en «Jump»-smoothie.

Løsningsforslag a)

Vi har totalt ni flasker smoothie, og tre av dem er av type "Jump". Det betyr at de seks resterende *ikke* er av type "Jump". Hvis vi lar smoothier som er av type "Jump" betegnes med J og de resterende med X , kan vi representere situasjonen slik:

$XXXXXXJJJ$

Vi skal trekke ut to tilfeldige av disse, og skal bestemme sannsynligheten for at ingen av dem er en "Jump"-smoothie. Det er det samme som å bestemme sannsynligheten for at begge smoothiene vi trekker ut, er blant de seks som ikke er av typen "Jump". Første gang vi trekker, er sannsynligheten for å trekke en smoothie som ikke er av type "Jump" (det vil si, sannsynligheten for å trekke en X ut av bokstavene over) lik $\frac{6}{9}$. Situasjonen etter vi har trukket en "Jump"-smoothie er slik:

$XXXXXJJJ$

Vi har altså fjernet en X . Når vi trekker den neste, vil da sannsynligheten for at vi ikke trekker en "Jump"-smoothie (det vil si, sannsynligheten for å trekke en X) lik $\frac{5}{8}$.

La oss oppsummere: Sannsynligheten for å ikke trekke en "Jump"-smoothie første gang, er $\frac{6}{9}$. Hvis vi ikke trekker en "Jump"-smoothie første gang, vil sannsynligheten for at vi ikke trekker en den andre gangen være $\frac{5}{8}$. Sannsynligheten for at vi ikke trekker en "Jump"-smoothie overhodet er lik sannsynligheten for at begge disse hendelsene inntreffer, så vi vil få riktig svar om vi multipliserer sammen de to sannsynlighetene. Svaret blir derfor $\frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{12}$.

Svar: Sannsynligheten for at vi ikke tar en "Jump"-smoothie er $\frac{5}{12}$.



b)

Bestem sannsynligheten for at du tar én «Surf»- og én «Catch»-smoothie.

Løsningsforslag b)

Vi må ta hensyn til at det er to mulige måter å trekke én "Surf"- og én "Catch"-smoothie.

La S , J og C betegne henholdsvis "Surf"-smoothier, "Jump"-smoothier og "Catch"-smoothier. Situasjonen kan representeres slik:

$SSJJJCCCC$

Sannsynligheten for å trekke en "Surf"-smoothie første gangen er $\frac{2}{9}$, siden vi har 2 "Surf"-smoothier blant 9 smoothier. I så fall er vi i følgende situasjon:

$SJJJCCCC$

Sannsynligheten for å trekke en "Catch"-smoothie nå er derfor $\frac{4}{8}$, så til slutt blir sannsynligheten for å først trekke en "Surf"-smoothie og deretter en "Catch"-smoothie lik $\frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{9}$.

På tilsvarende måte kan vi regne ut at sannsynligheten for først å trekke en "Catch"-smoothie og deretter en "Surf"-smoothie lik $\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{9}$. Vi vil vite sannsynligheten for at én av disse hendelsene inntreffer. Siden hendelsene er uavhengige, blir svaret $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$.

Svar: Sannsynligheten for å trekke én "Catch"-smoothie og én "Surf"-smoothie er lik $\frac{2}{9}$.



Oppgave 7 (2 poeng) Nettkode: E-4B0F

I 2012 kostet en vare 6 kroner. Indeksen for varen var da 120. I 2014 var indeksen for varen 160.

Hvor mye skulle varen ha kostet i 2014 dersom prisen hadde fulgt indeksen?

Løsningsforslag

Forholdet mellom prisen til et produkt og produktets indeks er konstant. I vårt tilfelle betyr dette at

$$\frac{\text{indeks i 2012}}{\text{pris i 2012}} = \frac{\text{indeks i 2014}}{\text{pris i 2014}}.$$

La x betegne prisen i 2014. Oppgaveteksten gir oss informasjon om indeks i 2012, pris i 2012 og indeks i 2014, og om vi setter dette inn i $\frac{\text{indeks i 2012}}{\text{pris i 2012}} = \frac{\text{indeks i 2014}}{\text{pris i 2014}}$ får vi

$$\frac{120}{6} = \frac{160}{x}.$$

Vi vil finne et tall x som gjør at dette stemmer. Merk først at $\frac{120}{6} = \frac{6 \cdot 20}{6} = 20$, så vi kan skrive likningen $\frac{\text{indeks i 2012}}{\text{pris i 2012}} = \frac{\text{indeks i 2014}}{\text{pris i 2014}}$ som

$$20 = \frac{160}{x}.$$

Vi har en x i nevneren på høyre side. Dette er vanskelig å jobbe med, så vi multipliserer med x på begge sider av likhetstegnet.

$$20 \cdot x = \frac{160}{x} \cdot x$$

Nå kan vi forkorte høyre side, og vi har at

$$20x = 160,$$

så vi har fått x opp fra nevneren. For å få x til å stå alene på venstre side av likhetstegnet, dividerer vi med 20 på begge sider.

$$\frac{20x}{20} = \frac{160}{20}$$

Vi ser at $\frac{20x}{20} = x$ og $\frac{160}{20} = 8$, så likningen over gir $x = 8$. Altså skulle varen ha kostet 8 kroner i 2014, dersom prisen hadde fulgt indeksen.

Vi merker oss en liten ting som kan gjøre utregningene raskere. I likningen $\frac{\text{indeks i 2012}}{\text{pris i 2012}} = \frac{\text{indeks i 2014}}{\text{pris i 2014}}$, så har vi to brøker som er like hverandre. Den ukjente variabelen x er i nevneren, og det gir litt mer regning enn om den hadde vært i telleren. Det har seg slik at hvis to brøker er like hverandre, så er også de omvendte



brøkene like hverandre (så sant ingen av tellerene er 0), så vi kunne like godt ha løst likningen

$$\frac{6}{120} = \frac{x}{160}$$

og fått

$$x = \frac{6}{120} \cdot 160 = 8,$$

akkurat som over.

Svar: Varen skulle ha kostet 8 kroner i 2014 dersom prisen hadde fulgt indeksen.



Oppgave 8 (3 poeng) Nettkode: E-4B0J

En formel er gitt ved

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

a)

Bestem s når $v_0 = 0$, $t = 8$ og $a = 10$

Løsningsforslag a)

Vi har fått oppgitt en formel for s med mange forskjellige ukjente, men vi har fått vite hvilke verdier de ukjente har. Det eneste vi trenger å gjøre er å sette inn det vi vet, og så regne ut. Vi setter inn $v_0 = 0$, $t = 8$ og $a = 10$:

$$\begin{aligned}s &= v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ &= 0 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8^2.\end{aligned}$$

Alt som multipliseres med 0 blir 0, og 8^2 betyr $8 \cdot 8$, så dette blir

$$s = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot 8 = 5 \cdot 8 \cdot 8 = 5 \cdot 64 = 320.$$

Svar: Vi får at $s = 320$.

b)

Bestem a når $v_0 = 20$, $t = 4$ og $s = 144$

Løsningsforslag b)

Vi starter igjen med å sette inn all informasjonen vi har fått.

$$144 = 20 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4^2$$

Vi skal finne den a -en som passer inn i likningen over. Dette er det samme som å løse en likning med hensyn på x , men vi har byttet ut bokstaven x med bokstaven a . En god strategi for å løse likninger er å først samle alle leddene med den ukjente variabelen i på én side. Dette gjør vi her ved å subtrahere $20 \cdot 4 = 80$ på begge sider av likhetstegnet. Da får vi

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot 4^2 = 144 - 80.$$



Vi legger sammen høyre side og får

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot 4^2 = 64.$$

Uttrykket på venstre side er litt rotete. Siden multiplikasjonens rekkefølge er likegyldig, kan vi skrive den venstre siden i $\frac{1}{2} \cdot a \cdot 4^2 = 64$ som

$$\frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot a,$$

som er lik $8 \cdot a$. Dermed kan $\frac{1}{2} \cdot a \cdot 4^2 = 64$ skrives som

$$8 \cdot a = 64.$$

For å få a alene på venstre side er alt vi trenger å gjøre å dividere med 8.

$$\frac{8 \cdot a}{8} = \frac{64}{8} = 8.$$

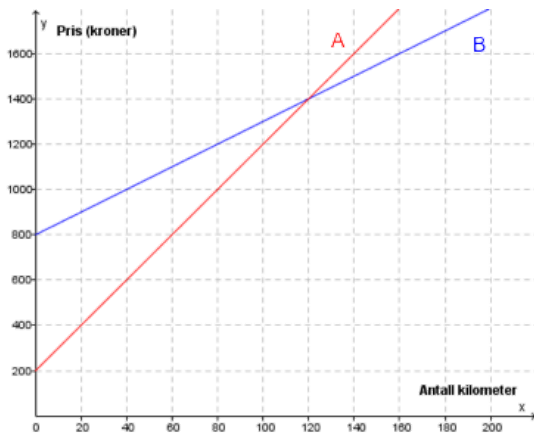
Dermed har vi funnet ut at $a = 8$.

Svar: Vi har at $a = 8$.



Oppgave 9 (3 poeng) Nettkode: E-4B2A

Anders skal leie en bil hos bilfirma A eller bilfirma B. Grafene nedenfor viser hvor mye han må betale til hvert firma dersom han leier bilen én dag og kjører x kilometer.



a)

Sett opp et funksjonsuttrykk for hver av de to grafene.

Løsningsforslag a)

Siden grafene er lineære, er funksjonsuttrykkene deres på formen $ax + b$. Vi tar grafen A først. La oss si at funksjonen til A er gitt ved $f(x) = ax + b$, der a og b er konstanter. Vi må finne disse konstantene. Vi ser at A krysser y -aksen i $y = 200$; dette betyr at når $x = 0$ så er $y = f(0) = 200$. På den andre siden vet vi allerede fra funksjonsuttrykket at $f(0) = a \cdot 0 + b$, så vi får

$$a \cdot 0 + b = 200.$$

Siden $a \cdot 0 + b = b$, er konstantleddet lik 200! Nå gjenstår det å finne a , som er stigningstallet til grafen. Stigningstallet til en graf er hvor mye y -verdien øker når x -verdien øker med 1. En annen måte å se på det på er forholdet mellom endring i y -verdi og endring i x -verdi. Siden ligningen er lineær har det ikke noe å si hvilken endring i x -verdi vi velger. La oss si at vi starter med $x = 0$ og øker med 20. Hvor mye øker y med da? Vi har $f(0) = 200$ og $f(20) = 400$, så y -verdien endrer seg med 200. Forholdet mellom endringene er da

$$\frac{\text{endring i } y\text{-verdi}}{\text{endring i } x\text{-verdi}} = \frac{200}{20} = 10$$

så stigningstallet er $a = 10$. Dermed er funksjonsuttrykket til A lik $f(x) = 10x + 200$.

For B gjør vi det samme. Vi ser at grafen krysser y -aksen i $y = 800$, så konstantleddet til funksjonen er 800. Når vi lar x øke fra 0 til 40, så øker y -verdien fra 800 til 1000 – altså øker y -verdien med 200. Stigningstallet er forholdet mellom disse, altså $\frac{200}{40} = 5$. Dermed er funksjonsuttrykket til B lik $g(x) = 5x + 800$.



Svar: For A er funksjonsuttrykket $y = 10x + 200$, og for B er funksjonsuttrykket $y = 5x + 800$.

b)

Hva forteller den grafiske framstillingen om de to pristilbudene?

Løsningsforslag b)

Grafene krysser hverandre når $x = 120$. Før det ligger grafen A under grafen B , og det betyr at prisen er lavere hos bilfirma A enn hos bilfirma B hvis Anders kjører kortere enn 120 kilometer. Når $x \geq 120$ er derimot grafen B lavest, så hvis Anders skal kjøre lengre enn 120 kilometer vil det lønne seg for han å benytte seg av bilfirma B .

Svar: For $x < 120$ er A billigst; når $x > 120$ er B billigst.

c)

Er antall kilometer han kjører, og prisen han totalt må betale, proporsjonale størrelser? Begrunn svaret ditt.

Løsningsforslag c)

La oss se på A . Hvis antall kilometer og totalpris hadde vært proporsjonale, skulle det vært slik at $\frac{f(x)}{x}$ skulle vært konstant for alle x man putter inn, altså skulle $\frac{f(10)}{10} = \frac{f(20)}{20}$ og $\frac{f(20)}{20} = \frac{f(100)}{100}$. Dette kan vi sjekke ved å sette inn verdier for x ! Vi får at $\frac{f(20)}{20} = \frac{400}{20} = 20$ og $\frac{f(100)}{100} = \frac{1200}{100} = 12$, og disse er ikke like. Derfor er ikke størrelsene proporsjonale. (Det samme gjelder også for B -grafene.)

Vi kan også se at størrelsene ikke er proporsjonale ved at de ikke starter i origo.

Svar: Nei, størrelsene er ikke proporsjonale.



Oppgave 10 (2 poeng) [Nettkode: E-4B2L](#)

Du har en boks med form som et rett, firkantet prisme og en boks med form som en sylinder. De to boksene er like høye.

Grunnflaten i det rette, firkantede prismet er et rektangel med sider 7 cm og 4 cm. Radius i sylindere er 3 cm.

Hvilken boks har størst volum?

Løsningsforslag

For å sammenligne volumet til de to boksene, må vi regne dem ut. Formelen for volumet til slike bokser er gitt ved

$$V = G \cdot h,$$

der for G er arealet til grunnflaten, og h er høyden til boksen. La oss starte med det firkantede prismet. Grunnflaten til boksen er et rektangel med sider 7 cm og 4 cm, så arealet til grunnflaten er $7 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 28 \text{ cm}^2$. Dermed blir volumet til det firkantede prismet lik $28 \text{ cm}^2 \cdot h$, der h er høyden. Vi vet ikke hva høyden er, så vi lar dette uttrykket stå som det er inntil videre.

Grunnflaten i sylindere er en sirkel med radius 3 cm. Formelen for arealet til en sirkel med radius r er $A = \pi r^2$, så arealet til grunnflaten er $\pi \cdot (3 \text{ cm})^2 = 9\pi \text{ cm}^2$.

Vi vet at $\pi \approx 3,14$, så volumet blir cirka

$$V = 9\pi \text{ cm}^2 \cdot h \approx 9 \cdot 3,14 \text{ cm}^2 \cdot h = 28,26 \text{ cm}^2 \cdot h, \text{ der } h \text{ er høyden.}$$

Vi vet fremdeles ikke hvor høye boksene er, men uansett hvor høy eller lav boksene er, vil $28,26 \text{ cm}^2 \cdot h$ være større enn $28 \text{ cm}^2 \cdot h$ – derfor har den sylindereformede boksen størst volum.

Svar: Den sylindereformede boksen har størst volum.



DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng) [Nettkode: E-4B20](#)

Da forslaget til statsbudsjett for 2015 ble lagt fram, var dette et av oppslagene på nettsidene til avisen Dagens Næringsliv:

Støtten til FN kuttes

Regjeringen vil kutte de direkte overføringene til FN-organisasjoner med 906 millioner kroner - et kutt på over 20 prosent.

Blant FN-organisasjonene som får størst kutt, er UNICEF. Støtten til FNs barneorganisasjon blir bortimot halvert, fra 1 milliard til 520 millioner kroner.

a)

Hva kan du si om størrelsen på de direkte overføringene til FN-organisasjoner før dette?

Løsningsforslag a)

Teksten sier at kuttet i de direkte overføringene på 906 millioner er cirka 20 % av totalbeløpet. Hvis vi lar x være det totale beløpet før kuttet i millioner, så kan vi skrive dette mer matematisk som

$$20 \% \cdot x \approx 906.$$

Vi går "veien om 1", og gjør om 20 % til 0,2. Da får vi at

$$0,2 \cdot x \approx 906.$$

Vi vil finne et tall x som passer inn i ligningen over, og derfor vil vi ikke at det skal stå noe foran x på venstre side. Derfor multipliserer vi med 5 på begge sider.

$$5 \cdot 0,2 \cdot x \approx 5 \cdot 906,$$

$$x \approx 4530.$$

Altså kan vi konkludere med at regjeringen hadde direkte overføringer på cirka 4,53 milliarder kroner til FN-organisasjoner før kuttet.

Svar: Størrelsen på de direkte overføringene lå på cirka 4,53 milliarder kroner før kuttet.

b)

Med hvor mange prosent ville regjeringen redusere støtten til FNs barneorganisasjon UNICEF?



Løsningsforslag b)

I oppgaveteksten står det at støtten til UNICEF er bortimot halvvvert. Å halvvere noe er det samme som å multiplisere det med $\frac{1}{2} = 50 \%$, så svaret vi leter etter skal være cirka 50 %. Dette kan være en godt sjekk for å finne ut om det nøyaktige svaret man kommer fram til er riktig.

Det står at støtten til UNICEF ble redusert fra 1 milliard til 520 millioner kroner. Husk at 1 milliard er det samme som 1000 millioner. Dermed er støtten redusert med

$$1000 - 520 = 480$$

millioner kroner. Oppgaven går ut på å finne ut hvor mange prosent av 1 milliard dette er. Vi kan gjøre det på flere måter. Den generelle fremgangsmetoden for å finne ut hvor stor prosentandel et tall a er av et annet tall b , er å se på forholdet mellom de to: tallet a er $\frac{a}{b} \cdot 100 \%$ av b . Skal vi for eksempel finne ut hvor mange prosent 1 er av 4, får vi $\frac{1}{4} \cdot 100 \% = 25 \%$, altså en fjerdedel. I vårt tilfelle får vi at 480 millioner er

$$\frac{480}{1000} \cdot 100 \% = 4,8 \cdot 100 \% = 48 \%$$

av 1 milliard. Dette er cirka 50 %, akkurat som vi trodde.

Denne måten å gjøre det på vil alltid fungere, men i denne oppgaven kan det være enklere å se at 480 av 1000 er det samme som å ta 48 av 100; siden "prosent" betyr "per hundre" ser vi at svaret blir 48 %. På denne måten kan man spare tid på eksamen.

Svar: 48 %.



Oppgave 2 (4 poeng) Nettkode: E-4B2R

Ved en skole er det 437 elever. 164 av elevene drikker melk hver dag. 316 av elevene drikker juice hver dag. 67 av elevene drikker verken melk eller juice hver dag.

a)

Lag et venndiagram eller en krysstabell som beskriver situasjonen ovenfor.

Løsningsforslag a)

Vi setter opp en krysstabell. Vi har to muligheter for melk: Enten drikker man melk, eller så gjør man det ikke. Det samme gjelder for juice. Da kan vi sette opp det følgende skjemaet:

	Melk	Ikke melk	Totalt
Juice			
Ikke juice			
Totalt			

Oppgaveteksten sier at 164 av elevene drikker melk hver dag. Siden det er 437 elever totalt, er det $437 - 164 = 273$ elever som *ikke* drikker melk hver dag. Dette kan vi fylle inn i skjemaet. Vi går ned til rekken som sier "Totalt" på venstre side. I kolonnen "Melk" skriver vi 164, og i kolonnen "Ikke melk" skriver vi 273. I kolonnen "Totalt" kan vi skrive $173 + 164 = 437$, siden det totalt er 437 som enten drikker melk eller ikke drikker melk.

	Melk	Ikke melk	Totalt
Juice			
Ikke juice			
Totalt	164	273	437

Det samme gjør vi for "Totalt"-kolonnen loddrett nedover. I første rute skriver vi 316, siden det er så mange elever som drikker juice. I "Ikke juice"-raden skriver vi $437 - 316 = 121$. Vi har fått én opplysning til, nemlig at det er 67 elever som verken drikker melk eller juice hver dag. Dermed kan vi føre inn 67 i kolonnen "Ikke melk" der den krysser med "Ikke juice".

	Melk	Ikke melk	Totalt
Juice			316
Ikke juice		67	121
Totalt	164	273	437

Nå er det tre ruter igjen som vi må fylle inn. La oss først ta rekken der det står "Ikke juice" – vi skal fylle inn den første ruten, og i de neste rutene står det henholdsvis 67 og 121. Ved å lese hva som står øverst i kolonnen med 121 (det står "Totalt"), vet vi



at hvis vi summerer det som skal stå i den første ruten med det som står i den andre ruten, skal vi få 121. La x betegne det som skal stå i første rute, som vist under.

	Melk	Ikke melk	Totalt
Juice			316
Ikke juice	x	67	121
Totalt	164	273	437

Vi skal altså finne en verdi for x sånn at

$$x + 67 = 121.$$

Vi løser denne ligningen ved å trekke fra 67 på begge sider, og får

$$x = 121 - 67.$$

Vi ser at $121 - 67 = 54$, og da blir

$$x = 54,$$

så det skal stå 54 i den første ruten.

	Melk	Ikke melk	Totalt
Juice			316
Ikke juice	54	67	121
Totalt	164	273	437

Nå kan vi gjøre det samme for kolonnene "Melk" og "Ikke melk". Hvis y er tallet som skal stå der kolonnen "Melk" krysser raden "Juice", og " z " er det som skal stå der "Ikke melk" krysser "Juice", så får vi

$$y + 54 = 164 \text{ og}$$

$$z + 67 = 273.$$

Vi flytter tallene slik at de ukjente står alene på venstre side, og får

$$y = 164 - 54 \text{ og}$$

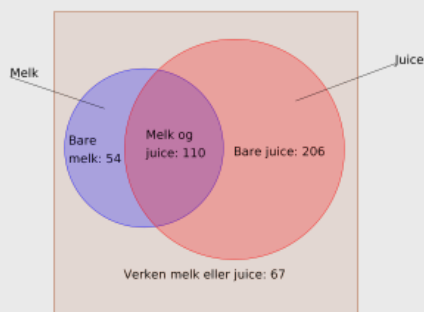
$$z = 273 - 67.$$

Vi trekker sammen det som står på de høyre sidene, og får $y = 110$ Til slutt fyller
 $z = 206$.
vi dette inn i tabellen vår.

	Melk	Ikke melk	Totalt
Juice	110	206	316
Ikke juice	54	67	121
Totalt	164	273	437



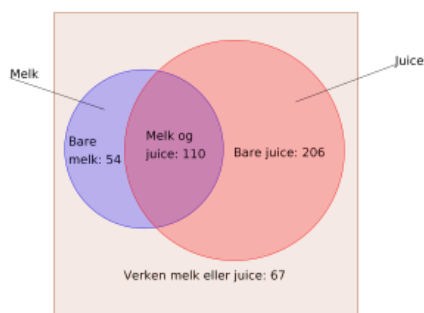
Vi kunne også valgt å lage et venndiagram. Utrekningene hadde vært de samme, og resultatet ville vært noe som følgende:



Svar: Enten

	Melk	Ikke melk	Totalt
Juice	110	206	316
Ikke juice	54	67	121
Totalt	164	273	437

eller



b)

Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev ikke drikker melk hver dag.

Løsningsforslag b)

Det er totalt 437 elever på skolen, og i følge krysstabellen vår er det 273 elever som ikke drikker melk hver dag. Hvis vi velger en tilfeldig elev, er da $\frac{273}{437} \cdot 100\%$ sannsynligheten for at denne eleven ikke drikker melk hver dag. Dette får vi fra at likningen sannsynlighet = $\frac{\text{gunstige}}{\text{mulige}}$. Taster vi dette inn på kalkulatoren, får vi

$$\frac{273}{437} \cdot 100\% = 62,471...\% \approx 62,47\%$$

Svar: Sannsynligheten er cirka 62,47 % for at en tilfeldig valgt elev ikke drikker melk hver dag.



c)

Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev som drikker melk hver dag, også drikker juice hver dag.

Løsningsforslag c)

Vi vet at det er totalt 164 av elevene som drikker melk hver dag, og vi skal regne ut sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev blant disse også drikker juice hver dag. I krysstabellen vår går vi til "Melk"-kolonnen, og under "Juice"-raden står det 110. Det betyr at det er 110 som drikker juice av de 164 som også drikker juice. Dermed blir sannsynligheten for at en tilfeldig valgt juicedrikker også drikker melk lik

$$\frac{110}{164} \cdot 100\% = 67,073...\% \approx 67,07\%$$

Svar: Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt melkedrikker også drikker juice er cirka 67,07 %.



Oppgave 3 (2 poeng) Nettkode: E-4B2V

Prisen på en vare er endret flere ganger. Først ble prisen satt opp med 20 %. Senere ble den satt opp med 10 % til. En stund etter ble prisen så satt ned med 30 %. Nå koster varen 3 234 kroner.

Hva kostet varen før prisen endret seg første gang?

Løsningsforslag

La den opprinnelige vareprisen være x kroner. Først ble prisen satt opp 20 %. Vi vet at 20 % av x er $20 \% \cdot x$, og den nye prisen er dette tallet addert med x . Det betyr at den nye prisen har blitt $x + 20 \% \cdot x$. Husk at 20 % er det samme som $\frac{1}{5}$, så vi kan skrive prisen som

$$x + \frac{1}{5}x = \frac{6}{5}x = 1,2 \cdot x.$$

Dette kan vi også se ved at

$$\text{vekstfaktor} = 1 + \text{prosentfaktor},$$

og prosentfaktoren til 20 % er 0,2.

Senere ble prisen satt opp 10 % til. Vi merker oss at varen ble satt opp 10 % i forhold til prisen etter den *første* prisendringen. Den nye vekstfaktoren blir 1,1, og den nye prisen blir

$$1,1 \cdot (1,2 \cdot x) = 1,32 \cdot x.$$

Her merker vi oss at $1,32 = 132 \%$, så den nye prisen er 132 % av den originale. Det betyr at den nye prisen er 32 % høyere enn den originale prisen, og ikke 30 %, som man kanskje kunne trodd. Til slutt ble varen satt ned med 30 %, så da må vi trekke fra 30 % av prisen ovenfor. Prosentfaktoren til 30 % er 0,3, og vekstfaktoren blir $1 - 0,3 = 0,7$. Legg merke til at vi *subtraherer* prosentfaktoren, siden prisen reduseres. Sluttprisen blir dermed

$$0,7 \cdot 1,32 \cdot x$$

som igjen blir $0,924 \cdot x$. Men vi vet allerede at sluttprisen er lik 3234 kroner, så vi får følgende ligning:

$$0,924 \cdot x = 3234.$$

Vi vil løse denne ligningen for x , så vi dividerer med 0,924 på begge sider og får

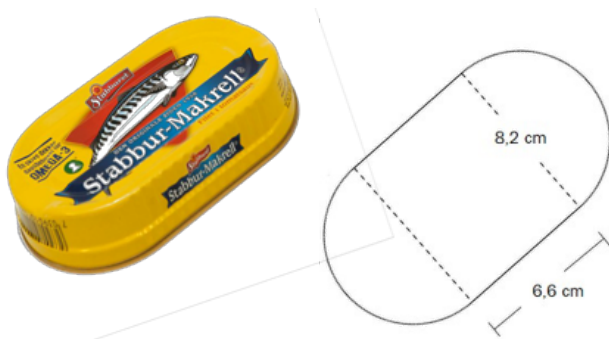
$$x = \frac{3234}{0,924} = 3500.$$

Altså kostet varen i utgangspunktet 3500 kroner. Det betyr at varen har blitt billigere!

Svar: Varen kostet 3500 kroner.



Oppgave 4 (4 poeng) Nettkode: E-4B2Y



Ovenfor ser du en boks «Stabbur-Makrell». Bunnen av boksen er tilnærmet lik et rektangel og to halvsirkler og har form som vist på figuren til høyre. Rektangelet har lengde 8,2 cm og bredde 6,6 cm.

Anta at sideflaten står vinkelrett på topp og bunn, og at boksen er 2,1 cm høy.

a)

Bestem volumet av boksen.

Løsningsforslag a)

Volumet V til en figur som i oppgaven er gitt ved

$$V = g \cdot h, \quad (7)$$

hvor g er arealet til grunnflaten og h er høyden til figuren. For å finne volumet til boksen er det derfor lurt å starte med å finne arealet til bunnen. Bunnen består av et rektangel og to halvsirkler. Arealet til rektangelet er lengden multiplisert med bredden, altså

$$6,6 \text{ cm} \cdot 8,2 \text{ cm} = 54,12 \text{ cm}^2.$$

Så må vi regne ut arealet av halvsirklene. Vi kan regne ut arealet av hver halvsirkel for seg, men hvis vi setter dem sammen får vi en hel sirkel, så vi trenger bare å regne ut arealet til denne. Fra tegningen i oppgaven ser vi at hver halvsirkel er 8,2 cm høy, eller med andre ord at diameteren i hver halvsirkel er 8,2 cm. Setter vi halvsirklene sammen får vi altså en sirkel med radius $\frac{8,2 \text{ cm}}{2} = 4,1 \text{ cm}$. Formelen for arealet til en sirkel med radius r er gitt ved $\pi \cdot r^2$, så arealet til sirkelen vår er $\pi \cdot (4,1 \text{ cm})^2 \approx 52,81 \text{ cm}^2$.

Hvis vi ville regne ut hver halvsirkel for seg, ville vi fått at hver halvsirkel har areal $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (4,1 \text{ cm})^2$. Vi har to halvsirkler, hvis vi multipliserer dette stykket med to, får vi det samme svaret som ovenfor.

Nå har vi funnet arealet til alle figurene i bunnen av boksen, og det totale arealet av bunnen til boksen er disse tallene addert sammen. Med andre ord er arealet til grunnflaten lik cirka

$$54,12 \text{ cm}^2 + 52,81 \text{ cm}^2 = 106,93 \text{ cm}^2.$$



Høyden til boksen er 2,1 cm, så volumet V blir, ut i fra (7) lik

$$V = 106,93 \text{ cm}^2 \cdot 2,1 \text{ cm} \approx 224,55 \text{ cm}^3.$$

Svar: Volumet er cirka $224,55 \text{ cm}^3$.

b)

Bestem overflaten av boksen.

Løsningsforslag b)

Vi antar at arealet til toppen er det samme som arealet til bunnen. Arealet til bunnen vet vi fra forrige oppgave er cirka $106,93 \text{ cm}^2$, så det gjenstår bare å finne arealet til sidene av boksen.

Vi vil finne arealet til sidekantene av boksen. Vi ser at hvis vi "bretter ut" sidekanten, så får vi et rektangel, og arealet av et rektangel er grunnlinjen multiplisert med høyden. Grunnlinjen tilsvarer omkretsen rundt bunnen av boksen, og høyden i rektangelet tilsvarer høyden i boksen. Derfor kan vi finne arealet til sidene ved å finne omkretsen til bunnflaten, og multiplisere opp med høyden. Rektangelet i bunnen av boksen bidrar med to sider til omkretsen. Begge disse sidene er 6,6 cm lange. Bidraget fra de to sirkelhalvdelene regner vi ut ved å regne ut omkretsen til sirkelen med radius 8,2 cm – vi kan nemlig fremdeles sette sammen de to sirkelhalvdelene til en hel sirkel i stedet for å regne ut arealbidraget til hver halvdel. Formelen for omkretsen av en sirkel med radius r er $2 \cdot \pi \cdot r$, så bidraget fra sirkelhalvdelene til omkretsen er $2 \cdot \pi \cdot 4,1 \text{ cm} \approx 25,76 \text{ cm}$.

Nå kan vi sette sammen det vi har funnet ut. Omkretsen til bunnflaten av boksen er bidraget fra sirkelhalvdelene pluss de to bidragene fra sidene til rektangelet, og totalt blir omkretsen blir cirka $25,76 \text{ cm} + 2 \cdot 6,6 \text{ cm} = 38,96 \text{ cm}$. For å finne arealet av sidekanten må vi multiplisere med høyden av boksen, og det endelige svaret blir $38,96 \text{ cm} \cdot 2,1 \text{ cm} \approx 81,82 \text{ cm}^2$.

Overflatearealet til hele boksen blir arealet til toppen, til bunnen og til siden summert opp. Altså blir det endelige arealet lik cirka $2 \cdot 106,93 \text{ cm}^2 + 81,82 \text{ cm}^2 = 295,68 \text{ cm}^2$.

Svar: Overflatearealet til boksen er cirka $295,68 \text{ cm}^2$.



Oppgave 5 (8 poeng) Nettkode: E-4B31

En bedrift bruker i en periode vann fra et basseng i produksjonen av et nytt produkt.

Funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 0,0013x^3 - 0,59x^2 + 61x + 2000, \quad 0 \leq x \leq 300$$

viser vannstanden $f(x)$ millimeter i bassenget x dager etter at fabrikkens startet produksjonen av produktet.

a)

Bruk graftegner til å tegne grafen til f .

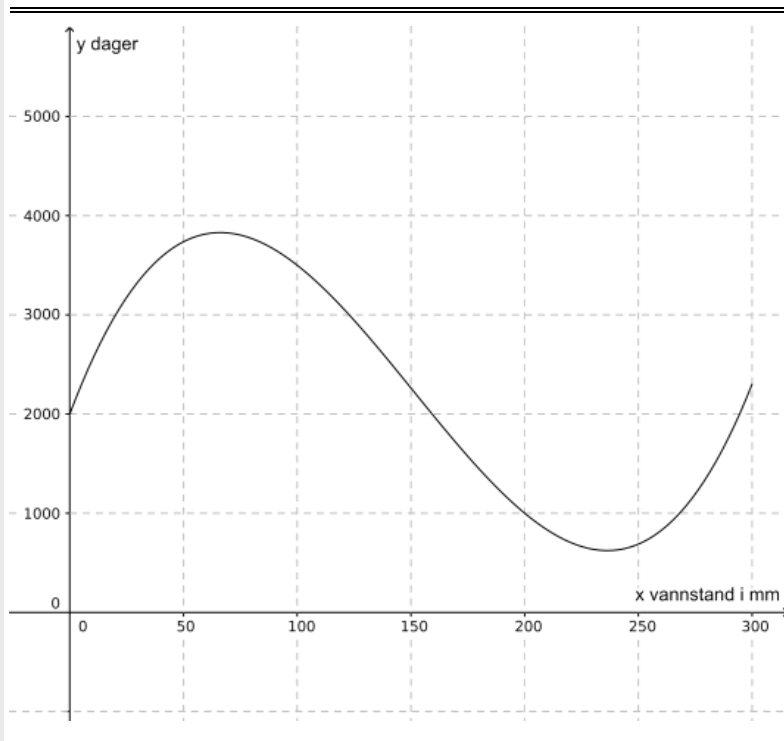
Løsningsforslag a)

I Skriv inn-boksen skriver vi følgende:

Funksjon[$0.0013x^3 - 0.59x^2 + 61x + 2000$, 0, 300]

Dette betyr at vi plotter funksjonen f oppgitt i oppgaven for $0 \leq x \leq 300$. Deretter drar vi aksene med shift-tasten og musepekeren slik at x -aksen viser intervallet fra 0 til 300, og vi drar y -aksen slik at hele grafen vises. Husk at konstantleddet er 2000, så funksjonen tar ganske høye verdier. Vi må huske å sette navn på aksene. Dette gjør vi ved å høyreklikke i grafikkfeltet, velge "Innstillinger" og skrive inn aksenavn under xAkse og yAkse.

Svar:



b)

Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste vannstand i bassenget i denne perioden.

Løsningsforslag b)

Vi bruker *GeoGebra*. Vi må finne ekstremalverdiene til funksjonen. Disse punktene kalles ekstremalpunkter, og med kommandoen

```
Ekstremalpunkt[ 0.0013x^3 - 0.59x^2 + 61x + 2000 ]
```

finner vi ekstremalpunktene til funksjonen. Vi får som resultat at toppunktet er (66.16, 3829.71), og at bunnpunktet er (236.4, 622.84). Grafen viser at disse punktene på grafen har henholdsvis størst og minst y -koordinat. De viser dermed høyeste og laveste vannstand. Vi er bedt om å finne forskjellen i y -verdi mellom disse punktene, og vi får

$$3829,71 - 622,84 = 3206,87.$$

Dette betyr at forskjellen mellom den høyeste og laveste vannstanden var 3206,87 millimeter, eller cirka 3,21 m.

Svar: 3206,87 mm, eller cirka 3,21 m.

c)

Bruk graftegner til å løse likningen $f(x) = 3000$

Hva forteller løsningene om vannstanden i bassenget?

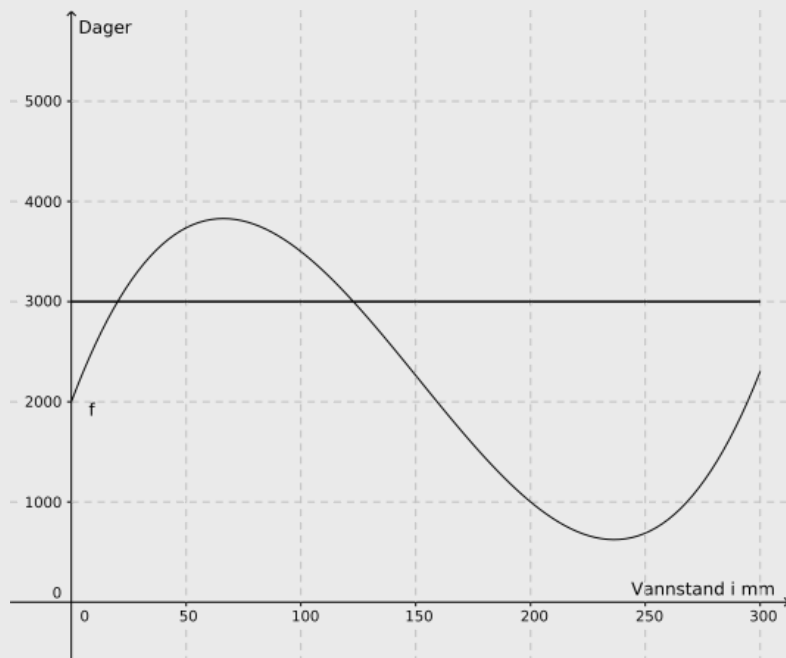
Løsningsforslag c)

Vi bruker *GeoGebra*. Får å løse ligningen $f(x) = 3000$, kan vi tegne linjen $y = 3000$ og finne ut hvor linjen og f krysser hverandre. For å tegne linjen i *GeoGebra* skriver vi

```
Funksjon[3000, 0, 300]
```

inn i Skriv inn-boksen. Resultatet blir dette.





Vi ser at linjen krysser grafen til f to steder. For å finne nøyaktig ut hvor disse punktene er, bruker vi kommandoen

```
Skjæring[ <Funksjon>, <Funksjon>,
<Startverdi for x>, <Sluttverdi for x> ]
```

Vi kunne også ha funnet skjæringspunktene ved å holde musepekeren slik at begge grafene blir markerte, og lage et punkt der. Vi fyller inn funksjonene våre, og vi lar x gå mellom 0 og 300:

```
Skjæring[ f, g, 0, 300 ]
```

Vi får punktene $(20.14, 3000)$ og $(122.84, 3000)$. Det betyr at $f(20, 14) = 3000$, og at $f(122, 84) = 3000$, så $x_1 = 20, 14$ og $x_2 = 122, 84$ er løsningene til likningen $f(x) = 3000$. Løsningene sier oss at på dag 20 og dag 122, så er vannstanden lik 3000 millimeter, eller 3 meter.

Svar: Løsningene er $x_1 = 20, 14$ og $x_2 = 122, 84$; det vil si at på dag 20 og dag 122 er vannstanden lik 3000 millimeter.

d)

Bestem stigningstallet for den rette linjen som går gjennom punktene $(90, f(90))$ og $(210, f(210))$. Hva forteller dette stigningstallet om vannstanden i bassenget?

Løsningsforslag d)

Vi kan løse dette både ved hjelp av regning og ved hjelp av digitalt verktøy. Vi starter med den første metoden.



Den rette linjen som går gjennom punktene $(90, f(90))$ og $(210, f(210))$ er en lineær funksjon. Stigningstallet til lineære funksjoner kan vi finne ved å se på forholdet mellom endring i y -verdi med en tilsvarende endring i x -verdi. For eksempel, hvis vi ser på funksjonen $f(x) = 2x + 1$, så kan vi finne stigningstallet ved å se på forholdet mellom endringen i y -verdi og i x -verdi når x endrer seg fra 0 til 1. Stigningstallet blir:

$$\frac{\text{endring i } y}{\text{endring i } x} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{(2 \cdot 1 + 1) - (2 \cdot 0 + 1)}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Stigningstallet er altså 2, og det samsvarer med at det står 2 foran x i funksjonsuttrykket. I oppgaven vår kan vi regne ut stigningstallet til den rette linjen på samme måte, fordi vi kan regne ut endringen fra $f(90)$ til $f(210)$ og dele på endringen fra 90 til 210. Først finner vi $f(90)$ og $f(210)$ ved å sette inn i funksjonsuttrykket.

$$f(90) = 0,0013 \cdot 90^3 - 0,59 \cdot 90^2 + 61 \cdot 90 + 2000 = 3658,7$$

$$f(210) =$$

$$0,0013 \cdot 210^3 - 0,59 \cdot 210^2 + 61 \cdot 210 + 2000 = 830,3$$

Nå kan vi regne ut stigningstallet.

$$\begin{aligned} \text{stigningstallet} &= \frac{f(210)-f(90)}{210-90} \\ &= \frac{830,3-3658,7}{120} = -23,57. \end{aligned}$$

ALTERNATIV LØSNING

Stigningstallet er negativt, og dette betyr at vannstanden totalt sett har sunket fra dag 90 til dag 210. Husk at stigningstallet til en graf kan tolkes som hvor mye y -verdien endrer seg når x -verdien endrer seg med 1, så vi kan faktisk konkludere med at vannstanden har sunket i snitt 23,57 millimeter hver dag i denne perioden.

Svar: Stigningstallet er $-23,57$, så vannstanden har sunket i snitt 23,57 millimeter hver dag i perioden fra dag 90 til dag 210.



Oppgave 6 (4 poeng) Nettkode: E-4B36

Et flytende rengjøringsmiddel skal blandes med vann i forholdet 3 : 10

Du skal lage 6,5 dL ferdig blanding.

a)

Hvor mye rengjøringsmiddel og hvor mye vann trenger du?

Løsningsforslag a)

Det finnes en måte å gjøre dette på som alltid fungerer, men akkurat her kan vi ta en snarvei. Vi skal ha 6,5 dL rengjøringsmiddel, og det er nøyaktig halvparten av 13 dL, så vi kan halvere mengden vi bruker til $\frac{3}{2}$ dL = 1,5 dL rengjøringsmiddel og $\frac{10}{2}$ dL = 5 dL vann.

Dette var én måte å gjøre det på, men vi er ikke alltid så heldig med tallene som vi har vært. Noen ganger må vi gjøre det mer generelt. Hvis vi skal blande i forholdet 3 : 10, så betyr det at vi har totalt $3 + 10 = 13$ deler, hvorav 3 skal være rengjøringsmiddel og 10 skal være vann. Det betyr at $\frac{3}{13}$ av totalvolumet skal være rengjøringsmiddel og $\frac{10}{13}$ skal være vann. Vi skal ha totalt 6,5 dL – da må $\frac{3}{13} \cdot 6,5 \text{ dL} = 1,5 \text{ dL}$ av dette være rengjøringsmiddel. Resten skal være vann, og vi skal ha totalt 6,5 dL, så $6,5 \text{ dL} - 1,5 \text{ dL} = 5 \text{ dL}$ må være vann. Det er det samme som vi fikk tidligere.

Svar: 1,5 dL rengjøringsmiddel og 5 dL vann.

b)

Oda har blandet rengjøringsmiddelet med vann i forholdet 3 : 8. Hun har en bøtte med 6,6 L av denne blandingen.

Hva kan hun gjøre for å få riktig blandingsforhold i bøtta?

Løsningsforslag b)

Vi må tilsette litt mer vann. For å finne ut hvor mye, må vi finne ut hvor mye rengjøringsmiddel det er i blandingen. Vi har totalt $3 + 8 = 11$ deler blanding, der 3 deler er rengjøringsmiddel. Det riktige forholdet er 3 : 10, så vi skulle egentlig hatt 2 deler vann til. Alle de 11 delene av blandingen utgjør 6,6 dL, og 1 del av dette er

$$\frac{6,6 \text{ dL}}{11} = 0,6 \text{ dL}.$$

Vi skulle ha 2 deler med vann til, altså $2 \cdot 0,6 = 1,2 \text{ dL}$, så Oda må tilsette 1,2 dL vann til blandingen.

Svar: Oda kan tilsette 1,2 dL vann til blandingen.



Oppgave 7 (2 poeng) Nettkode: E-4B39

På et bilde er en bakterie 2 cm lang. I virkeligheten er bakterien $20 \mu\text{m}$ lang.

$$1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$$

Bestem målestokken til bildet.

Løsningsforslag

Målestokken til et bilde er hvor mange centimeter én centimeter på bildet er i virkeligheten, eller tilsvarende

$$\text{målestokk} = \frac{\text{lengde på bildet}}{\text{lengde i virkeligheten}}.$$

På bildet er 2 cm det samme som $20 \mu\text{m}$ i virkeligheten. Vi husker at $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$ og $1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m}$, så målestokken blir

$$\frac{20 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{0,02 \text{ m}} = 1\,000.$$

Det betyr at målestokken er $1\,000 : 1$.

Svar: 1 000 : 1



Oppgave 8 (7 poeng) Nettkode: E-4B3C

	A	B	C	D	E
1	År	Konsumprisindeks	Nominell lønn	Reallønn	Prosentvis endring i reallønn siden forrige registrering
2	1998	100	290 700		
3	2002	110,1	340 600		
4	2006	117,7	391 500		
5	2010	128,8	474 000		
6	2014	136,9	530 100		

Jostein vil ha en oversikt som viser hvordan reallønnen hans har endret seg.

a)

Lag et regneark som vist ovenfor. Når Jostein har registrert konsumprisindeks og nominell lønn, skal han få beregnet reallønn. Han skal også få beregnet hvor mange prosent reallønnen har endret seg siden forrige registrering.

Løsningsforslag a)

Først lager vi et tilsvarende regneark som i oppgaven.

	A	B	C	D	E
1	År	Konsumpris- indeks	Nominell lønn	Reallønn	Prosentvis endring
2	1998	100			
3	2002	110,1			
4	2006	117,7			
5	2010	128,8			
6	2014	136,9			

Deretter skal vi regne ut reallønn. Husk at vi har følgende formel gjeldende reallønn:

$$\text{reallønn} = \frac{\text{lønn}}{100} \cdot \text{indeks}$$

Vi vil regne ut reallønnen, så det hadde vært en fordel å få reallønnen alene på venstre side. Derfor multipliserer vi med 100 på begge sider av likhetstegnet, og får

$$\text{reallønn} = 100 \cdot \frac{\text{lønn}}{\text{indeks}}$$

La oss først regne ut hva som er reallønnen i 1998 ved å bruke rutene i regnearket. Konsumprisindeksen står i rute B2 og nominell lønn står i rute C2, så reallønnen blir $100 \cdot \frac{C2}{B2}$. Derfor skriver vi

$$=100 \cdot C2 / B2$$

i rute D2. Tilsvarende skal det som står i D3 være

$$=100 \cdot C3 / B3$$

og så videre. Vi slipper å skrive ned alle sammen; de fleste regneark tillater at vi bare skriver det som skal stå i rute D2, og deretter at vi "drar" innholdet ned til rute D6. Nå blir regnearket seende slik ut.



	A	B	C	D	E
1	År	Konsumpris- indeks	Nominell lønn	Reallønn	Prosentvis endring
2	1998	100	290700	290700	
3	2002	110,1	340600	309355	
4	2006	117,7	391500	332625	
5	2010	128,8	474000	368012	
6	2014	136,9	530100	387216	

Til slutt skal vi regne ut hvor mange prosent reallønnen har endret seg siden forrige registrering. I 1998 har vi ingen tidligere registrering, så vi starter med 2002. Vi må altså regne ut hvor mye reallønnen har endret seg fra 1998 til 2002. Vi starter med å finne ut hvor mange prosent lønnen i 2002 er av lønnen i 1998. Den finner vi ved å ta forholdet mellom de to og multiplisere med 100 %. Med tall:

$$100 \% \cdot \frac{\text{lønn i 2002}}{\text{lønn i 1998}} = 100 \% \cdot \frac{309355}{290700} \approx 106,4 \%$$

Lønnen i 2002 er altså rundt 106,4 % av lønnen i 1998. Det betyr at lønnen har endret seg med $106,4 \% - 100 \% = 6,4 \%$ fra 1998 til 2002. Vi skal gjøre dette i rute E3 i regnearket, og alt vi trenger å gjøre er å erstatte variablene som forekommer i ([d2eq8a]) med deres rutenavn og trekke fra 100. Med andre ord erstatter vi "lønn i 2002" med D3, og "lønn i 1998" med D2. Dermed blir endringen i prosent lik $100 \cdot \frac{D3}{D2} - 100$, eller $100 \cdot \left(\frac{D3}{D2} - 1 \right) = \frac{D3-D2}{D2} \cdot 100$. Vi skriver følgende inn i E3:

$$=100*D3/D2 - 100$$

Vi kunne også ha skrevet

$$=(D3-D2)/D2*100$$

Igjen kan vi "dra" ruten ned til rad 6, og til slutt ser regnearket slik ut:

	A	B	C	D	E
1	År	Konsumpris- indeks	Nominell lønn	Reallønn	Prosentvis endring
2	1998	100	290700	290700	
3	2002	110,1	340600	309355	64
4	2006	117,7	391500	332625	75
5	2010	128,8	474000	368012	106
6	2014	136,9	530100	387216	52

Svar:

	A	B	C	D	E
1	År	Konsumpris- indeks	Nominell lønn	Reallønn	Prosentvis endring
2	1998	100	290700	290700	
3	2002	110,1	340600	309355	6,4
4	2006	117,7	391500	332625	7,5
5	2010	128,8	474000	368012	10,6

	A	B	C	D	E
6	2014	136,9	530100	387216	5,2

b)

Anta at konsumprisindeksen øker med 2,5 % per år i perioden fra 2014 til 2024.

Hva må Josteins nominelle lønn i 2024 være dersom han da skal få en reallønn som er 10 % høyere enn reallønnen i 2014?

Løsningsforslag b)

Husk at vi har følgende formel. Den benyttes så å si alltid når vi skal regne ut noe med nominell lønn eller reallønn.

$$\frac{\text{reallønn}}{100} = \frac{\text{lønn}}{\text{indeks}}$$

Vi vil at Josteins reallønn skal være 10 % høyere i 2024 enn i 2014. Nå kan vi multiplisere lønnen i 2014 med 11 og sette inn i likningen ovenfor, men det lønner seg ofte å sette inn tallene vi vet om til slutt. La x være Josteins nominelle lønn i 2024, og la y være reallønnen i 2014. Vi vil at Josteins reallønn skal være 10 % høyere i 2024 enn i 2014, med andre ord at den skal være lik $y + y \cdot 10 \% = 1,1 \cdot y$. Vi setter dette inn i likningen

$$\frac{\text{reallønn}}{100} = \frac{\text{lønn}}{\text{indeks}}$$

, og får

$$\frac{1,1 \cdot y}{100} = \frac{x}{\text{indeks}}$$

Vi vil finne ut hva x er, så vi multipliserer med indeksen på begge sider av likhetstegnet.

$$x = \frac{1,1 \cdot y}{100} \cdot \text{indeks}$$

I likningen over vet vi allerede hva y er, og vi vil finne ut hva x er. Derfor vil vi finne konsumprisindeksen i 2024. Den øker med 2,5 % per år fra 2014, så i 2015 blir den $136,9 + 136,9 \cdot 2,5 \% = 136,9 \cdot 1,025 \approx 140,3$. For å finne indeksen i 2016 må vi igjen multiplisere med 1,025, og det samme må vi gjøre for å finne indeksen i 2017. Får å finne indeksen i 2024 må vi altså multiplisere 10 ganger med 1,025. Derfor blir indeksen lik

$$136,9 \cdot 1,025^{10} \approx 175,24.$$



Vi setter dette inn i

$$x = \frac{1,1 \cdot y}{100} \cdot \text{indeks}$$

Husk at $y = \text{reallønn i 2014} = 387216$, så får at den nominelle lønnen i 2024 må være

$$x = \frac{1,1 \cdot 387216}{100} \cdot 175,24 \approx 746415.$$

Svar: Cirka 746415 kroner.



Oppgave 9 (2 poeng) Nettkode: E-4B3F

En vanntank har form som en sylinder. Tanken er 0,8 m høy og rommer 150 L.

Bestem radius i tanken.

Løsningsforslag

Husk at volumet V til en sylinder med radius r og høyde h er lik $V = h \cdot \pi \cdot r^2$. Vi kan også komme fram til dette ved å huske at arealet til en sirkel med radius r er $\pi \cdot r^2$, og at vi kan multiplisere med høyden h for å få volumet av sylindere med sirkelen som grunnflate. Fra oppgaveteksten har vi at $h = 0,8$ m og $V = 150$ L. Vi setter dette inn i ligningen over. $150 \text{ L} = 0,8 \text{ m} \cdot \pi \cdot r^2$ Vi vil finne en r som passer inn i ligningen over, så vi dividerer med $0,8 \text{ m} \cdot \pi$ på begge sider av likhetstegnet. Da får vi $r^2 = \frac{150 \text{ L}}{0,8 \text{ m} \cdot \pi}$. Nå har vi funnet r^2 , men vi vil ha tak i r , så vi må ta

kvadratroten av begge sider over. $\sqrt{r^2} = r = \sqrt{\frac{150 \text{ L}}{0,8 \text{ m} \cdot \pi}}$ Her kan det være fristende å regne ut $\sqrt{150/(0,8 \cdot \pi)}$, men vi må passe på. Et varseltegn er at vi ikke har noen pen måleenhet på det som står under kvadratroten. Husk at 1 kubikkmeter er det samme som 1000 liter, så $150 \text{ L} = \frac{150}{1000} \text{ m}^3 = 0,15 \text{ m}^3$. Hvis vi setter dette inn i ligningen over, så får vi $r = \sqrt{\frac{0,15 \text{ m}^3}{0,8 \text{ m} \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{0,15}{0,8 \cdot \pi} \text{ m}^2} = \sqrt{\frac{0,15}{0,8 \cdot \pi}} \text{ m}$. Denne måleenheten passer seg bedre for en radius. Vi taster inn på kalkulatoren og får at $r \approx 0,2443 \text{ m} = 24,43 \text{ cm}$.

Svar: Cirka 24,43 cm.

