REKKER

FØLGER

En *følge* er en uendelig sekvens av tall:

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

Tallene a_i kalles leddene i følgen.

Eksempler

i) Følgen av positive partall:
$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$
$(a_i = 2i,\ i = 1, 2, \ldots)$

ii) Følgen av kvadrattall:
$1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$
$(a_i = i^2,\ i = 1, 2, \ldots)$

Norges mest kjente matematiker Niels Henrik Abel (1802–1829) var den første som behandlet uendelige rekker på den måten vi gjør i dag.

REKKER

En *rekke* er den formelle summen av leddene i en følge.

En rekke $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ gir opphav til en følge

$S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$

av delsummer

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i .$

Eksempler

i) Den harmoniske rekken:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

ii) Delsummen S_4 av rekken av positive oddetall:

$$\sum_{i=1}^{4} (2i - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

SPESIELLE KLASSER AV REKKER

ARITMETISKE REKKER

En rekke er aritmetisk hvis det er en fast differanse mellom leddene.

$$a_{i+1} - a_i = d, \quad i = 1, 2, \ldots$$

$$a_i = a_1 + (i - 1)d$$

$$S_n = n\,\frac{a_1 + a_n}{2}$$

Eksempel
Summen av de 10 første positive partallene:
$a_1 = 2,\ d = 2$

$$a_{10} = a_1 + 9d = 2 + 9 \cdot 2 = 20$$

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{2 + 20}{2} = 110$$

GEOMETRISKE REKKER

En rekke er geometrisk hvis etterfølgende ledd har fast kvotient.

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = k, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$a_i = a_1 k^{i-1}$$

$$S_n = a_1 \frac{1 - k^n}{1 - k}$$

Eksempel
Summen av de 10 første leddene når
$a_1 = 2,\ k = 2$:

$$S_{10} = 2 \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2(2^{10} - 1) = 2046$$

KONVERGENTE REKKER

En rekke er konvergent hvis følgen av delsummer konvergerer, altså hvis $\lim_{n\to\infty} S_n$ eksisterer.

KONVERGENTE GEOMETRISKE REKKER

Geometriske rekker konvergerer hvis kvotienten k er slik at $|k| < 1$. Rekka konvergerer da mot

$$S = \frac{a_1}{1 - k} .$$

Det gir for eksempel at

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1.$$

ANDRE KONVERGENTE REKKER

Rekkene $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$ konvergerer for hver $p > 1$.

Med $p = 2$ kan det vises at

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} .$$

Alternerende rekker er rekker der etterfølgende ledd har motsatt fortegn. De konvergerer hvis absoluttverdien til leddene går monotont mot 0.

Det kan vises at

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2.$$

www.matematikk.org
i samarbeid med
AkerBP
PGS