Platonske legemer i klasserommet

Kristian Ranestad

13. mai 2005

Innhold

Forord

Dette heftet er utarbeidet til klasseromsprosjektet ved Matematisk institutt, UiO. I dette prosjektet inngår det halvdags kurs for lærere i forskjellige tema. Heftet er ment som et kurshefte til et slikt kurs i platonske legemer og andre polyedre. Samtidig kan det forhåpentligvis også fungere som et ressurshefte for de som vil arbeide med disse emnene i sin undervisning, for eksempel i form av prosjektarbeid. Ideer til prosjektoppgaver beregnet for elever i videregående skole er samlet bak i heftet.

Kapittel 1

Innledning

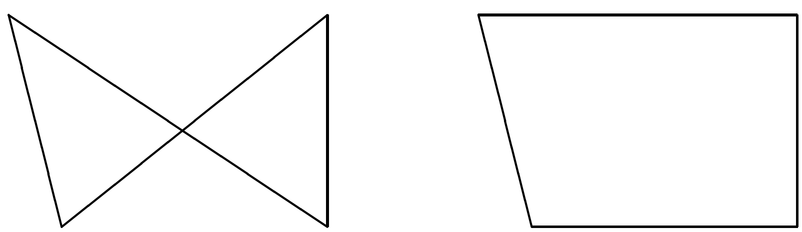
Platon var filosof og vitenskapsmann. Skriftene etter ham er samlet i en rekke dialoger, ofte med Sokrates som en av samtalepartnerne. I disse dialogene diskuterer Platon hvordan han mener at alle jordiske og naturlige fenomener er avskygninger av ideer eller former. Han skilte mellom en ide og hvordan den blir realisert, eller forsøkt realisert. For eksempel diskuteres i dialogen staten"hvordan en stat kan organiseres best mulig, når en tenker uavhengig av en konkret situasjon eller et konkret land. I geometri er det nærliggende å tenke seg forskjellen på ideelle former og realiseringer. Sirkelen er en slik form, mens hver sirkel som vi tegner eller konstruerer er en tilnærming som vi kan tenke på som en avskygning av den ideelle eller perfekte sirkelen. Selv med det mest nøyaktige instrument klarer en ikke å tegne en perfekt sirkel, bare en (veldig god) tilnærming. På samme måte er det med perfekte eller regulære mangekanter, som vi skal behandle i neste avsnitt. De platonske legemene er perfekte geometriske figurer. Disse var kjent lenge før Platon. Euklid ([2]) har viet den trettende av sine bøker i geometri til disse figurene, så i antikken var de på en måte allemannseie. Når de likevel har fått navn etter Platon så er det fordi de på en slående måte er eksempler på platonske ideer.

Platonske legemer er satt sammen av perfekte eller regulære mangekanter. Derfor skal vi først se på mangekanter. Selv om det kunne være fristende å velge adjektivet “perfekt”, vil vi bruke “regulær” siden det er det som er vanlig.

Kapittel 2

Regulære mangekanter

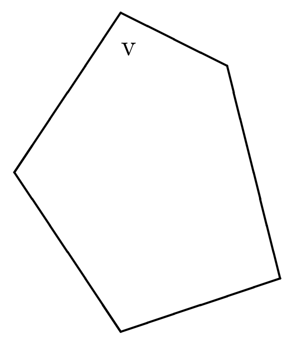
En trekant består av tre kanter og har tre hjørner, der kantene møtes. To kanter som møtes i et hjørne kaller vi nabokanter eller bare naboer. En firkant har fire kanter og fire hjørner. I firkanten er det kanter som er naboer og kanter som ikke er naboer. En firkant har også to diagonaler. Hvis vi bytter ut to kanter som ikke er naboer med de to diagonalene, får vi igjen fire kanter. Men dette vil vi ikke kalle en firkant, fordi to av kantene som ikke er naboer skjærer hverandre. I en mangekant møtes nabokanter i et hjørne, mens kanter som ikke er naboer møtes ikke, de skal ikke skjære hverandre!



Figur 2.1: Fire kanter med ikke-naboer som skjærer hverandre og en firkant

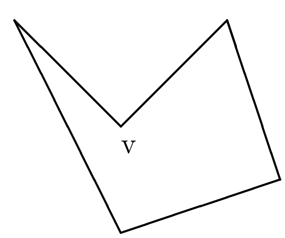
Prøv å tegne fem kanter slik at dette ikke stemmer. En n-kant har n kanter og n hjørner, og er slik at kanter som ikke er naboer heller ikke skjærer hverandre. Dette kan vi også si på en annen måte. Det området som er avgrenset av en trekant, kaller vi ofte også trekanten, eller det indre av trekanten. På samme måte er det med firkanten, den har et indre område. Hver kant er grensen mellom det indre området og det ytre, det som er utenfor firkanten. Med mer enn fire kanter er det ikke slik, dersom kantene krysser hverandre. I en n-kant, som vi har definert dem over, er det imidlertid alltid slik at den avgrenser et område slik at hver kant er grense mellom dette indre området og det ytre.

De to nabokantene som møtes i et hjørne danner en vinkel, som vi kaller **kantvinkelen**. Denne vinkelen måler vi i det indre av mangekanten.



Figur 2.2: Kantvinkel

Da kan kantvinkelen være hva som helst mellom 0 og 360 grader, i hvert fall hvis det er mer enn 3 kanter i alt. Dersom vinkelen er mer enn 180 grader går på en måte hjørnet innover i mangekanten.

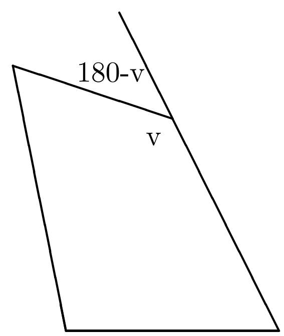


Figur 2.3: Kantvinkel som er større enn 180 grader

I de enkleste mangekantene, for eksempel trekantene, er alle kantvinklene mindre enn 180 grader. De regulære mangekantene som vi nå skal beskrive er andre eksempler på mangekanter der alle kantvinklene er mindre enn 180 grader.

En **regulær mangekant** er en mangekant der alle kantene er like lange og alle kantvinklene er like store. En regulær trekant er altså en likesidet trekant, mens en regulær firkant er et kvadrat. Legg merke til at for trekanten er kantvinklene like store så snart kantene er like lange, og omvendt er kantene like lange så snart kantvinklene er like store. For firkanten er dette ikke tilfelle. Et rektangel har fire like store kantvinkler, mens kantene bare parvis er like lange. På den andre siden er en rombe et parallellogram med fire like lange kanter, men bare parvis like store kantvinkler. Derfor må vi kreve at både kantene og kantvinklene skal være like store for å kalle mangekanten regulær (eller perfekt).

I en likesidet, regulær trekant er alle kantvinklene 60 grader. I kvadratet er alle kantvinklene 90 grader. Siden alle kantvinklene er like i en regulær femkant eller helt generelt i en regulær n-kant, skal vi finne en formel for denne kantvinkelen. Vi kaller denne kantvinkelen v_n. I hvert hjørne er vinkelen v_n mindre enn 180 grader. Differensen $180-v_n$ kalles supplementvinkelen til v_n.



Figur 2.4: Kantvinkel og supplementvinkel

Når vi beveger oss langs kanten til en mangekant og kommer til et hjørne er denne supplementvinkelen akkurat den vinkelen vår bevegelse forandrer retning når vi fortsetter langs nabokanten. Fortsetter vi slik rundt hele n-kanten har vi forandret retning n ganger. Siden vi ender opp med samme retning som vi startet er den totale retningsforandringen 360 grader. Altså får vi

$$n \cdot (180 - v_n) = 360$$

som betyr at

$$n \cdot v_n = 180 \cdot n - 360 = 180 \cdot (n-2).$$

Kantvinkelen i en regulær n-kant blir altså

$$v_n = 180 \cdot (1 - \frac{2}{n}).$$

For $n = 3, 4, 5, \ldots, 10$ får vi

$$v_n = 60, 90, 108, 120, 128.57, 135, 140, 144.$$

Den måten som vi regnet ut kantvinkelen på kan brukes til å finne en formel for summen av kantvinklene i en vilkårlig mangekant. Så lenge vi begrenser oss til det enkle tilfellet at alle kantvinklene er mindre enn 180 grader kan vi argumentere på samme måte som over: Når vi beveger oss langs kanten, vil vår retning forandre seg med $180 - v$ grader der v er kantvinkelen i det hjørnet vi passerer. Dersom kantvinklene i en mangekant er $u_1, u_2, \ldots, u_n$, vil den totale retningsforandringen når en kommer helt rundt være

$$(180 - u_1) + (180 - u_2) + \ldots (180 - u_n) = 180 \cdot n - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n).$$

Siden den totale retningsforandringen selvfølgelig er 360 grader får vi

$$180 \cdot n - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = 360$$

altså at

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = 180 \cdot n - 360 = 180 \cdot (n-2).$$

For trekanter får vi at summen av kantvinklene er 180 grader, som vi kjenner fra før. For firkanter er summen av vinklene 360 grader, for femkanter er summen av vinklene 540 grader o.s.v.

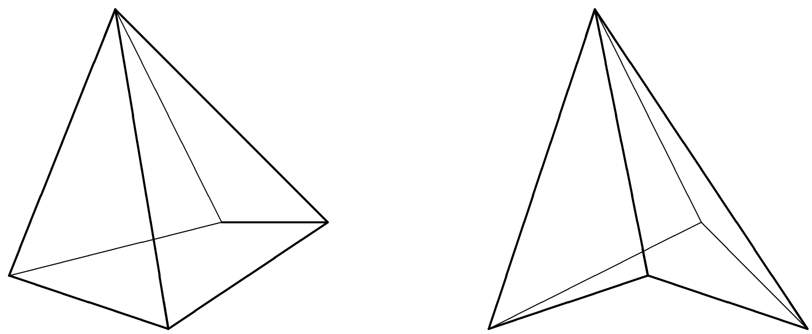
Kapittel 3

Platonske legemer

I forrige kapittel beskrev vi mangekantene som områder i planet avgrenset av rette linje-stykker eller kanter. Nå tar vi et steg videre og ser på romlige figurer eller legemer. Et **polyeder** er et romlig legeme som er avgrenset av mangekanter. En terning eller en pyramide er eksempler på polyedre. Navnet polyeder kommer fra gresk og har to deler: poly som betyr mange og eder som kommer fra hedron og betyr side eller flate. Tilsvarende er det greske ordet for mangekant polygon der gon betyr kant. Det er mange romlige figurer som er avgrenset av mangekanter, så vi må presisere litt hva vi vil mener med et polyeder. For det første kaller vi mangekantene som avgrenser polyederet for **sideflater**. En terning har kvadratiske sideflater, seks stykker i alt. Siden sideflatene er mangekanter har de mange kanter eller sidekanter. Disse kalles også **kanter for polyederet**, og **hver slik sidekant er kant i nøyaktig to sideflater**. Endepunktene til en kant er et **hjørne** i polyederet. Der møtes tre eller flere sideflater. I terningen møtes tre kvadratiske sideflater i hver av de åtte hjørnene.

Alle sideflatene som møtes i et hjørne er mangekanter og har kantvinkel i dette hjørnet. I et hjørne på terningen møtes tre kvadratiske sideflater. Kantvinkelen til hver av disse i dette hjørnet er 90 grader. Summen av de tre kantvinklene i hjørnet er 270 grader. I et hjørne på et polyeder kan vi tilsvarende summere kantvinklene til mangekantene som møtes der. En sideflate er et plant område, så hver sideflate er del av et plan. Hjørnet i polyederet ligger enten helt på den ene siden av dette planet, eller så skjærer dette planet hjørnet i to.

Hjørnet er **konvekst** dersom ingen av planene til sideflatene skjærer hjørnet i to, det vil si at hele hjørnet ligger på den ene siden av planet til hver sideflate. Når sidekantene folder seg (som i et trekkspill) er hjørnet ikke konvekst.



Figur 3.1: Et konvekst og et ikke-konvekst (foldet) hjørne

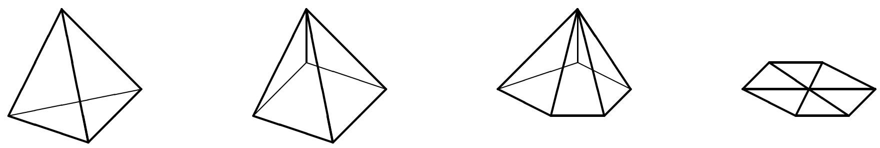
Dette er mulig dersom det er mer enn tre sideflater inn i hjørnet, og jo flere sideflater jo lettere er det å lage hjørner som ikke er konvekse. Dersom en lager et stjerneformet polyeder vil en ha hjørner som ikke er konvekse. I terninger, pyramider og prismer er derimot alle hjørnene konvekse. Et konvekst polyeder er et polyeder der alle hjørnene er konvekse. Vi skal stort sett behandle konvekse polyedre, og da vil følgende setning stå helt sentralt:

I et konvekst hjørne er summen av alle kantvinklene mindre enn 360 grader.

Det er ikke så vanskelig å se at denne setningen er riktig. Prøv å finne en god grunn for at dette er rett!

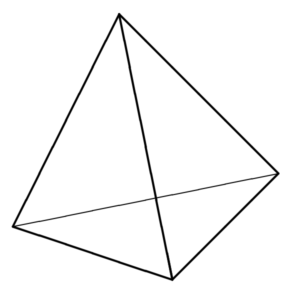
Et platonsk legeme er et et regulært polyeder. Det vil si at tilsvarende som for de regulære mangekantene, er alle sideflatene like, alle kantene like og alle hjørnene like. Dette betyr for eksempel at alle sideflatene er regulære mangekanter av samme slag og at polyederet er konvekst. Vi skal nå se på hvilke muligheter det er for slike platonske legemer. Dette skal vi gjøre ved å se bare på hjørnene. Husk at i et hjørne møtes minst tre sideflater og at summen av kantvinklene i et hjørne er mindre enn 360 grader. Hvis summen er 360 grader blir hjørnet flatt, og hvis summen er mer enn 360 grader blir det et foldet hjørne som ikke er konvekst.

Først undersøker vi om det fins platonske legemer som er slik at alle sideflatene er trekanter. Siden kantvinkelen i en trekant er 60 grader, kan tre, fire eller fem trekanter danne sideflater som møtes i et hjørne. Med seks trekanter er summen av kantvinklene 360 så det går ikke.



Figur 3.2: Tre, fire, fem og seks trekanter inn i et hjørne

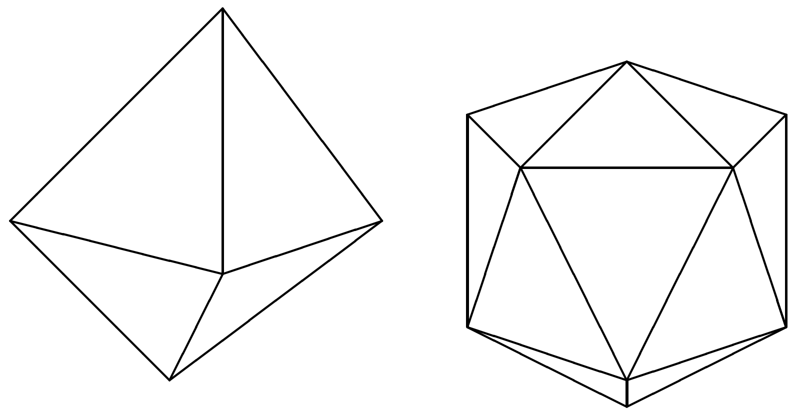
Med tre trekanter i et hjørne, vil de tre kantene på disse sideflatene som ikke møtes i hjørnet danne en ny trekant. Tilsammen vil disse fire trekantene danne en trekantet pyramide, med fire sideflater, seks kanter og fire hjørner. Alle sideflatene er like, alle kantene er like og alle hjørnene er like så pyramiden danner et platonsk legeme. Det kalles et **tetraeder**, siden det har fire sideflater og tetra betyr fire.



Figur 3.3: Tetraeder

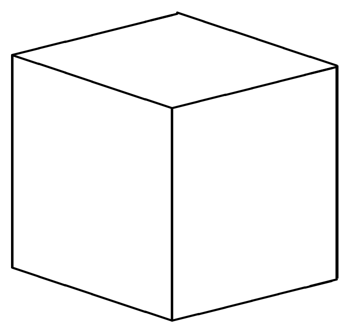
Det fins platonske legemer med fire og fem trekanter inn i hvert hjørne også. De kalles **oktaeder** og **ikosaeder**, siden de har åtte respektive tyve sideflater hver og okta betyr åtte mens ikosa betyr tyve. Disse er litt vanskeligere å se for seg. Oktaederet er en firkantet dobbelpyramide, mens ikosaederet er mer komplisert. Men med plastbrikker, eller pappbrikker er det ikke så vanskelig å bygge dem når en bare passer på at det skal være fire og fem trekanter i hvert hjørne.

Dersom alle sideflatene er regulære firkanter, altså kvadrater, er det bare mulig å ha tre sideflater inn i hvert hjørne. Med fire kvadrater inn i et



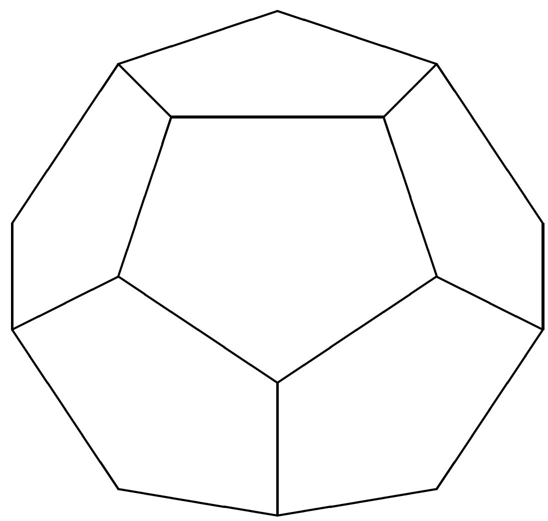
Figur 3.4: Oktaeder og ikosaeder

hjørne ville nemlig summen av kantvinklene bli 360 grader, så hjørnet ville bli flatt. Et polyeder med tre kvadrater som sideflater inn i hvert hjørne har vi allerede sett, nemlig terningen. Denne kalles også kube eller **heksaeder** siden den har seks sideflater og heksa betyr seks. Alle sideflatene, kantene og hjørnene er like så dette er et platonsk legeme.



Figur 3.5: Heksaeder, kube eller terning

Dersom alle sideflatene er regulære femkanter, er det bare mulig å ha tre sideflater inn i hvert hjørne. Det fins et platonsk legeme som bare har slike hjørner. Det har 12 sideflater tilsammen og kalles **dodekaeder** siden dodeka betyr tolv. Som oktaederet og ikosaederet er dette litt vanskeligere å forstille seg enn de andre men ikke så vanskelig å bygge med plastbrikker eller pappbiter som har form som regulære femkanter.



Figur 3.6: Dodekaeder

Dersom alle sideflatene er regulære sekskanter, ville summen av kantvinklene i hvert hjørne være minst 360, siden kantvinkelen i en regulær sekskant er 120 grader. Derfor ville vi ikke få noe hjørne. Tilsvarende ville regulære mangekanter med mer enn seks kanter heller ikke kunne være sideflater i et regulært polyeder. Dermed er det bare de fem mulige hjørnene som vi har funnet. Faktisk er det også bare de fem platonske legemene som vi har beskrevet over.

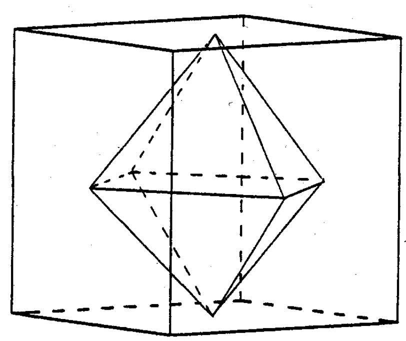
Hvis vi teller opp antall sideflater, kanter og hjørner i hver av de platonske legemene får vi følgende tabell:

	tetraeder	oktaeder	heksaeder	dodekaeder	ikosaeder
hjørner	4	6	8	20	12
kanter	6	12	12	30	30
sideflater	4	8	6	12	20

Det er en fin øvelse å finne disse tallen når en har bygget de forskjellige legemene, og mange måter å komme fram på. Her skal jeg bare beskrive en måte. Når en kjenner antall sideflater (noe må en telle) på et legeme, finner en antall kanter med å multiplisere først med antall kanter på hver sideflate og deretter dele på antall sideflater som har en kant felles (altså to). Tilsvarende får en antall hjørner ved å multiplisere antall sideflater med antall hjørner på hver sideflate og deretter dele på antall sideflater inn i hvert hjørne.

3.1 Dualitet eller søskenforhold

Når en ser på tallene i tabellen for de platonske legemene er det mange av dem som er like. Tallene til oktaederet er de samme som for heksaederet eller terningen, bare i motsatt rekkefølge. Tilsvarende er det for dodekaederet og ikosaederet. Dette er selvsagt ikke helt tilfeldig. Midtpunktene på hver sideflate i en terning danner tilsammen hjørnepunktene i et oktaeder. Tilsvarende danner midtpunktene på hver sideflate i et oktaeder en terning.



Figur 3.7:

Oktaederet og heksaederet er duale

For hvert hjørne i terningen er det derfor en sideflate i oktaederet og omvendt. Med dodekaederet og ikosaederet er det på samme måte. Vi sier at heksaederet og oktaederet er duale polyedre eller vi kunne si "søsken". Tilsvarende er heksaederet og oktaederet "søsken".

I tetraederet vil midtpunktet til sideflatene danne et nytt tetraeder, men dette står da opp ned i forhold til det opprinnelige. Tetraederet er derfor selvdual, dual til seg selv eller "enebarn".

3.2 Descartes formel

Summen av kantvinklene i hvert hjørne er mindre enn 360 grader. Forskjellen mellom 360 grader og denne summen kaller vi **vinkelavviket**. For et tetraeder er vinkelavviket i hvert hjørne 180 grader, mens i terningen er vinkelavviket 90 grader. Hvis vi summerer vinkelavviket i alle hjørnene i et tetraeder får vi 720 grader. Det samme får vi for terningen. Dersom vi regner etter, får vi det samme for alle de platonske legemene. Faktisk gjelder dette som en generell formel, oppdaget av Descartes:

I et konvekst polyeder er summen av vinkelavvikene i hvert hjørne lik 720 grader.

Dersom vi vet at alle hjørnene i et polyeder er like, kan vi ved å regne ut vinkelavviket i et hjørne bruke Descartes formel til å finne antall hjørner totalt i polyederet. I et oktaeder er det fire trekanter inn i hvert hjørne. Derfor er vinkelavviket 120 grader i hvert hjørne. Siden hvert hjørne i oktaederet har vinkelavvik på 120 grader og summen av vinkleavvikene er 720 grader er det seks hjørner i oktaederet. I dodekaederet er summen av kantvinklene i et hjørne 324 grader siden kantvinkelen i en regulær femkant er 108 grader. Derfor er vinkelavviket i et hjørne $360 - 324 = 36$. I følge Descartes formel må dermed dodekaederet ha $720 : 36 = 20$ hjørner.

3.3 Eulers formel

Dersom en summerer antall hjørner og antall sideflater og trekker fra antall kanter i et platonsk legeme får en alltid to. Dette gjelder også mer generelt for alle konvekse polyedere. Dette er et spesialtilfelle av Eulers formel som gjelder for alle polyedere. Den generelle formelen sier

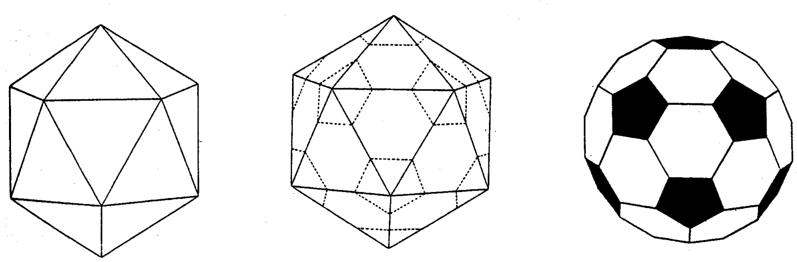
$$\textbf{hjørner} - \textbf{kanter} + \textbf{sideflater} = 2 \cdot (1 - g)$$

der g betyr antall "hull"i polyedereret. En badering eller en smultring har ett hull. I et polyeder som danner en badering ville Eulers formel gjelde med $g = 1$, altså at antall hjørner pluss antall sideflater er lik antall kanter. For et polyeder som ser ut som en åttekantet badering gjelder formelen med $g = 2$. Alle polyedre som kunne kle en ball, eller som kunne danne mønsteret på en ball, er konvekse. Da er det ingen "hull"og formelen gjelder med $g = 0$. Et slikt mønster er selvsagt det som en finner på fotballer og håndballer. Det ligner på dodekaederet men er ikke helt det samme. Det er et såkalt avkortet ikosaeder, og vi skal se nærmere på dette og beslektede **arkimediske legemer** i neste avsnitt. For alle disse vil Eulers formel gjelde med $g = 0$.

3.4 Arkimediske legemer

Der fins selvsagt "uendelig"mange forskjellige polyedere. De platonske legemene er de mest perfekte, mens de arkimediske er på en måte de nest mest perfekte. Blant disse finnes fotballmønsteret. De arkimediske polyederne er konvekse, og alle hjørnene er like, alle kantene er like og alle sideflatene er regulære mangekanter. Men de regulære mangekantene som danner sideflatene er ikke nødvendigvis like.

Hvis vi kutter eller korter av hjørnene i et ikosaeder, får vi en femkant i stedet for hvert hjørne siden det er fem sideflater inn i hvert hjørne i ikosaederet. Hver sideflate har fått avkortet sine tre hjørner, så de er blitt sekskanter. Hvis vi korter av riktig bit av hvert hjørne blir alle de nye femkantene og sekskantene regulære. Det polyederet vi da har fått kalles et avkortet ikosaeder og danner mønsteret på fotballen. Siden ikosaederet har 12 hjørner får vi 12 femkanter, og siden ikosaederet har 20 sideflater får vi 20 sekskanter. På mange fotballer er femkantene svarte, mens sekskantene er hvite.



Figur 3.8:

Fotballmønsteret: et avkortet ikosaeder

Det avkortete ikosaederet er et arkimedisk legeme. Ved å korte eller kutte av hjørnene på de andre platonske legemene får vi andre arkimediske legemer. Men det fins også andre. Alle hjørnene skal være like, og alle skal være konvekse. For å undersøke hva som er mulig kan en se hvilke kombinasjoner av regulære mangekanter en kan sette sammen i et hjørne. Dette er en morsom oppgave med plastbrikker, prøv! Vi skal bare avsløre at i dette tilfelle er det ikke nok bare å se på kravet om at summen av kantvinklene i et hjørne skal være mindre enn 360 grader. For å si det på en annen måte er det ikke nok å se bare på hvordan hjørnene kan se ut hver for seg. For eksempel skal jo også Descartes formel gjelde. Hvis vi for eksempel tenker oss et hjørne med to trekanter og en firkant, da er summen av kantvinklene 210 grader, så dette skulle være fullt ut mulig. Men vinkelavviket er 150 grader, som ikke går opp i 720. Så for at Descartes formel skal holde kan ikke et polyeder med to trekanter og en firkant i hvert hjørne ha et helt antall hjørner. Dette er selvsagt absurd, så det fins ikke noe slikt polyeder.

Vi viser til heftet **Polyedre** ([1]) for en fullstendig oversikt over de arkimediske legemene.

Kapittel 4

Undervisningsopplegg

4.1 Platonske legemer

1. Introduksjon om perfektetrekanter, firkanter, femkanter o.s.v, Disse kalles regulære polygoner.

   Perfekte legemer er bygget opp av regulære polygoner av samme type, og er like sett fra alle hjørnene. Med trekanter er det tre muligheter, nemlig med tre fire eller fem trekanter inn til hvert hjørne. Med kvadrater og regulære 5-kanter (pentagoner) er det en mulighet nemlig med tre kvadrater (eller 5-kanter) inn til hvert hjørne, mens det for polygoner med flere enn 5 kanter ikke er noen muligheter.

   De fem mulighetene ovenfor gir oss de fem Platonske legemene: Tetraederet, oktaederet, ikosaederet, kuben og dodekaederet.

2. Vi bygger de fem forskjellige Platonske legemene med JOVO brikker i plast. Disse kan bygges i grupper på 2 eller 3.

3. Etter å ha bygget et platonsk legeme skal hver enkelt gruppe telle opp hvor mange sideflater, sidekanter og hjørner som det platonske legemet har.

4. Sammen lager vi en tabell med tallene for hvert enkelt av de 5 platonske legemene og ser på sammenfall av tall i tabellen Vi regner også ut tallet sideflater sidekanter + hjørner for hvert enkelt legeme. (Dette skal bli 2 etter Eulers formel)

5. Til slutt ser vi hvordan vi får fotballen ved å kutte av hjørnene i et

ikosaeder.

4.2 Arkimediske legemer

1. Introduksjon om sum av kantvinklene i et hjørne og Descartes formel.

2. Lag ulike mulige hjørner og prøv å bygge arkimediske legemer med dem.

3. Fordel oppgaver på forskjellige grupper: Bygg arkimediske legemer med en to eller tre trekanter i hvert hjørne. Bygg arkimediske legemer uten trekanter.

Kapittel 5

Prosjektoppgaver om polyedre

5.1 Platonske legemer

Område: Geometri

Klassetrinn: Grunnkurs 1MY

Gi en beskrivelse av de Platonske legemene. Hvordan er de bygd opp, hvilke symmetrier har de, hvilket slektskap er det mellom dem og hvorfor er det bare disse?

I redegjørelsen kan blant annet inngå nedenstående punkter:
- Regulære mangekanter.
- Polyedre, konvekse hjørner og vinkelavvik.
- Descartes formel brukt på Platonske legemer.
- Eulers formel brukt på Platonske legemer.
- Rotasjonssymmetri.
- Dualitet (slektskap).
- Modeller av de Platonske legemene i plast/kryssfiner/plastrør/sugerør/ståltråd

Tilleggsoppgaver:

Oppgave 1: Finn antall kanter, hjørner og sideflater for hver av de Platonske legemene.

Oppgave 2: Finn antall og typer av rotasjonssymmetrier for hver av de Platonske legemene.

Kilder:

Heftene: G. Ellingsrud: Polyedre, Matematisk Institutt, UiO, Oslo, 2001.

K. Ranestad: Platonske legemer i klasserommet, Matematisk Institutt, UiO, Oslo, 2001.

5.2 Arkimediske legemer

Område: Geometri

Klassetrinn: Grunnkurs 1MY

Gi en beskrivelse av Arkimediske legemene. Hvordan er de bygd opp, hvilke symmetrier har de, hvilket slektskap er det mellom dem? Hvilken sammenheng fins mellom Arkimediske legemer og Platonske legemer?

I redegjørelsen kan blant annet inngå nedenstående punkter:
- Regulære mangekanter.
- Polyedre, konvekse hjørner og vinkelavvik.
- Descartes formel brukt på Arkimediske legemer.
- Eulers formel brukt på Arkimediske legemer.
- Rotasjonssymmetri.
- Dualitet (slektskap).
- Modeller av Arkimediske legemer i plast/kryssfiner/plastrør/sugerør/ståltråd

Tilleggsoppgaver:

Oppgave 1: Bruk Descartes formel til å finne mulige hjørner for Arkimediske legemer. Kan hver hjørnemulighet realiseres?

Oppgave 2: Finn antall og typer av rotasjonssymmetrier for hver av de Arkimediske legemene.

Kilder:

Heftene: G. Ellingsrud: Polyedre, Matematisk Institutt, UiO, Oslo, 2001.

K. Ranestad: Platonske legemer i klasserommet, Matematisk Institutt, UiO, Oslo, 2001.

5.3 Eulers formel

Område: Geometri

Klassetrinn: Grunnkurs 1MY

Gi en beskrivelse av polyedre og av Eulers formel. Gjør rede for hvilke polyedre Eulers formel gjelder.

I redegjørelsen kan blant annet inngå nedenstående punkter:
- Mangekanter.
- Polyedre, konvekse hjørner.
- Eulers formel brukt på konvekse polyedre.
- Eulers formel brukt på ikkekonvekse polydre.
- Eulers formel brukt på ikkekonvekse polydre med hull.

Du kan også løse følgende oppgave:

Oppgave 1: Vis hvorfor Eulers formel gjelder for et konvekst polyeder.

Oppgave 2: Vis hvorfor Eulers formel gjelder for et polyeder som danner overflaten til en smultring.

Kilder:
Heftene: G. Ellingsrud: Polyedre, Matematisk Institutt, UiO, Oslo, 2001.
K. Ranestad: Platonske legemer i klasserommet, Matematisk Institutt, UiO, Oslo, 2001.

5.4 Descartes formel

Område: Geometri

Klassetrinn: Grunnkurs 1MY

Gi en beskrivelse av polyedre og av Descartes formel. Gjør rede for hvilke polyedre Descartes formel gjelder.

I redegjørelsen kan blant annet inngå nedenstående punkter:

- Mangekanter.
- Polyedre, konvekse hjørner, vinkelavvik.
- Descartes formel brukt på konvekse polyedre.

Du kan også løse følgende oppgave:

Oppgave 1: Bruk Descartes formel til å finne antall hjørner i de Platonske legemene.

Oppgave 2: Prøv å lag en definisjon av vinkelavvik for et hjørne som ikke er konvekst og finn ut hvordan Descartes formel måtte endres for å gjelder for et polyeder som danner overflaten til en smultring.

Kilder:

Heftene: G. Ellingsrud: Polyedre, Matematisk Institutt, UiO, Oslo, 2001.

K. Ranestad: Platonske legemer i klasserommet, Matematisk Institutt, UiO, Oslo, 2001.

5.5 Litteratur og kopieringsoriginaler

For mer stoff om polyedre anbefales i første omgang mange fine nettsteder som en finner fram til ved å søke på polyhedron eller platonic solids. På norsk finnes heftet [1]. Denne dekker også symmetrier til polyedre og mønstre i planet. [3] er en annen artikkel om symmetrier og mønstre i planet.

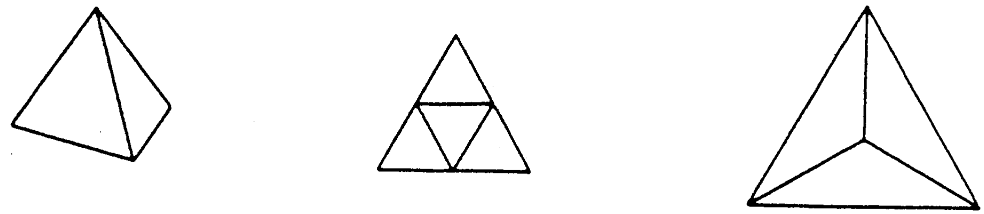
1. *Ellingsrud, Geir*: Fra narrenes gull til det gyldne snitt. Matematisk Institutt, UiO, Oslo, 2001.

2. *Euklid*: Elementer I-IV. Forlaget Trip, Vejle, 1985.

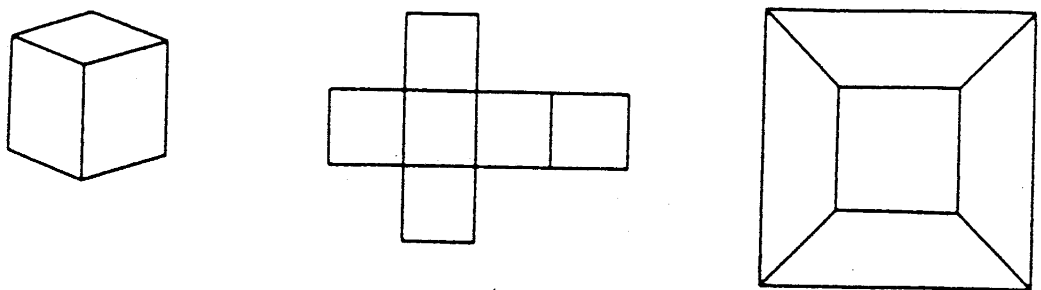
3. *Perander, John*: Symmetri. http://www.hitos.no/fou/matematikk/symmetri/

Forøvrig finner en fine linker til geometri og annet matematikkstoff for skolen under ressurser på:

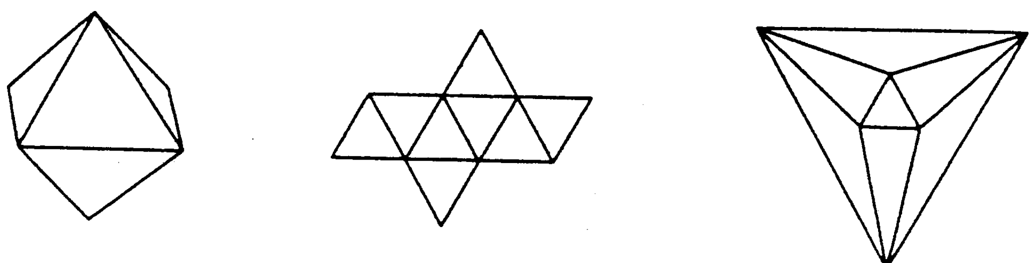
http://www.matematikk.org/



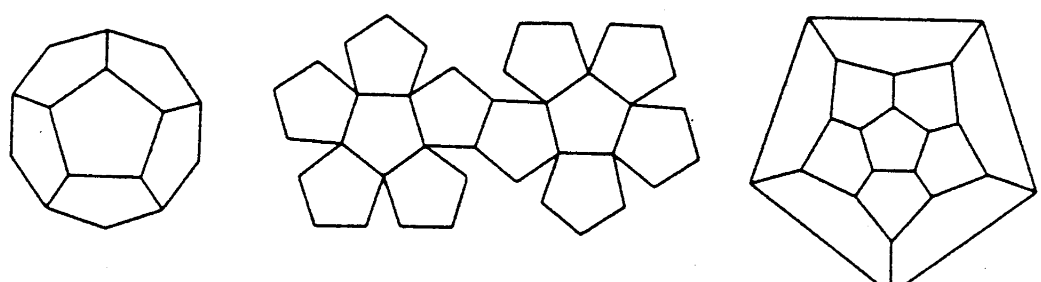
Tetrahedron $\{3, 3\}$



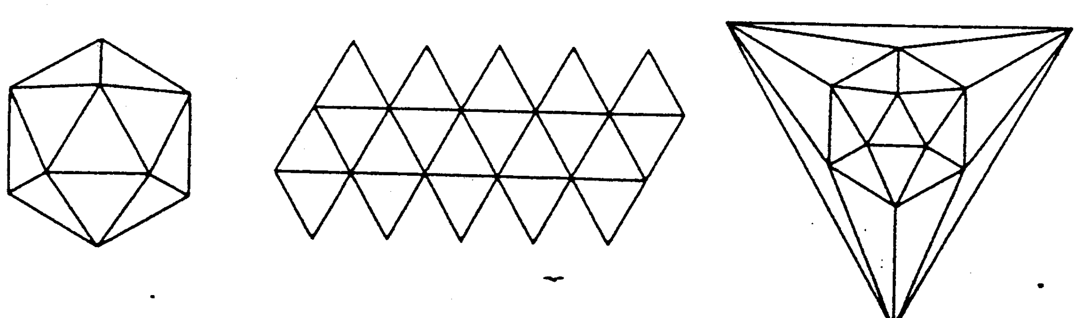
Cube $\{4, 3\}$



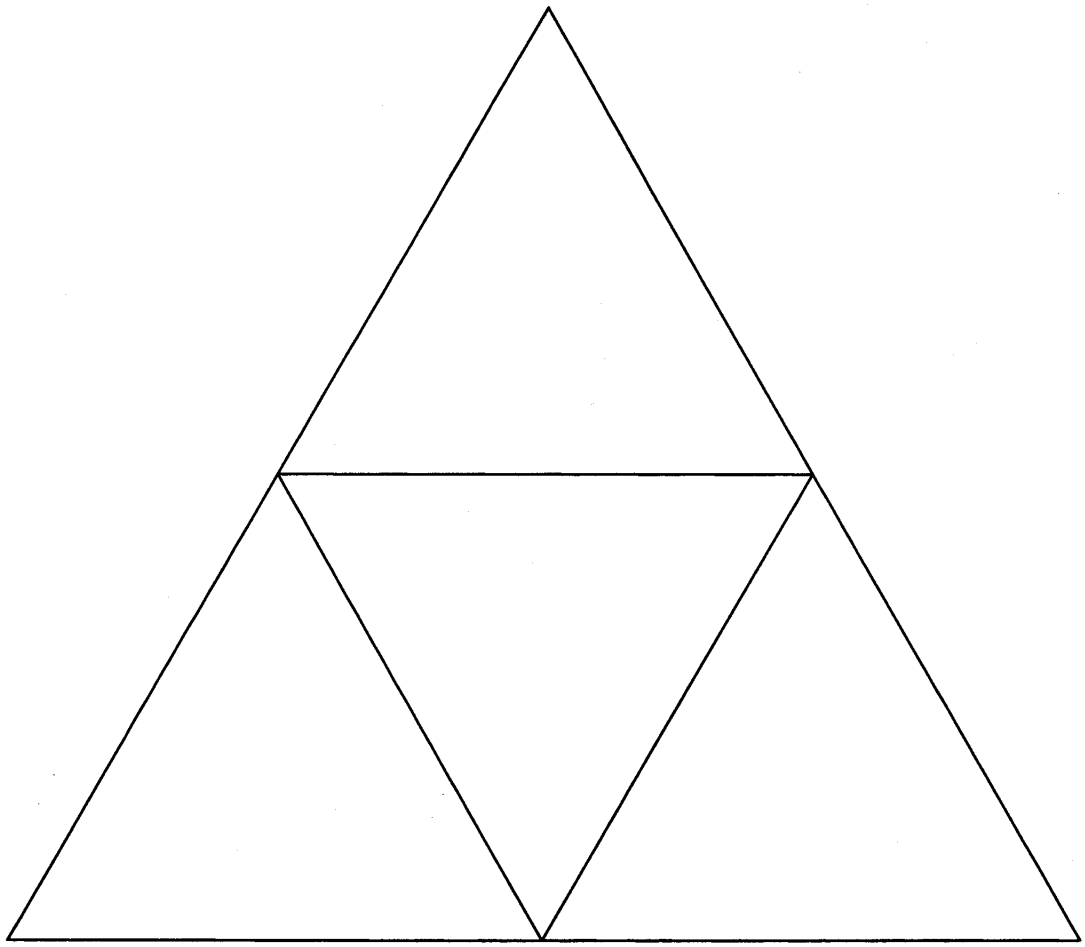
Octahedron $\{3, 4\}$



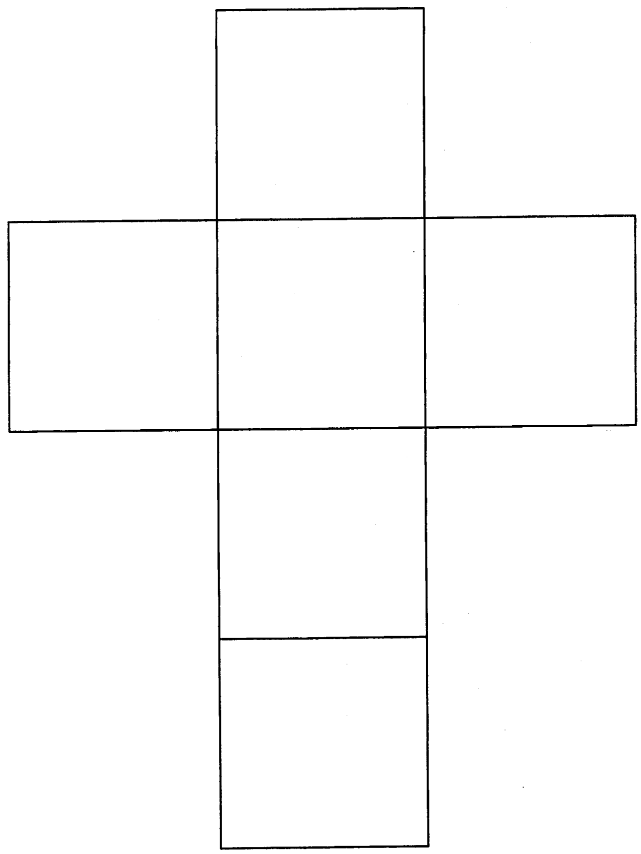
Dodecahedron $\{5, 3\}$



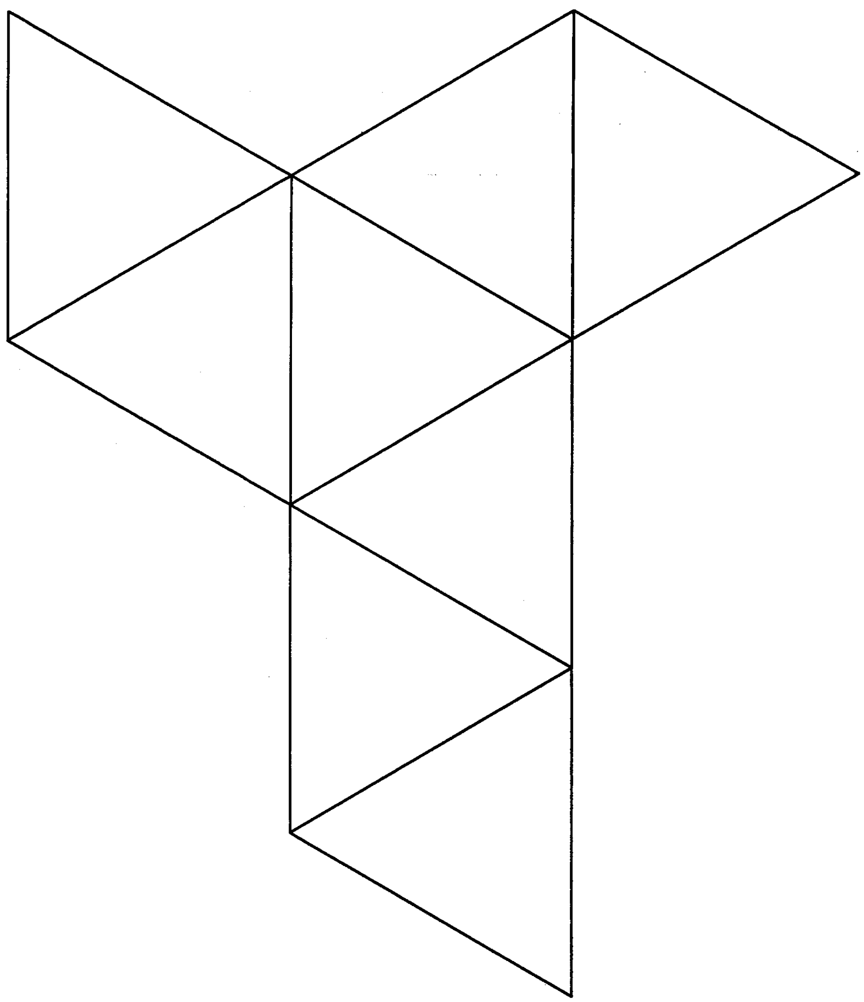
Icosahedron $\{3, 5\}$



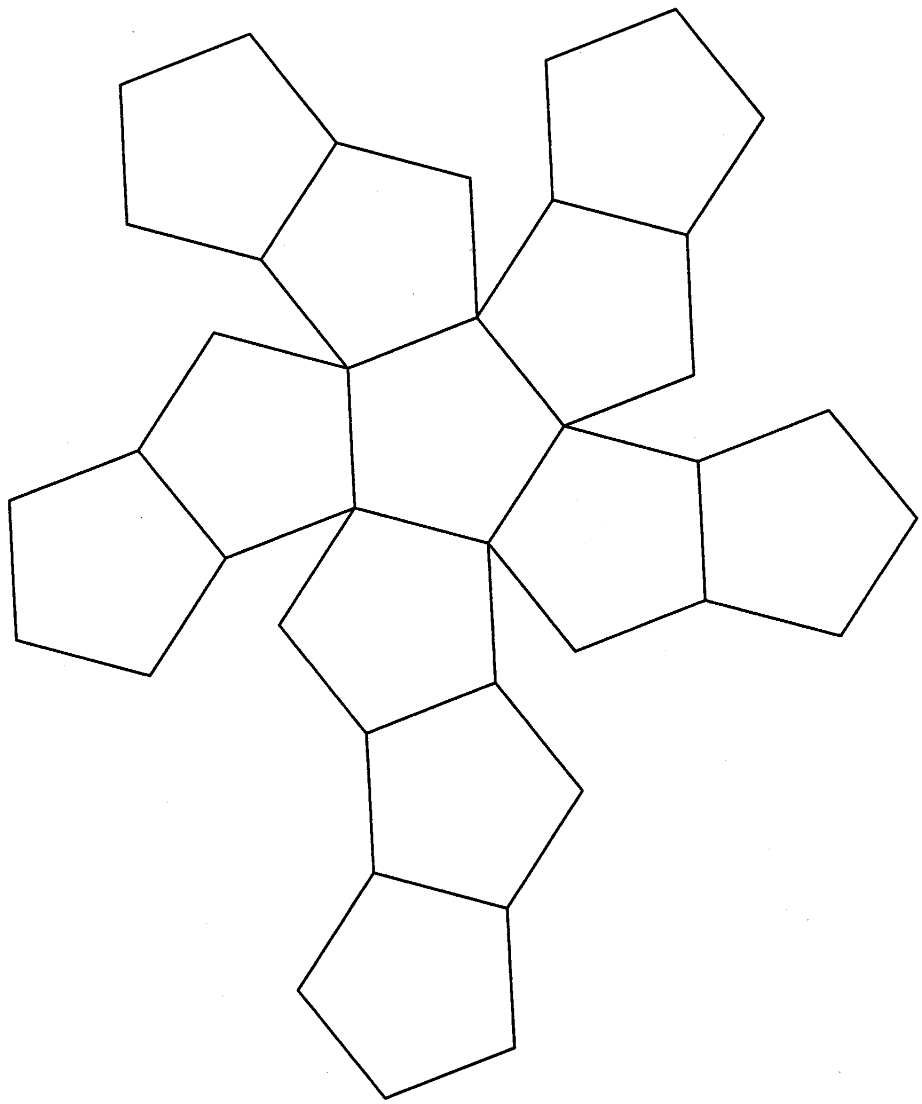
Tetraeder



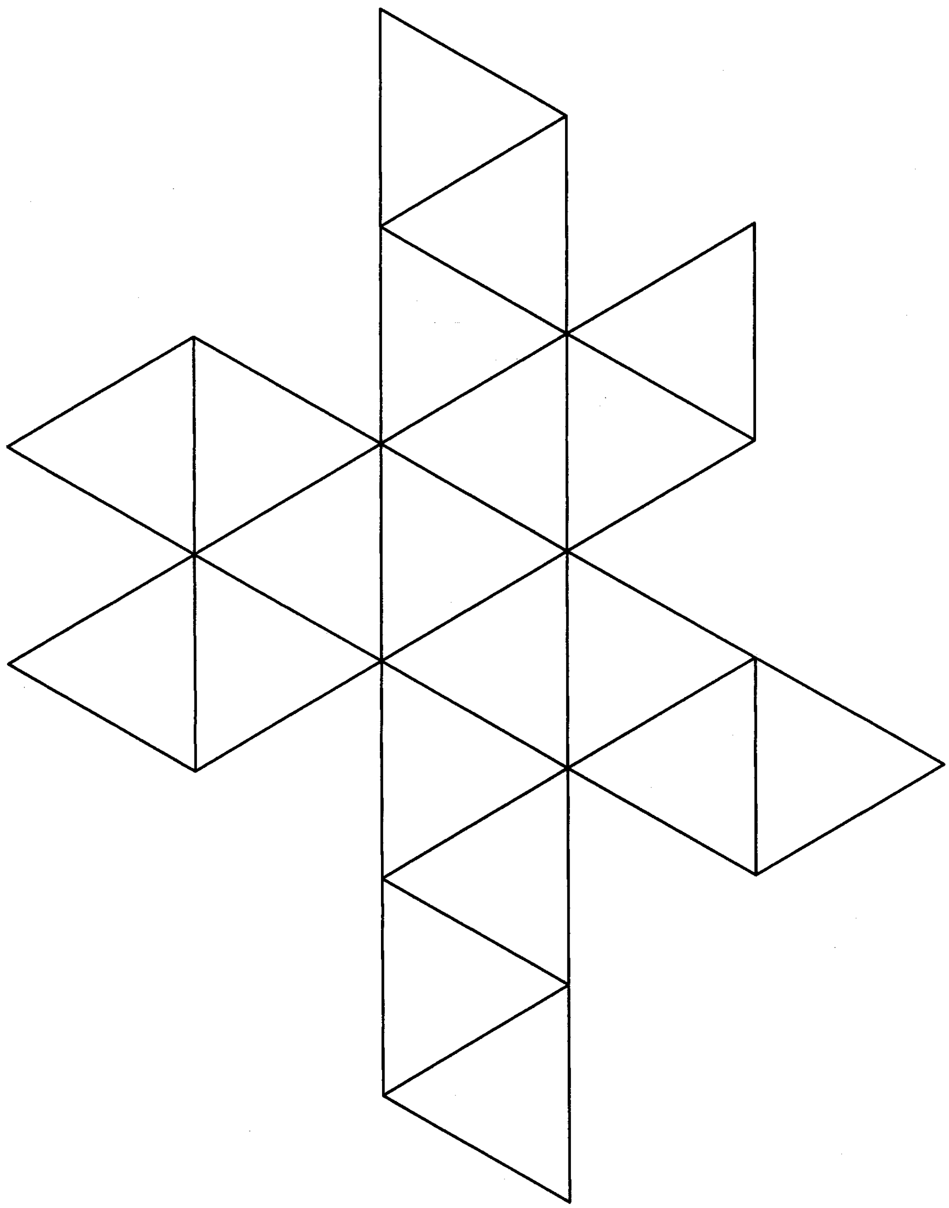
Heksaeder/Kube



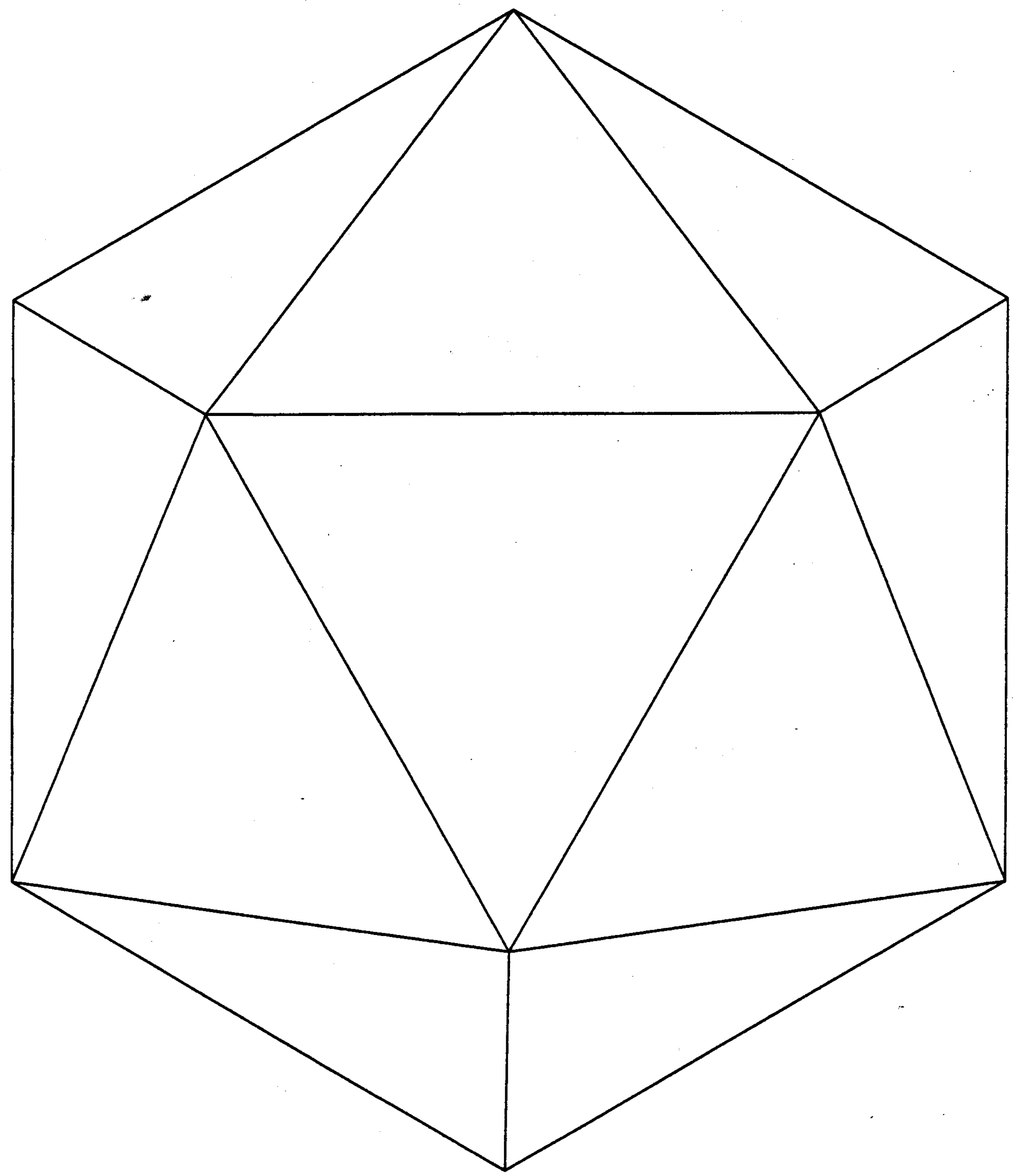
Oktaeder



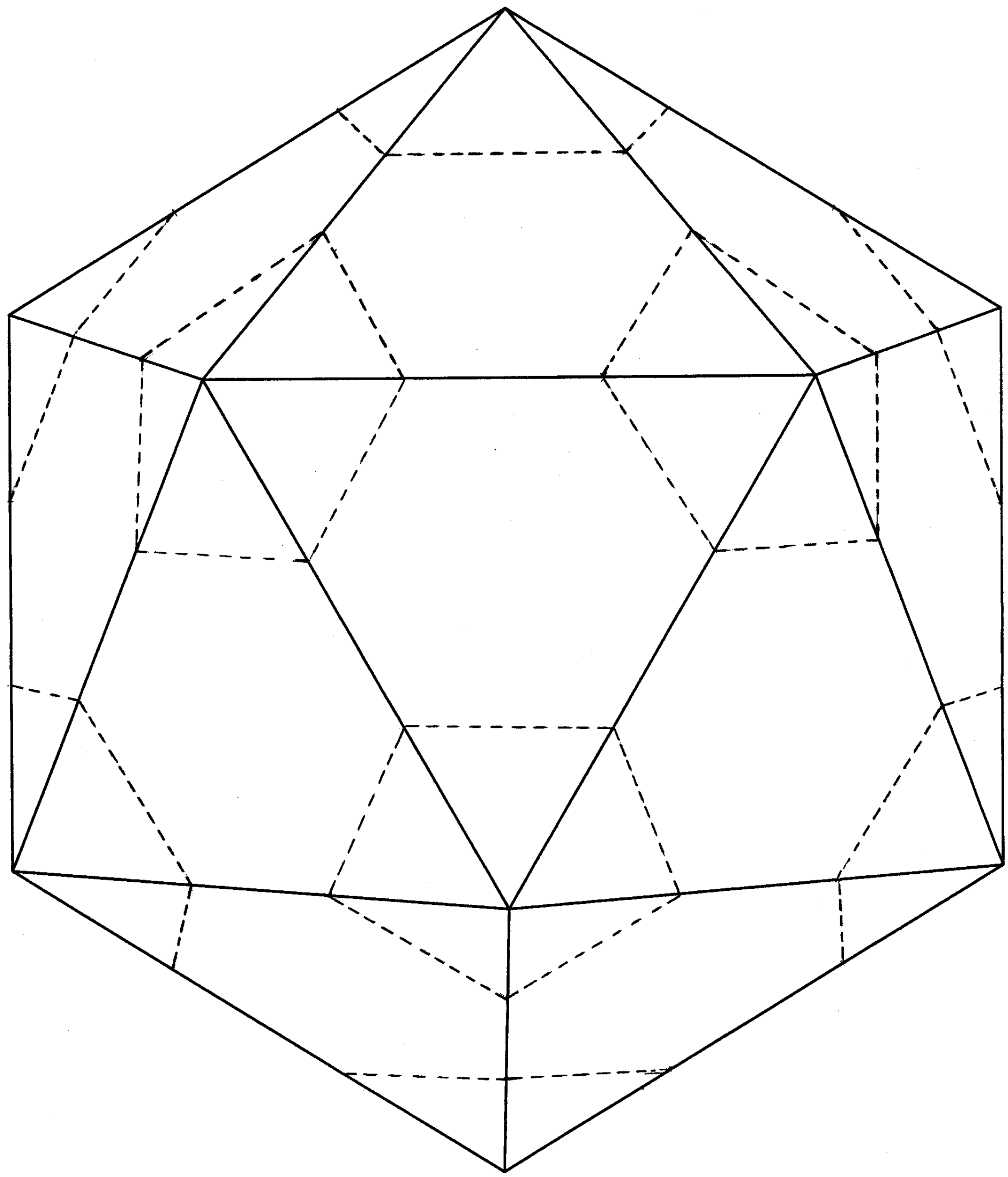
Dodekaeder



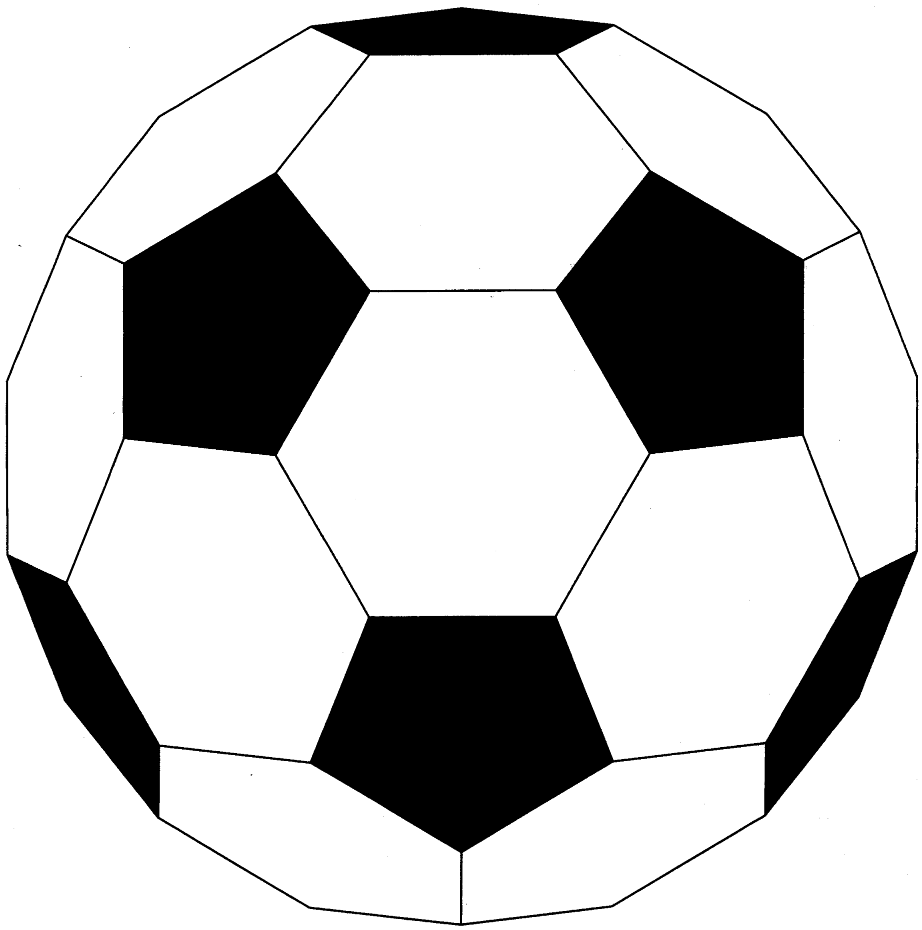
Ikosaeder



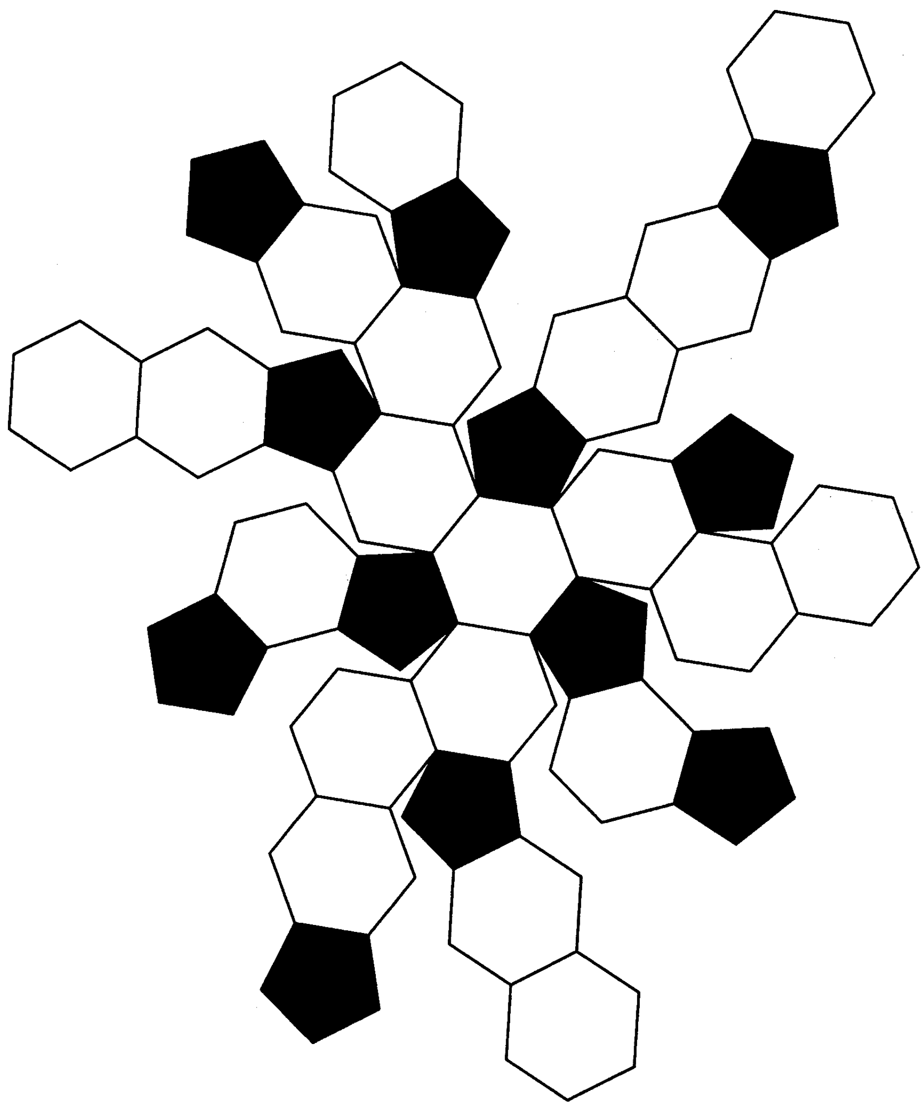
Ikosaeder



Ikosaeder



Avkortet ikosaeder



Avkortet ikosaeder