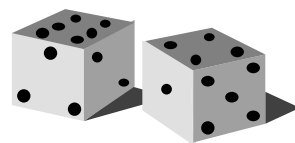




SANNSYNLIGHETSREGNING

Terminologi Kombinatorikk



- Stokastisk** - Et **stokastisk** forsøk er et forsøk underlagt tilfeldige variasjoner, for eks. kast med en terning, trekking av et lottotalt o.l.
- Utfallsrom / utfall (enkeltutfall)** - Kaster vi f.eks. med terning har vi seks ulike muligheter for antall øyne terningen viser. En liste over alle mulighetene kaller vi forsøkets **utfallsrom**, terningøyne 3 og 4 betegnes som **utfall**, hvorav terningøyne 3 representerer det vi kaller et **enkeltutfall**.

EKSEMPEL 1.

For å klargjøre begreper og betegnelser studerer vi “kast med en terning”.

Om vi får oddetall slipper vi oppvasken, får vi partall tar vi oppvasken.

Begivenhet Det vi regner ut sannsynligheten for kalles ofte en **begivenhet**. Begivenheten A definerer vi som : A : Terningens øyne viser oddetall.

Begivenheten $A = \{1, 3, 5\}$ gir 3 gunstige utfall av det totale 6 mulige.

Utfallsrommet $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ viser at vi totalt har 6 mulige

Sannsynlighet Sannsynligheten $P(A) = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall mulige utfall}} = \frac{3}{6} = 0,50$

Relativ frekvens

EKSEMPEL 2.

I et statistisk forsøk kaster Ole og Anne med terning og noterer ned hver gang terningens øyne viser 6. Resultatene er vist i tabellen under.

Antall kast n	Antall seksere a	Relativ frekvens $\frac{a}{n}$
100	19	0,19
300	48	0,16
500	81	0,16

Relativ frekvens defineres som antall gunstige utfall (a) dividert med antall mulige utfall (n).

SANNSYNLIGHETSREGNING

DE STORE TALLS LOV

Tenk deg at vårt mynt/ krone- forsøk fra time 2 utvides slik at elevene arbeider i grupper på to og to og at hver gruppe gjør 100 kast. 30 elever i klassen gir oss 15 forsøksgrupper. Sannsynligheten er like stor for krone som mynt. Likevel kan vi ikke forvente nøyaktig 50 % krone og 50 % mynt. Hvorfor ikke? La elevene være aktive om du tar opp dette spørsmålet til diskusjon i klassen. Stopp forsøket når alle grupper har gjort 5 kast og registrer resultatet. Plott resultatet inn i et diagram som viser antall kast på x-aksen og % eller sannsynlighet som brøk eller desimaltall på y-aksen. Resultatene vil vise at når antall kast i forsøket vårt øker og blir svært stort vil sannsynligheten nærme seg 0.5 i forsøket vårt. Dette er i samsvar med **de store talls lov** som kan formuleres slik :

*Dersom en rekke identiske forsøk gjøres, vil andelen av en bestemt hendelse nærme seg en bestemt verdi når antall forsøk gjøres stadig større. Denne verdien kalles for **sannsynligheten** for den bestemte hendelsen, og kan uttrykkes slik :*

$$\text{sannsynligheten} = \frac{\text{Antall ganger en registrerer hendelsen}}{\text{Antall ganger forsøket ble gjort}}$$

når antall ganger forsøket ble gjort er et stort tall

Hva som menes med et stort tall må videre avklares. Ta utgangspunkt i den verdien klassen finner når hele forsøket avsluttes og la dette være en anledning til å komme inn på begrepet *uendelig* (la antallet gå mot uendelig).

Geometrisk sannsynlighetsmodell

Et eksempel på en slik modell kan være en terning. Om dette er det vi kaller ”**en hederlig terning**” er sannsynligheten like stor for å få *ener* som et hvilket som helst annet av tallene fra 2 til og med seks. Geometrien tilsier at alle sider har like stor sannsynlighet – derfor navnet **geometrisk modell**. La elevene foreslå andre eksempler på geometriske modeller.

Uniform sannsynlighetsmodell

Et klassisk eksempel er trekning av fargete, men ellers identiske kuler fra en boks (se TIME 4 eks. 1). Her vil alle utfallene ha samme sannsynlighet for å inntreffe, vi har det vi kan betegne et *symmetrisk utfallsrom*. Da vil sannsynligheten for en bestemt hendelse være gitt som :

$$\text{sannsynligheten} = \frac{\text{Antall gunstige utfall}}{\text{Antall mulige utfall}}$$

SANNSYNLIGHETSREGNING

Teori - Kombinatorikk

Kombinatorikk er den gren av statistikken som tar for seg ordning og gruppering av elementer og kommer fram til hvor mange ulike kombinasjoner et bestemt statistisk forsøk har.

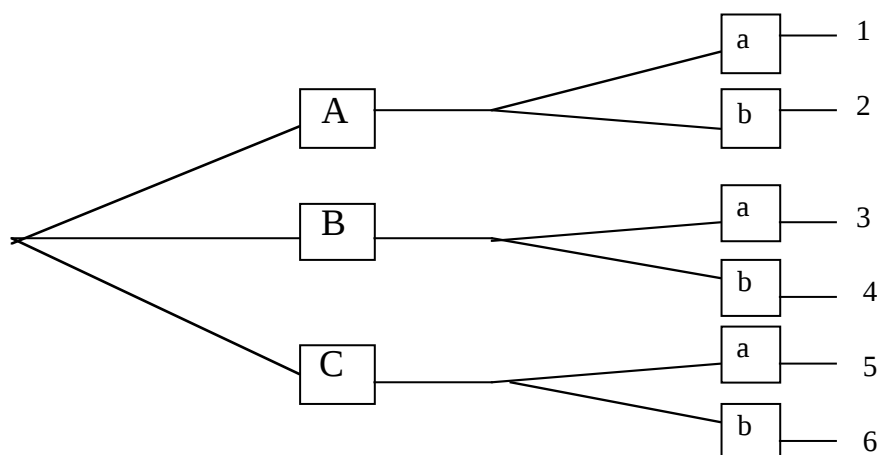
Et sentralt prinsipp innen kombinatorikken er **multiplikasjonsprinsippet**, eller **multiplikasjonsregelen** som den også kalles.

Multiplikasjonsprinsippet

Vi starter opp med å betrakte et eksempel.

EKSEMPEL 1

På en kafé kan du velge mellom 3 ulike middagsretter og 2 desserttyper. Hvor mange ulike kombinasjoner av middag og dessert har du totalt. Figuren under gir svar på problemet.



Figur 1. Oversikt over middag / dessert kombinasjoner.

3 middagsretter og 2 typer dessert gir $3 \cdot 2 = 6$ ulike kombinasjoner.

Figuren over kalles et tredigram og gir en grei oversikt over antall kombinasjoner.

Multiplikasjonsprinsippet :

Dersom et statistisk forsøk har r trinn og n_1 muligheter i første trinn, n_2 muligheter i andre trinn, og n_r muligheter i r 'te trinn, vil vi totalt ha $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$ muligheter .

EKSEMPEL 2

Hvor mange ulike måter kan 4 personer, A, B, C, og D stille i kø på ? Systematiserer vi og starter med A først vil figur 2 under gi oss en oversikt over problemet.

A	B	C	D	6
A	B	D	C	
A	C	B	D	
A	C	D	B	
A	D	B	C	
A	D	C	B	
B	A	C	D	6
B	A	D	C	
B	C	A	D	
B	C	D	A	
B	D	A	C	
B	D	C	A	
C	A	B	D	6
C	A	D	B	
C	B	A	D	
C	B	D	A	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
D	A	B	C	6
D	A	C	B	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	

Figur 2. Oversikt over totalt antall køkombinasjoner.

Figuren over viser klart at vi totalt har $6 \cdot 4 = 24$ ulike kombinasjoner. En annen måte å se dette på er følgende :

- | | |
|--|-----------------------|
| 1. Først i køen kan hhv. A, B, C og D stå. | Antall muligheter = 4 |
| 2. Når den første i køen er valgt er det 3 igjen til plass nr. 2 | Antall muligheter = 3 |
| 3. Når de to første er valgt er det 2 igjen til plass nr. 3 | Antall muligheter = 2 |
| 4. Når de tre første er valgt er det kun 1 mulighet på plass 4 | Antall muligheter = 1 |

Totalt skulle dette gi : $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ mulige køkombinasjoner. Dette kan vi skrive som

$4!$ (4 fakultet) . Øker vi antall personer i køen til 5 vil vi totalt få

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ ulike kombinasjoner. Overnevnte eksempel

representerer en kategori som betegnes : **et ordnet utvalg uten tilbakelegging**.

Et **utvalg uten tilbakelegging** vil si at et objekt som er trukket ut ikke legges tilbake før trekningen foretas påny og følgelig kun kan opptre en gang i utvalget. Ved LOTTO-spill trekkes 7+2 nummererte kuler ut uten tilbakelegging.

Dersom rekkefølgen i utvalget er avgjørende, har vi et **ordnet utvalg** og

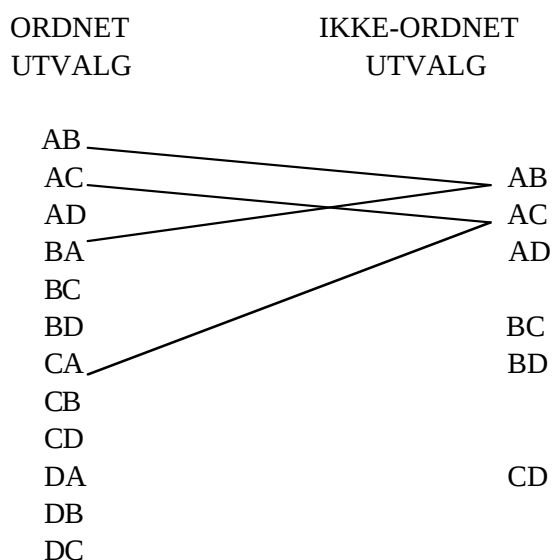
tilsvarende om rekkefølgen ikke spiller noen rolle har vi et **ikke – ordnet utvalg**.

LOTTO-spill er et eksempel på ikke-ordnet utvalg – hvor rekkefølgen av de uttrukne vinnertallene ikke spiller noen rolle.

Ordnet og uordnet utvalg uten tilbakelegging

EKSEMPEL 3

Av 4 bokstaver A, B, C og D skal 2 bokstaver trekkes ut. Hvor mange måter kan dette gjøres på? Oppstilles mulighetene i en figur har vi:



Figur 3. Antall mulige kombinasjoner av 2 uttrukne bokstaver av et utvalg på 4 .

Ved første trekning har vi 4 bokstaver å velge blant, ved neste trekning har vi 3. Dette gir totalt $4 \cdot 3 = 12$ kombinasjoner ved et ordnet utvalg. Ser vi bort fra rekkefølgen, dvs. vi har et uordnet utvalg reduseres antall kombinasjoner til 6.

Ved et ordnet utvalg kan vi generalisere overstående til :

Skal vi trekke s elementer utfra en total populasjon på n vil antall mulige kombinasjoner være gitt ved : $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(s-1))$

Overstående antall kan vi ved å multiplisere med $(n-s)!$ og deretter dividere med $(n-s)!$

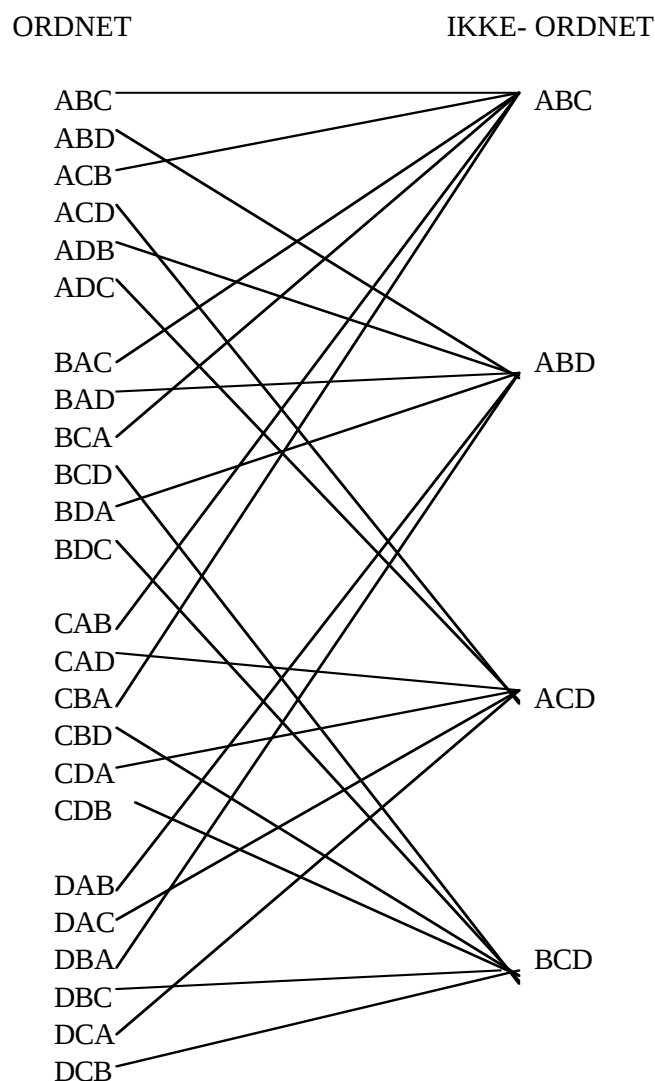
Da får vi :

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(s-1)) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(s-1)) \cdot (n-s) \cdot (n-(s+1)) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-s)!} = \frac{n!}{(n-s)!}$$

Overstående uttrykk lar seg lettere beregne med lommeregner hvor fakultetsfunksjon er tilgjengelig. Telleren er fakultetet av antall elementer vi totalt har til rådighet mens nevneren er fakultetet av de elementer som ikke skal trekkes ut.

EKSEMPEL 4

Utvider vi eksempel 3 til å trekke 3 bokstaver utfra totalt 4 vil følgende muligheter fremtre :



Figur 4 Ordnet og ikke-ordnet utvalg i eksemplets kombinatoriske forsøk.

Antall ordnete utvalg blir (se eksempel 2) : $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Den første av de ikke-ordnete kombinasjonene over, ABC , gir utgangspunkt for $3! = 6$ ordnete kombinasjoner. $3!$ får vi fordi dette representerer totalt antall muligheter å kombinere 3 bokstaver. Økes antallet til 4 bokstaver, ABCD, får vi $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ (se eksempel 2). Antall ikke-ordnete kombinasjoner i overnevnte eksempel finnes ved :

$\frac{\text{Antall ordnete utvalg}}{\text{Ant. måter å ordne 3 bokst. på}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$

Overnevnte oppstilling betegnes: $\binom{4}{3}$ og leses ”4 over 3”.

Generelt kan vi si :

Skal vi trekke s elementer uten tilbakelegging av en populasjon på n vil antall uordnete utvalg være gitt ved :

$$\binom{n}{s} = \frac{n!}{s!(n-s)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(s-1))}{s!}$$

LOTTO

Ved LOTTO-spill trekkes 7 tall ut av en populasjon på 34 tall i alt. Dette er en ikke-ordnet trekning uten tilbakelegging og antall mulige kombinasjoner kan finnes ved :

$$\binom{34}{7} = \frac{34!}{7! \cdot 27!} = \frac{34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{\underline{5.379.616}}$$

En del interessante opplysninger vedrørende overnevnte spill fremgår av tabellen under, som er opplysninger fra Norsk Tipping AS (1999).

Premie	Kombinasjoner	Sannsynlighet	Ant.vinnerrekker	Premie %	Gj.snittlig premiebeløp
7 rette	1	1 : 5.379.616	4,6	30 %	2.420.827
6+1 rette	21	1 : 256.172	97,3	15 %	57.639
6 rette	168	1 : 32.022	778,6	15 %	7.205
5 rette	7.371	1 : 730	34.161,0	20 %	219
4+1 rette	31.535	1 : 171	146.149,4	20 %	51

I LOTTO trekkes det 7 vinnertall + 3 tilleggstall.. 1.03.99 koster hver rekke ved innlevering kr. 3,-