MAT1015 2017 Høst

Eksamenstid
5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler på Del 1
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Hjelpemidler på Del 2
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Fremgangsmåte
Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Bruk av digitale verktøy som graftegner og regneark skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.

Veiledning om vurderingen
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
- vurderer om svar er rimelige

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng) Nettkode: E-4TOG

Tabellen nedenfor viser karakterfordelingen ved en skole ved norskeksamen våren 2017.

Karakter	Antall elever
1	3
2	12
3	25
4	12
5	6
6	2

a)

Hvor mange prosent av elevene fikk karakteren 1 eller 2?

Løsningsforslag a)

Vi skal finne hvor stor prosentandel av alle elevene som fikk karakteren 1 eller 2. Vi begynner med å finne det totale antallet elever. Da summerer vi antall elever for hver karakter:

$$3 + 12 + 25 + 12 + 6 + 2 = 60,$$

som betyr at det er 60 elever på skolen. Av disse elevene fikk $3 + 12 = 15$ elever karakteren 1 eller 2. Da har vi at

$$\frac{15}{60} = \frac{15}{4 \cdot 15} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$

Svar: 25% av elevene fikk karakter 1 eller 2.

b)

Bestem mediankarakteren.

Løsningsforslag b)

Medianen er den midterste observasjonen når vi rangerer dataene våre etter størrelse. Vi har 60 elever, som er et partall. Da vil vi ha 2 observasjoner i midten, den $30.$ og $31.$ observasjonen. Medianen er gjennomsnittet av disse to verdiene.

Vi har 15 elever som fikk karakter 1 og 2, og 25 som fikk karakter 3, det vil si observasjonene 16 til 40. Det betyr at de midterste observasjonene ligger her, og gjennomsnittet av to observasjoner med verdi 3, er 3, så medianen er 3.

Svar: Medianen er 3.

c)

Bestem gjennomsnittskarakteren.

Løsningsforslag c)

For å finne gjennomsnittet må vi summere alle karakterene. Da må vi multiplisere karakteren med antall elever som fikk karakteren. Summen av alle karakterene er da

$$\begin{aligned} & 1\cdot 3+2\cdot 12+3\cdot 25+4\cdot 12+5\cdot 6+6\cdot 2 \\ = & \quad 3+24+75+48+30+12 \\ = & \quad 192. \end{aligned}$$

Det totale antallet elever er 60, så gjennomsnittet er gitt ved

$$\frac{192}{60}=\frac{6\cdot 32}{6\cdot 10}=\frac{32}{10}=3,2.$$

Svar: Gjennomsnittskarakteren er $3,2$.

Oppgave 2 (2 poeng) Nettkode: E-4TOK

Regn og skriv svaret på standardform

$$3,54\cdot 10^6+60000$$

Løsningsforslag

Vi kan begynne med å skrive om

$$3,54\cdot 10^6=3540000.$$

Nå kan vi addere de to tallene

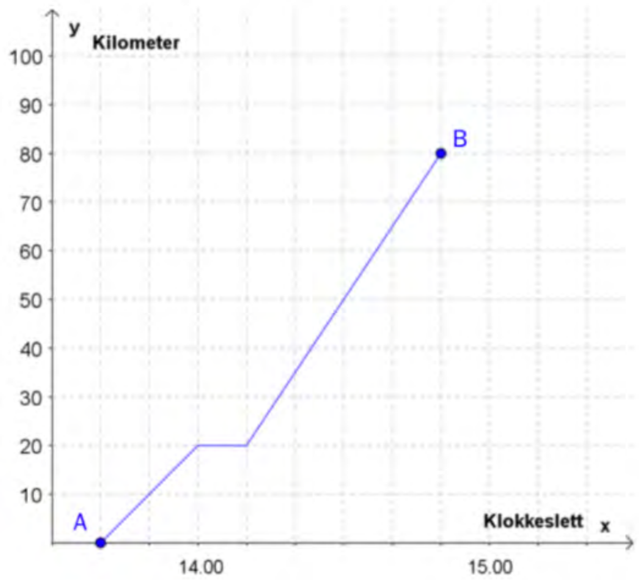
$$3540000+60000=3600000.$$

Svaret skal være på standardform, så da skriver vi

$$3600000=3,6\cdot 10^6.$$

Svar:$3,6\cdot 10^6$.

Oppgave 3 (3 poeng) Nettkode: E-4TOQ



Et tog kjørte fra by A til by B. Se diagrammet ovenfor.

a)

Bestem reisetiden mellom de to byene.

Løsningsforslag a)

Fra x-aksen kan vi se at toget forlater A, 2 enheter før klokka 14.00 og ankommer B, en enhet før klokka 15.00. På rutenettet ser vi at det er 6 enheter mellom $14:00$ til $15:00$ som betyr at hver enhet tilsvarer 10 minutter. Det betyr at toget forlater A klokka 13.40 og ankommer B klokka 14.50. Forskjellen i tid er da

$$14.50 - 13.40 = 1.10$$

som tilsvarer 1 time og 10 minutter.

Svar: Reisetiden er 1 time og 10 minutter.

b)

Beskriv hva som skjer 20 km fra by A.

Løsningsforslag b)

y-aksen forteller oss hvor langt toget har beveget seg. Når $y = 20$ ser vi at grafen er flat. Fra diagrammet har vi at x-verdien øker med en enhet, fra 14.00 til 14.10, og y-verdien konstant. Det betyr at fra klokka 14.00 til 14.10 vil toget ikke bevege seg, altså står det i ro. Klokka 14.10 begynner toget igjen å bevege seg.

Svar: Toget står stille i 10 minutter.

c)

Bestem farten til toget når det er 10 km fra by A, og når det er 10 km fra by B.
Du skal gi svarene i km/h.

Løsningsforslag c)

Vi kan se at de første 20 km fra by A holder toget en jevn fart; avstanden det reiser er lik for hver enhet. Når vi på grafen beveger oss en enhet langs x-aksen, som tilsvarer 10 minutter, øker grafen med 10 km i y-verdi. Det betyr at toget beveger seg 10 kilometer på 10 minutter, som er det samme som at det beveger seg 60 kilometer på 60 minutter, som er 1 time. 10 km fra by A beveger toget seg i 60 km/h.

På diagrammet ser vi at grafen endrer seg etter at toget har stått i ro, da stiger den brattere. For hver x-enhet øker den med større y-verdi, så farten vil være høyere, men fortsatt jevn, for siste strekningen frem til by B. Vi kan se at når vi øker 2 enheter på x-aksen, altså på 20 minutter, øker y-verdien til grafen med 30 kilometer. Så toget beveger seg 30 km på 20 minutter. Det er det samme som å si at toget beveger seg 90 kilometer på 60 minutter. Så, 10 km fra by B har toget en fart på 90 km/h.

Svar: Toget har en fart på 60 km/h 10 km fra A, og 90 km/h 10 km fra B.

Oppgave 4 (2 poeng) Nettkode: E-4TOW

Et idrettslag har 240 medlemmer. Idrettslaget har fire forskjellige aktivitetsgrupper.

Medlemmen fordeler seg slik:

Aktivitetsgruppe	Antall medlemmer
Langrenn	60
Hopp	40
Freestyle	80
Alpint	60

Gjør beregninger og lag et sektordiagram som viser fordelingen mellom medlemmene på de ulike gruppene. Det skal gå klart fram hvor mange grader hver av sektorene i diagrammet er på.

Løsningsforslag

Vi må begynne med å finne ut hvor stor andel av medlemmene som er med i de ulike aktivitetsgruppene. Det gjør vi ved å regne

$$\frac{\text{antall medlemmer i aktivitetsgruppe}}{\text{antall medlemmer totalt}}$$

Fra tabellen kan vi lese at langrenn har 60 medlemmer, og det utgjør en andel på

$$\frac{60}{240} = \frac{1}{4}$$

En sirkel har totalt 360°, og andelen av medlemmer som er med på langrenn er $\frac{1}{4}$ av disse. Vi merker oss at

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 90}{4 \cdot 90} = \frac{90}{360}$$

Det betyr at sektoren i diagrammet som representerer medlemmer på langrenn skal være på 90°.
På hopp er det 40 medlemmer, som utgjør en andel på

$$\frac{40}{240} = \frac{1}{6}.$$

Hvor stor sektoren i diagrammet som representerer medlemmer på hopp finner vi ved

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 60}{6 \cdot 60} = \frac{60}{360}.$$

Det betyr at den skal være på 60°. Det er 80 medlemmer som er på freestyle, som er dobbelt så mange medlemmer som på hopp. Da må sektoren som representerer medlemmene på freestyle også være dobbelt så stor som for hopp; altså

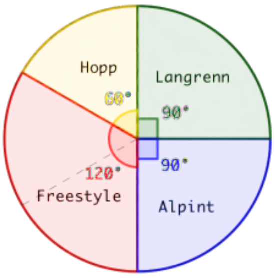
$$2 \cdot 60^\circ = 120^\circ.$$

Alpint har 60 medlemmer, like mange som langrenn. Da må sektoren som representerer alpint og langrenn være like stor, nemlig 90°. For å forsikre oss, kan vi nå summere alle sektordelene å se at vi ender opp på 360°. Vi har

$$90^\circ + 60^\circ + 120^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

Nå skal vi tegne sektordiagrammet. To av sektorene, for langrenn og alpint er begge på 90°, og utgjør en kvart sirkel. Vi kan begynne med å dele sirkelen i to, og deretter den ene halvsirkelen i to like store deler. Da utgjør disse sektorene langrenn og hopp. Da har vi en halvsirkel igjen, med 180° som skal utgjøre sektorene for hopp og freestyle. Sektoren for hopp er på 60°, som utgjør $\frac{1}{3}$ av 180°, og sektoren for freestyle er på 120° som utgjør $\frac{2}{3}$ av 180°. Det betyr at vi kan dele den andre halvsirkelen inn i tre deler, der sektoren for hopp utgjør en del, og sektoren for freestyle utgjør to deler. Vi skriver inn hvor mange grader hver av sektorene er på i diagrammet.

Svar:



Oppgave 5 (2 poeng) Nettkode: E-4TOY

Du får 40% rabatt på en billett. Rabatten utgjør 120 kroner.

Hvor mye ville billetten ha kostet dersom du ikke hadde fått rabatt?

Løsningsforslag

Rabatten på 120 kroner utgjør 40% av billettprisen. Det betyr at

$$\text{billettpris} \cdot \frac{40}{100} = 120\text{kr}.$$

Da kan vi bestemme billettprisen ved

$$\text{billettpris} = 120\text{kr} \cdot \frac{100}{40} = \frac{12000}{40} = \frac{1200}{4} = 300.$$

Svar: Billetten hadde kostet 300 kroner.

Oppgave 6 (5 poeng) Nettkode: E-4TP2

I en butikk kan kundene kjøpe armbånd og charms (små figurer) til å feste på armbåndene. Butikken selger alle charms til samme pris.

Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom antall charms en kunde setter på et armbånd, og prisen kunden må betale for armbåndet med charms.

Antall charms	3	7
Pris for armbånd med charms (kroner)	1350	2450

a)
Hvor mye koster armbåndet, og hvor mye koster hver charm?

Løsningsforslag a)

Vi får oppgitt at prisen for armbånd med 3 charms er 1350 kroner, og for armbånd med 7 charms er 2450 kroner. Forskjellen i prisen på de to armbåndene,

$$2450 - 1350 = 1100$$

kroner tilsvarer prisen for $7 - 3 = 4$ charms. Det betyr at prisen for hver charm er

$$\frac{1100}{4} = 275$$

kroner. Vi kan bruke dette til å bestemme prisen for et armbånd, for vi har at

$$\text{prisen for armbånd} + 3 \cdot \text{prisen for hver charm} = 1350$$

kroner og kan sette prisen for hver charm. Da får vi at prisen per armbånd i kroner er

$$1350 - 3 \cdot 275 = 1350 - 825 = 525.$$

Svar: Armbåndet koster 525 kroner og hver charm koster 275 kroner.

b)
Bestem en lineær modell som viser sammenhengen mellom antall charms på armbåndet og samlet pris for armbånd med charms.

Løsningsforslag b)

Vi vil finne en lineær funksjon på formen $f(x) = ax + b$ som viser sammenhengen mellom antall charms på armbåndet og samlet pris. Her er x antall charms, og $f(x)$ er samlet pris. Konstantleddet er prisen når $x = 0$, altså uten noen charms, men kun for armbåndet. I oppgave a) fant vi at prisen for armbåndet er 525 kroner, så $b = 525$. Stigningstallet a forteller hvor mye prisen øker med, når x øker med en enhet. Siden x er antall charms, er stigningstallet prisen for hver charm, som er 275 kroner. En lineær modell som viser sammenhengen er

$$f(x) = 275x + 525.$$

Svar: $\underline{\underline{f(x) = 275x + 525}}$.

Hanne betaler 3825 kroner for et armbånd med charms.

c)
Hvor mange charms har hun på armbåndet?

Løsningsforslag c)

Hanne betaler 3825 kroner. Dersom vi bruker modellen fra oppgave b) vil det si at

$$f(x) = 275x + 525 = 3825.$$

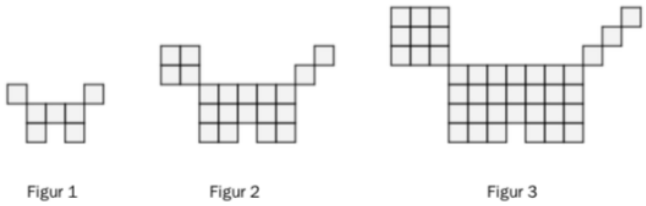
Vi skal bestemme hvor mange charms x Hanne har på armbåndet, og da kan vi løse likningen:

$$\begin{aligned} 275x + 525 &= 3825 \\ 275x &= 3825 - 525 \\ 275x &= 3300 \\ x &= \frac{3300}{275} \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Når vi løser denne likningen kan vi merke oss i oppgave a) fant vi ut at 4 charms kostet 1100 kroner, som medfører at $3 \cdot 4 = 12$ charms må koste $1100 \cdot 3 = 3300$ kroner.

Svar: Hanne har 12 charms.

Oppgave 7 (5 poeng) Nettkode: E-4TP9



Ovenfor ser du tre figurer. Figurene er satt sammen av små kvadrater. Tenk deg at du skal fortsette å lage små figurer med samme mønster.

a)

Hvor mange små kvadrater vil det være i figur 4?

Løsningsforslag a)

Figuren kan se ut som et dyr, med hode til venstre, kropp i midten og hale til høyre. Hodet er et kvadrat med sidelengde lik figurnummeret, det betyr at figur 1 består av $1 \cdot 1 = 1$ kvadrat, figur 2 består av $2 \cdot 2 = 4$ små kvadrater også videre. Det betyr at hodet på figur 4 består av $4 \cdot 4 = 16$ små kvadrater.

Vi kan se at halen til figurene består av like mange små kvadrater som figurnummeret, så figur 4 har hale bestående av 4 små kvadrater.

Da gjenstår kroppen til dyret, som er et rektangel, der 1 lite kvadrat er tatt bort. Bredden til rektangelet er én mer enn figurnummeret; for figur 1 er bredden 2, for figur 2 er bredden 3 og så videre. Lengden til kvadratet er det dobbelte av figurnummeret, og lagt til 1. Figur 1 har lengde $2 \cdot 1 + 1 = 3$ og figur 2 har lengde $2 \cdot 2 + 1 = 5$ og tilsvarende for figur 3. Det betyr at rektangelet til figur 4 har bredde $4 + 1 = 5$ og lengde $2 \cdot 4 + 1 = 9$. For å finne antall små kvadrater i kroppen må vi finne antall kvadrater i rektangelet, og trekke fra 1. Kroppen til figur 4 består da av

$$5 \cdot 9 - 1 = 45 - 1 = 44$$

små kvadrater.

Antall små kvadrater i figur 4 er da summen av kvadrater i hode, hale og kropp;

$$16 + 4 + 44 = 64.$$

Svar: Det vil være 64 små kvadrater.

b)

Bestem et uttrykk for antall små kvadrater i figur n uttrykt ved n.

Løsningsforslag b)

I oppgave a) delte vi inn figuren i tre deler og så på hvordan vi ut fra figurnummeret kunne bestemme antall små kvadrater i hver del. Vi skal nå gjøre dette generelt for figur n.
Vi så at vi kunne bestemme antall små kvadrater i hodet ved å se at hodet består av et kvadrat med sidelengde lik figurnummeret. Det medfører for figur n at hodet består av $n \cdot n = n^2$ små kvadrater.

Halen består av like mange små kvadrater som figurnummeret, så for figur n består halen av n små kvadrater.

Da gjenstår bare kroppen. Den består av et rektangel, der vi tar vekk et lite kvadrat. Rektangelet har bredde som er én mer en figurnummeret, så for figur n har vi bredde $n+1$. Lengden til rektangelet var det dobbelte av figurnummeret, lagt til én, så for figur n har vi lengde $2n+1$. Kroppen til figur n vil da bestå av

$$\left(n+1\right)\left(2n+1\right)-1=2n^2+n+2n+1-1=2n^2+3n$$

små kvadrater.

Nå kan vi summere antall kvadrater for hver del for å finne ut hvor mange kvadrater hele figur n består av. Et uttrykk f for antall små figurer i figur n er da

$$f\left(n\right)=n^2+n+2n^2+3n=3n^2+4n.$$

Svar: $\underline{\underline{f\left(n\right)=3n^2+4n.}}$

c)

Hvor mange små kvadrater vil det være i figur 20.

Løsningsforslag c)

I oppgave b) fant vi et uttrykk $f(n)$ for antall små kvadrater i figur n. Nå skal vi bestemme antall små kvadrater i figur 20, som betyr at vi har $n=20$, og kan regne ut $f(20)$.
Vi setter inn i uttrykket:

$$\begin{aligned} f(20) &= 3\cdot 20^2+4\cdot 20 \\ &= 3\cdot 400+80 \\ &= 1200+80 \\ &= 1280 \end{aligned}$$

Svar: Det vil være 1280 små kvadrater i figur 20.

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng) Nettkode: E-4TPF

Tabellen nedenfor viser antall innbyggere i Norge $1.$januar noen utvalgte år.

År	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2017
Innbyggere (millioner)	3,57	3,86	4,08	4,23	4,47	4,85	5,25

La x være antall år etter 1960. (La $x = 0$ svare til år 1960, $x = 10$ til 1970 osv.)

a)

Vis at $f(x) = 3{,}57 \cdot 1{,}006^x$ er en modell som passer godt med tallene i tabellen.

Løsningsforslag a)

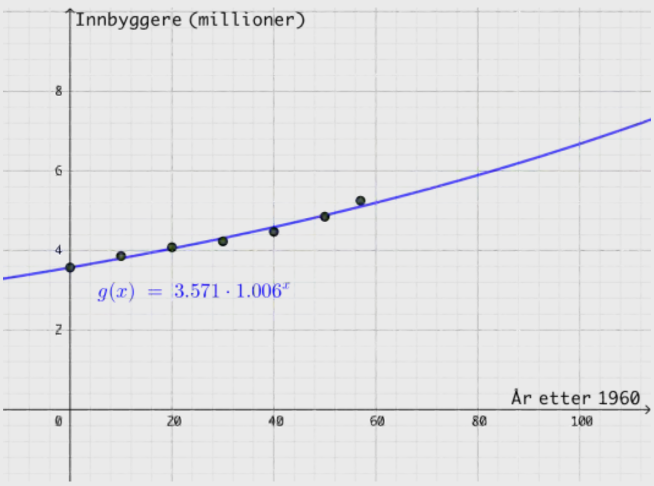
Vi finner en modell antall innbyggere i Norge ved å bruke regresjon i GeoGebra. Vi begynner med å skrive inn informasjonen vi får fra tabellen inn i et regneark, x-verdiene i den første kolonnen, og innbyggere i den andre kolonnen.

	A	B
1	0	3.57
2	10	3.86
3	20	4.08
4	30	4.23
5	40	4.47
6	50	4.85
7	57	5.25

Vi markerer rutene vi har fylt inn, høyreklikker og velger "Liste med punkt" i "Lag"-menyen. Da får vi en liste som blir hetende L_1. Når vi skal skrive inn denne i GeoGebra, skriver vi L_1. Nå vil vi finne en modell ved regresjon, som passer godt med den informasjonen i tabellen, og videre vil vi sammenlikne denne med funksjonen

$$f(x) = 3,57 \cdot 1,006^x.$$

f er en funksjon på formen $a \cdot b^x$, altså en eksponentialfunksjon. Vi vil lage en modell som er samme type funksjon, og da kan vi bruke kommandoen
`RegEksp(<Liste med punkt>)`.
Det vil gi oss en eksponentialfunksjon. Vi vil bruke punktene i listen L_1 og skriver da
`g=RegEksp(L_1)`. I "Innstillinger" i GeoGebra kan vi velge at vi skal se 3 desimaler. Vi får opp



Dersom vi runder av $3,571 \approx 3,57$ har vi den samme funksjonen som oppgitt i oppgaven, så $f(x)$ er en modell som passer godt.

b)
Hva forteller tallet $1{,}006$ i denne modellen?

Løsningsforslag b)

Funksjonen $f(x) = 3,57 \cdot 1,006^x$ er en eksponentialfunksjon. Tallet $1,006$ er vekstfaktoren til funksjonen, og forteller noe om den prosentvise økningen av innbyggere per år. Vekstfaktor er gitt som $1 + \frac{p}{100}$, der p er den prosentvise økningen. Vi har at

$$1,006 = 1 + 0,006 = 1 + \frac{6}{1000} = 1 + \frac{0,6}{100},$$

så i følge denne modellen øker antall innbyggere i Norge med $0,6\%$ i gjennomsnitt per år siden 1960.

Svar: $1,006$ forteller at innbyggertallet øker i gjennomsnitt med $0,6\%$ hvert år.

Anta at modellen fra oppgave a) vil gjelde i årene framover.

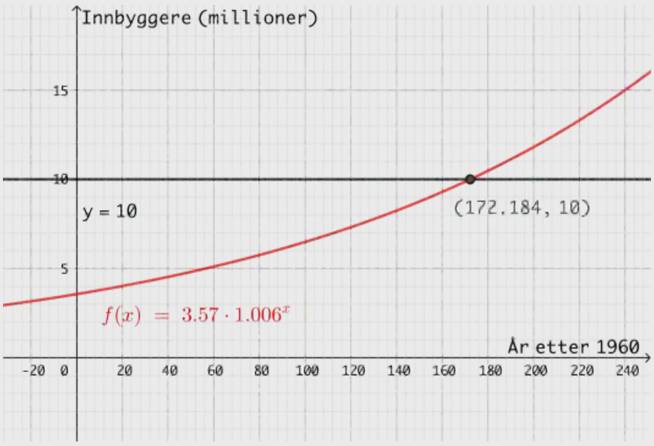
c)
I hvilket år vil innbyggertallet i Norge passere 10 millioner i følge denne modellen?

Løsningsforslag c)

Vi skal finne når innbyggertallet passerer 10 millioner i følge modellen. Med andre ord, siden $f(x)$ gir innbyggertallet i millioner vil vi finne når $f(x)$ er større enn 10. Vi skriver inn funksjonen $f(x)$ ved å skrive

$$\texttt{f}(\texttt{x}) = 3.57{*}1.006{\hat{}}\texttt{x}$$

Nå vil vi finne skjæringspunktet mellom grafen til f og ei linje $y = 10$. Vi skriver inn `y=10`, og finner skjæringspunktet mellom grafen til f og linja $y = 10$.

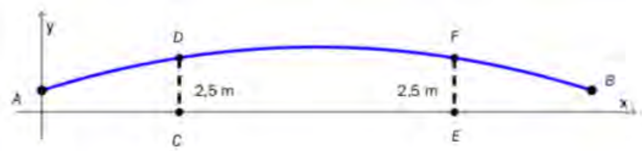


Da får vi punktet $(172,2,10)$. Det betyr at innbyggertallet vil passere 10 millioner $172,2$ år etter 1960, som er i 2132.

Svar: I følge modellen vil innbyggertallet passere 10 millioner i 2132.

Oppgave 2 (6 poeng) Nettkode: E-4TPO

En gangbro går over en elv. I koordinatsystemet nedenfor har vi tegnet en skisse av broen. På skissen går broen fra punkt A til punkt B.



Funksjonen G gitt ved

$$G(x) = -0,0008x^2 + 0,08x + 1,0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 100$$

viser broens høyde $G(x)$ meter over elva ved normal vannstand der den horisontale avstanden fra A er x meter.

a)

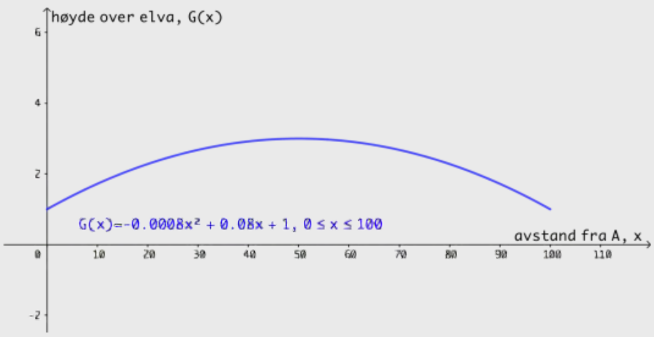
Bruk graftegner til å tegne grafen til G.

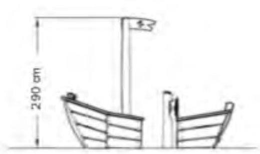
Løsningsforslag a)

Vi bruker GeoGebra til å tegne grafen. Da skriver vi inn

$$\texttt{G} = \texttt{Funksjon}\left(-0.0008\mathbf{x}^\wedge 2 + 0.08\mathbf{x} + 1.0, 0, 100\right)$$

i "Skriv inn"-vinduet. Vi tilpasser og setter navn på aksene. Resultatet blir da:





En båt har mast som når 290 cm over vannflaten. Se ovenfor.

b)

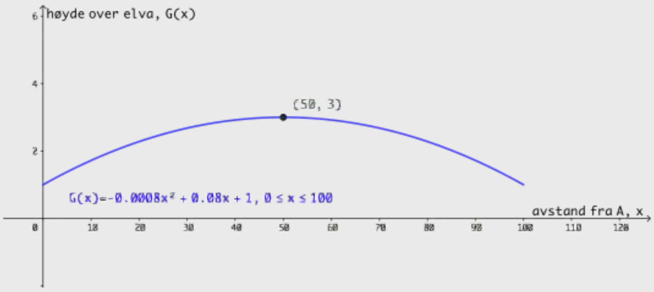
Vil båten kunne passere under broen ved normal vannstand?

Løsningsforslag b)

Det er 100 cm i 1 meter, det betyr at $290 \text{ cm} = 2,9 \text{ m}$. Broen må altså være over $2,9 \text{ m}$ over elva ved normal vannstand. Vi kan sjekke hvor høyt det høyeste punktet på broen er over elva, ved å finne toppunktet til G. Da skriver vi inn

$$\texttt{Maks}(\texttt{G}, 0, 100)$$

og får opp toppunktet $(50, 3)$.



Det betyr at på det høyeste punktet er broen 3 m over elven, og båten kan passere under broen.

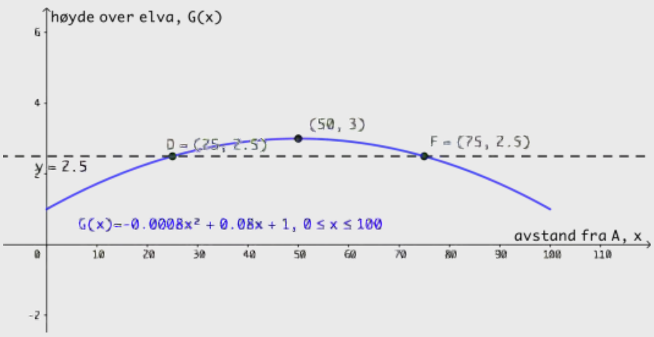
Svar: Ja, båten kan passere ved normal vannstand.

Broen har to bropilarer i punktene D og F. Ved normal vannstand er høydene CD og EF fra vannflaten opp til broen lik $2{,}5$ m.

c)
Bestem avstanden fra C til E.

Løsningsforslag c)

Vi får vite at D og F ligger $2,5$ meter over elva. Det betyr at $G(x) = 2,5$ for x-verdien til D og F. Vi kan finne disse x-verdiene ved å tegne opp linja $y = 2,5$. Den vil gå gjennom D og F. Ved å bruke skjæringsverktøyet i GeoGebra, kan vi bestemme koordinatene til D og F.
Vi skriver inn $\mathrm{y} = 2.5$ og finner skjæringspunktene:



Vi ser at D ligger 25 meter fra A og F ligger 75 meter fra A, og tilsvarende har vi at C ligger 25 meter og E ligger 75 meter fra A. Avstanden fra C til E er da $75 - 25 = 50$ meter.

Svar: Avstanden fra C til E er 50 meter.

Oppgave 3 (3 poeng) Nettkode: E-4TQ0

Maskin A og maskin B fyller vann op flasker. I hver flaske skal det være 500 mL vann.

Anders måler hvor mye vann det er i 20 av flaskene fra maskin A. Nedenfor ser du resultatene.

510 mL	490 mL	495 mL	480 mL	520 mL
500 mL	504 mL	508 mL	501 mL	516 mL
498 mL	485 mL	499 mL	502 mL	515 mL
505 mL	497 mL	500 mL	493 mL	516 mL

a)
Bestem gjennomsnittet og standardavviket for antall mL vann på de 20 flaskene.

Løsningsforslag a)

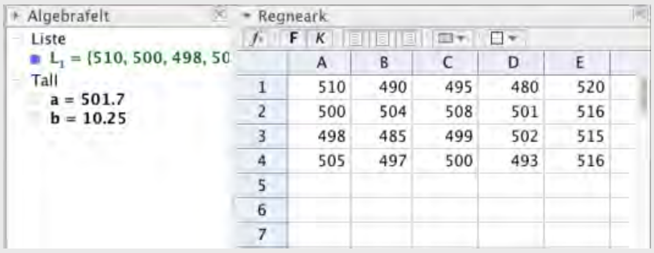
Vi skriver inn antall mL i alle flaskene i et regneark i GeoGebra. Vi markerer tallene vi har skrevet, høyreklikker og velger "Liste" i "Lag"-menyen. Listen blir hetende L_1, som vi skriver inn i GeoGebra ved L_1.
For å finne gjennomsnittet skriver vi inn kommandoen

$$\texttt{Gjennomsnitt}(\texttt{L}\_1).$$

Da får vi opp tallet $a = 501,7$. Gjennomsnittet er altså $501,7$ mL.
Når vi skal finne standardavviket bruker vi kommandoen "Standardavvik", og skriver

$$\texttt{Standardavvik}(\texttt{L}\_1).$$

Da får vi opp tallet $b = 10,25$. Standardavviket er dermed $10,25$ mL.



	A	B	C	D	E
1	510	490	495	480	520
2	500	504	508	501	516
3	498	485	499	502	515
4	505	497	500	493	516
5					
6					
7					

Svar: Gjennomsnittet er $501,7$ mL og standardavviket er $10,25$ mL.

Anders måler også hvor mye vann det er i 20 flasker fra maskin B. Han regner ut at gjennomsnittet er det samme som for maskin A, men at standardavviket er $2{,}5$ mL.

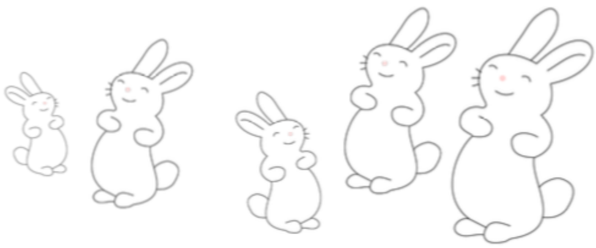
b)
Hva kan vi si om de 20 flaskene fra maskin B sammenliknet med de 20 flaskene fra maskin A ut fra disse beregningene?

Løsningsforslag b)

Maskinene har samme gjennomsnitt, men standardavviket er større for maskin A. Det forteller oss at flaskene fylt av maskin A varierer mer i volum, enn flaskene fylt av maskin B, som vil ha likere volum i flaskene.

Svar: Innholdet i flaskene fra maskin A varierer mer i volum, enn flaskene fra maskin B.

Oppgave 4 (6 poeng) Nettkode: E-4TQ8



I dag er det 280 kaniner innenfor et avgrenset område. Anta at en sykdom brer seg blant kaninene, og at det om 20 måneder bare vil være 40 kaniner igjen i området.

a)

Sett opp en modell som viser hvor mange kaniner det vil være i området om x måneder dersom antallet avtar lineært.

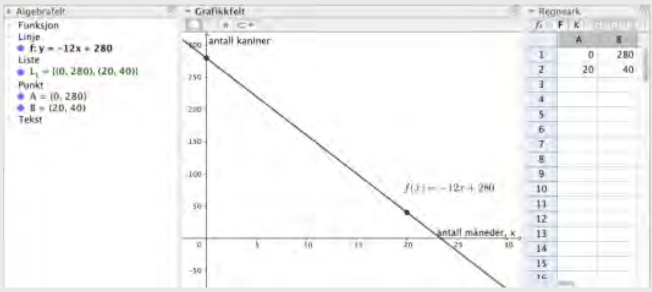
Løsningsforslag a)

Vi kan løse oppgaven ved regresjon i GeoGebra. Vi lar $f(x)$ betegne antall kaniner etter x måneder. Fra oppgaven får vi informasjon om at når $x = 0$ er $f(x) = 280$, og for $x = 20$ er $f(x) = 40$. Vi kan skrive denne informasjonen inn i et regneark, med x-verdiene i den første kolonnen, og y-verdiene i den andre. Videre markere vi rutene vi har skrevet i, høyreklikker og velger "Liste med punkt" i "Lag"-menyen. Da får vi opp listen L_1, som vi skriver inn ved L_1 i GeoGebra.

Siden antallet kaniner avtar lineært, vil vi ha en lineær modell. Da bruker vi kommandoen $\texttt{RegLin}$ og skriver

$$\texttt{f(x) = RegLin(L\_1)}.$$

Da får vi opp linja med likning $f : y = -12x + 280$, som betyr at en lineær modell som viser antallet kaniner, dersom antallet avtar lineært, er $f(x) = -12x + 280$



Svar: $f(x) = -12x + 280$ er en modell der antallet kaniner avtar lineært.

b)

Sett opp en modell som viser hvor mange kaniner det vil være i området om x måneder dersom antallet avtar eksponentielt.

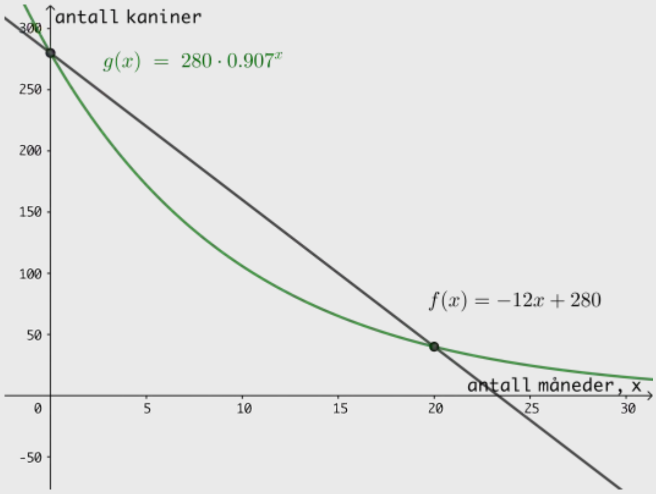
Løsningsforslag b)

Vi har den samme informasjonen om kaninbestanden, så vi kan fortsette i samme GeoGebra-vindu som i oppgave a). Nå vil vi ha en eksponentiell modell basert på punktene $(0, 280)$ og $(20, 40)$, som vi har i L_1. Da bruker vi kommandoen $\texttt{RegEksp}$ og skriver

$$\texttt{g(x) = RegEksp(L\_1)}.$$

Nå får vi opp funksjonen

$$g(x) = 280 \cdot 0,907^x.$$



Svar: $g(x) = 280 \cdot 0,907^x$ er en modell der antallet kaniner avtar eksponentielt.

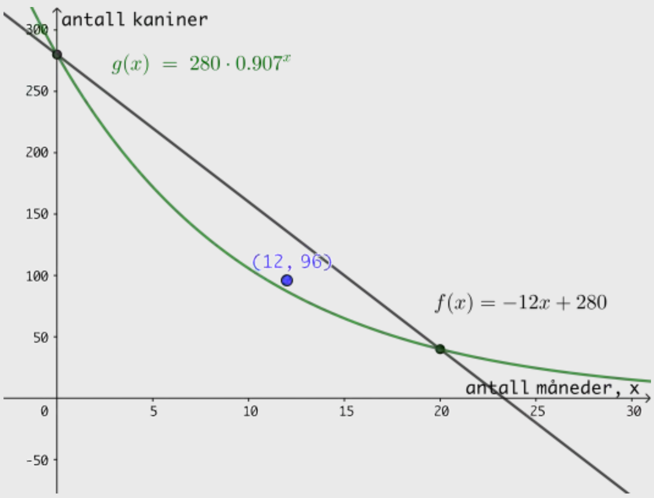
Anta at det om ett år vil være 96 kaniner igjen i området.

c)

Vurder om det da er mest rimelig å anta at nedgangen vil være lineær eller eksponentiell.

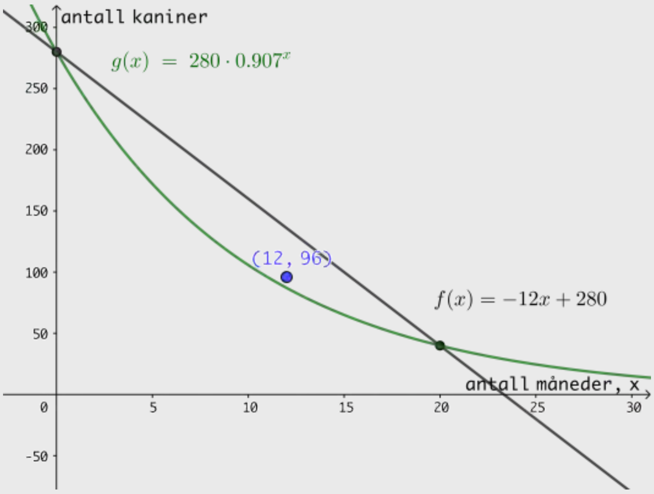
Løsningsforslag c)

Vi skal se på antall kaniner etter ett år, som tilsvarer at $x = 12$. Da antar vi at det er 96 kaniner igjen. Vi kan tegne inn punktet $(12, 96)$ i GeoGebra-vinduet med de to modellene. Da får vi opp:



Her kan vi se at punktet som tilsvarer at er 96 kaniner igjen etter ett år, ligger klart nærmere grafen til $g(x)$ som er den eksponentielle modellen. Fra grafene til funksjonene kan vi se at for $f(x)$ er antallet kaniner negativt etter $x \approx 23$, noe som ikke er mulig.

Svar: Det er rimelig å anta at nedgangen er eksponentiell.



Her kan vi se at punktet som tilsvarer at er 96 kaniner igjen etter ett år, ligger klart nærmere grafen til $g(x)$ som er den eksponentielle modellen. Fra grafene til funksjonene kan vi se at for $f(x)$ er antallet kaniner negativt etter $x \approx 23$, noe som ikke er mulig.

Svar: Det er rimelig å anta at nedgangen er eksponentiell.

Oppgave 5 (8 poeng) Nettkode: E-4TQG

I en klasse på Vg2 idrettsfag er det 30 elever. Tabellen nedenfor viser hvor mye elevene trener utenom skoletiden i løpet av en uke.

Antall minutter	Antall elever	Kumulativ frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ relativ frekvens
$[0, 60\rangle$	3			
$[60, 180\rangle$	6			
$[180, 300\rangle$	12			
$[300, 420\rangle$	6			
$[420, 540\rangle$	3			

a)

Tegn av tabellen i besvarelsen din, og fyll inn verdier for kumulativ frekvens, relativ frekvens og kumulativ relativ frekvens.

Løsningsforslag a)

Vi skal fylle inn verdier i kolonnene for kumulativ, relativ og kumulativ relativ frekvens. Den kumulative frekvensen til et intervall er hvor mange av elevene som trener antall timer i et intervall, eller i et lavere intervall.
Relativ frekvens er hvor stor andel av elevene som trente det gitte antall timer i et intervall.
Kumulativ relativ frekvens til et intervall er andelen av alle elever som trener antall timer i intervallet, eller mindre.
Vi kan begynne å skrive inn tabellen slik den er:

Antall minutter	Antall elever	Kumulativ frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ relativ frekvens
$[0, 60\rangle$	3			
$[60, 180\rangle$	6			
$[180, 300\rangle$	12			
$[300, 420\rangle$	6			
$[420, 540\rangle$	3			

Vi begynner med å fylle inn tabellen øverst, og jobber oss nedover. Den kumulative frekvensen til det første intervallet vil være det samme som antall elever i intervallet, altså 3.
Den relative frekvensen er andelen elever som trener mellom 0 og 60 timer. I klassen er det 30 elever, så da utgjør 3 elever en andel på

$$\frac{3}{30} = 0,1.$$

Kumulativ relativ frekvens vil være lik den relative frekvensen for det første intervallet; $0,1$.

Da kan vi fylle inn den første raden:

Antall minutter	Antall elever	Kumulativ frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ relativ frekvens
$[0, 60\rangle$	3	3	$0,1$	$0,1$
$[60, 180\rangle$	6			
$[180, 300\rangle$	12			
$[300, 420\rangle$	6			
$[420, 540\rangle$	3			

Vi fortsetter med den neste intervallet, $[60, 180\rangle$. I dette intervallet er det 6 elever. De utgjør en andel på

$$\frac{6}{30} = 0,2,$$

som er den relative frekvensen. Den kumulative relative frekvensen finner vi ved å summere de relative frekvensene for dette intervallet og intervallet med mindre antall treningstimer; $0,1 + 0,2 = 0,3$. Vi fyller inn neste rad.

Antall minutter	Antall elever	Kumulativ frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ relativ frekvens
$[0,60\rangle$	3	3	$0,1$	$0,1$
$[60,180\rangle$	6	9	$0,2$	$0,3$
$[180,300\rangle$	12			
$[300,420\rangle$	6			
$[420,540\rangle$	3			

I intervallet $[180,300\rangle$ har vi 12 elever. Det medfører at den kumulative frekvensen blir $9+12=21$. De 12 elevene utgjør en andel på

$$\frac{12}{30} = 0,4,$$

så den relative frekvensen er $0,4$. Den kumulative relative frekvensen er $0,3+0,4=0,7$, og vi fyller inn for neste rad.

Antall minutter	Antall elever	Kumulativ frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ relativ frekvens
$[0,60\rangle$	3	3	$0,1$	$0,1$
$[60,180\rangle$	6	9	$0,2$	$0,3$
$[180,300\rangle$	12	21	$0,4$	$0,7$
$[300,420\rangle$	6	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$[420,540\rangle$	3	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Det er 6 elever i intervallet $[300,420\rangle$. Det er like mange elever som i intervallet $[60,180\rangle$, så den relative frekvensen er den samme, $0,2$. Den kumulative frekvensen er $21+6=27$ og den kumulative relative frekvensen er $0,7+0,2=0,9$.
I det siste intervallet $[420,540\rangle$ er det 3 elever, så den relative frekvensen er $0,1$, som for det første intervallet. Den kumulative frekvensen er $27+3=30$, som er det samme antallet som elever i klassen, og den kumulative relative frekvensen er $0,9+0,1=1$. Den ferdige tabellen vil da se slik ut:

Antall minutter	Antall elever	Kumulativ frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ relativ frekvens
$[0,60\rangle$	3	3	$0,1$	$0,1$
$[60,180\rangle$	6	9	$0,2$	$0,3$
$[180,300\rangle$	12	21	$0,4$	$0,7$
$[300,420\rangle$	6	27	$0{,}2$	$0,9$
$[420,540\rangle$	3	30	$0,1$	1

b)
Lag et histogram som viser hvor mye elevene trener utenom skoletiden.

Løsningsforslag b)

Vi kan bruke GeoGebra for å lage histogrammet. Da må vi begynne med å bestemme histogramhøyden for intervallene. De bestemmer vi ved

$$\frac{\text{frekvens}}{\text{klassebredde}}.$$

Høyden vil gi oss antall elever per minutt trening.. Vi begynner med å skrive inn klassegrensene i første kolonne i et regneark i GeoGebra.

Regneark

	A	B	C
1	Klassegrense		
2	0		
3	60		
4	180		
5	300		
6	420		
7	540		

Videre finner vi klassebredden. Da kan vi, for det første intervallet subtrahere laveste klassegrense fra den øverste, altså $60-0$. I GeoGebra kan vi skrive $\mathtt{A3}-\mathtt{A2}$, og kopiere formelen til rutene under.
For å regne høyden i histogrammet må vi også ha frekvensen, som er antall elever. Vi skriver inn informasjonen fra tabellen i neste kolonne.

Regneark

	A	B	C
1	Klassegrense	Klassebredde	Frekvens
2	0	A3 - A2	3
3	60	A4 - A3	6
4	180	A5 - A4	12
5	300	A6 - A5	6
6	420	A7 - A6	3
7	540		

Nå kan vi regne histogramhøyden for de ulike intervallene, og for det første intervallet finner vi høyden ved $\mathtt{C2}/\mathtt{B2}$. Vi kan kopiere formelen, og da vil regnearket se slik ut:

Regneark

	A	B	C	D
1	Klassegrense	Klassebredde	Frekvens	Histogramhøyde
2	0	60	3	0.05
3	60	120	6	0.05
4	180	120	12	0.1
5	300	120	6	0.05
6	420	120	3	0.03
7	540			

og med formler:

Regneark

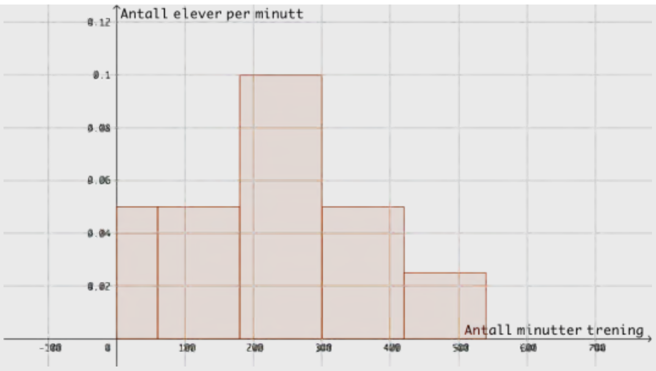
	A	B	C	D
1	Klassegrense	Klassebredde	Frekvens	Histogramhøyde
2	0	A3 - A2	3	C2 / B2
3	60	A4 - A3	6	C3 / B3
4	180	A5 - A4	12	C4 / B4
5	300	A6 - A5	6	C5 / B5
6	420	A7 - A6	3	C6 / B6
7	540			

For å lage histogrammet kan vi bruke kommandoen

$$\mathtt{Histogram}(<\mathtt{Liste\ med\ klassegrenser}>,<\mathtt{Liste\ med\ h\o yder}>.$$

Det som gjenstår før vi kan bruke kommandoen er å markere kolonnene med henholdsvis klassegrenser og høyder, høyreklikker og velger "Liste" i "Lag"-menyen. Da får vi opp listene L_1 og L_2. Nå kan vi lage histogrammet ved å skrive

$$\mathtt{Histogram}(\mathtt{L\_1},\mathtt{L\_2}).$$



c)

Bestem gjennomsnittet for det klassedelte datamaterialet.

Løsningsforslag c)

Vi kan bruke kommandoen

$$\texttt{Gjennomsnitt}(< \texttt{Liste med verdier } (\texttt{n}) \texttt{ eller klassegrenser } (\texttt{n}+1) >, < \texttt{Liste med frekvenser} >.$$

Listen med klassegrenser L_1 laget vi i b), så da trenger vi bare å lage en liste med frekvenser. Vi markerer kolonnen med frekvensene, høyreklikker og velger "Liste" i "Lag"-menyen, og får opp listen L_3. Da kan vi bestemme gjennomsnittet ved å skrive

$$\texttt{Gjennomsnitt}(\texttt{L}\_1, \texttt{L}\_3$$

og får at gjennomsnittet er 243.

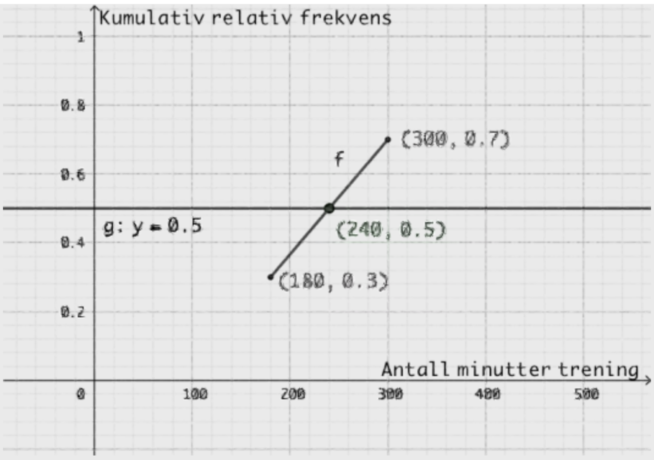
Svar: Gjennomsnittet er på 243 minutter i uka.

d)

Bestem medianen for det klassedelte datamaterialet.

Løsningsforslag d)

Medianen er den midterste observasjonen, og vi kan bruke de kumulative relative frekvensene for å bestemme medianen. Da vil vi bestemme antall minutter når vi har kumulativ relativ frekvens lik $0,5$. Fra tabellen i oppgave a) har vi at andelen elever som trener mindre enn 180 minutter i uka er $0,3$, og andelen som trener mindre enn 300 minutter er $0,7$, så medianen må ligge i intervallet $[180, 300\rangle$. For å bestemme mer nøyaktig, kan vi merke av punktene $(180,\ 0,3)$ og $(300,\ 0,7)$, og tegne inn linjestykket g mellom dem. Hvis mengden trening fordeler seg jevnt i intervallet, vil denne linjen gi en god tilnærming til fordelingen for elevene i intervallet. Vi kan nå finne medianen ved å finne skjæringspunktet mellom linja $y = 0,5$ og linjestykket f.



Skjæringspunktet er $(240,\ 0,5)$, så medianen er 240.

Svar: Medianen er 240 minutter trening i uken.

Oppgave 6 (8 poeng) Nettkode: E-4TQR

Karen lånte $90\,000$ kroner den $1.$ november $2017.$ Hun har fått følgende betingelser for nedbetaling av lånet:

- en rente på $0{,}4\,\%$ per måned
- månedlige terminer
- et fast avdrag på 2500 kroner per termin
- termingebyr 50 kroner

a)

Vis at første terminbeløp blir 2910 kroner.

Løsningsforslag a)

Terminbeløpet er summen av renter, fast avdrag og termingebyr. Det faste avdraget er på 2500 kroner per termin, og termingebyret er på 50 kroner. For å bestemme første terminbeløp må vi vite hvor mye Karen måtte betale i renter ved første termin, når gjelden er på $90\,000$ kroner. Renten er på $0,4\%$, og da får vi at rentebeløpet i kroner er

$$90\,000 \cdot 0,4\% = 90\,000 \cdot 0,004 = 360.$$

Første terminbeløp er da

$$2500 + 50 + 360 = 2910.$$

Svar: Første terminbeløp blir 2910 kroner.

b)

Lag et regneark som Karen kan bruke for å holde oversikt over lånet til det er nedbetalt. Nedenfor ser du hvordan de første radene i regnearket skal se ut.

	A	B		C		D		E		F	
1	**Lånebeløp:**	kr	90 000,00								
2	**Rente per måned:**		0,4 %								
3	**Avdrag per termin:**	kr	2 500,00								
4	**Termingebyr:**	kr	50,00								
5											
6	**Termin**	**Rente**		**Avdrag**		**Gebyr**		**Terminbeløp**		**Restgjeld**	
7	01.11.2017									kr	90 000,00
8	01.12.2017	kr	360,00	kr	2 500,00	kr	50,00	kr	2 910,00	kr	87 500,00
9	01.01.2018	kr	350,00	kr	2 500,00	kr	50,00	kr	2 900,00	kr	85 000,00
10	01.02.2018	kr	340,00	kr	2 500,00	kr	50,00	kr	2 890,00	kr	82 500,00

Løsningsforslag b)

Vi begynner å skrive av de øverste radene i regnearket, som vist i oppgaven.

	A	B	C	D	E	F
1	**Lånebeløp:**	kr 90 000,00				
2	**Rente per måned:**	0,4 %				
3	**Avdrag per termin:**	kr 2 500,00				
4	**Termingebyr:**	kr 50,00				
5						
6	**Termin**	**Rente**	**Avdrag**	**Gebyr**	**Terminbeløp**	**Restgjeld**
7	01.11.2017					kr 90 000,00
8	01.12.2017		kr 2 500,00	kr 50,00		
9	01.01.2018		kr 2 500,00	kr 50,00		

Vi vil bruker formler når vi gjør utregningene våre. Restgjelden for første termin vil være lik lånebeløpet, så i `F7` kan vi skrive inn `=B1`. Avdrag og gebyr er faste avgifter som er gitt øverst i regnearket, og vi skriver i `C8` og `D8` henholdsvis `=$B$3` og `=$B$4`. Da kan vi kopiere denne formelen til cellen i kolonnene under.

Renten beregner vi ut fra restgjelden, og rentesatsen er den samme hvert termin. For første termin kan vi beregne renten ved `=F7*$B$2`. Terminbeløpet er summen av rente, avdrag og gebyr, og for første termin bestemmer vi dette ved `=B8+C8+D8`.
Restgjelden finner vi ved å subtrahere avdraget fra restgjelden, så etter første termin er restgjelden gitt ved `F7-C8`. Vi kan nå kopiere formlene til cellene i kolonnene under. Resultatet blir da:

	A	B	C	D	E	F
1	**Lånebeløp:**	kr 90 000,00				
2	**Rente per måned:**	0,4 %				
3	**Avdrag per termin:**	kr 2 500,00				
4	**Termingebyr:**	kr 50,00				
5						
6	**Termin**	**Rente**	**Avdrag**	**Gebyr**	**Terminbeløp**	**Restgjeld**
7	01.11.2017					kr 90 000,00
8	01.12.2017	kr 360,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 910,00	kr 87 500,00
9	01.01.2018	kr 350,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 900,00	kr 85 000,00
10	01.02.2018	kr 340,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 890,00	kr 82 500,00
11	01.03.2018	kr 330,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 880,00	kr 80 000,00
12	01.04.2018	kr 320,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 870,00	kr 77 500,00
13	01.05.2018	kr 310,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 860,00	kr 75 000,00
14	01.06.2018	kr 300,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 850,00	kr 72 500,00
15	01.07.2018	kr 290,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 840,00	kr 70 000,00
16	01.08.2018	kr 280,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 830,00	kr 67 500,00
17	01.09.2018	kr 270,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 820,00	kr 65 000,00
18	01.10.2018	kr 260,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 810,00	kr 62 500,00
19	01.11.2018	kr 250,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 800,00	kr 60 000,00
20	01.12.2018	kr 240,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 790,00	kr 57 500,00
21	01.01.2019	kr 230,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 780,00	kr 55 000,00
22	01.02.2019	kr 220,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 770,00	kr 52 500,00
23	01.03.2019	kr 210,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 760,00	kr 50 000,00
24	01.04.2019	kr 200,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 750,00	kr 47 500,00
25	01.05.2019	kr 190,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 740,00	kr 45 000,00
26	01.06.2019	kr 180,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 730,00	kr 42 500,00
27	01.07.2019	kr 170,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 720,00	kr 40 000,00
28	01.08.2019	kr 160,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 710,00	kr 37 500,00
29	01.09.2019	kr 150,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 700,00	kr 35 000,00
30	01.10.2019	kr 140,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 690,00	kr 32 500,00
31	01.11.2019	kr 130,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 680,00	kr 30 000,00
32	01.12.2019	kr 120,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 670,00	kr 27 500,00
33	01.01.2020	kr 110,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 660,00	kr 25 000,00
34	01.02.2020	kr 100,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 650,00	kr 22 500,00
35	01.03.2020	kr 90,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 640,00	kr 20 000,00
36	01.04.2020	kr 80,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 630,00	kr 17 500,00
37	01.05.2020	kr 70,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 620,00	kr 15 000,00
38	01.06.2020	kr 60,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 610,00	kr 12 500,00
39	01.07.2020	kr 50,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 600,00	kr 10 000,00
40	01.08.2020	kr 40,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 590,00	kr 7 500,00
41	01.09.2020	kr 30,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 580,00	kr 5 000,00
42	01.10.2020	kr 20,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 570,00	kr 2 500,00
43	01.11.2020	kr 10,00	kr 2 500,00	kr 50,00	kr 2 560,00	kr -

Med formler vil regnearket se slik ut:

	A	B	C	D	E	F
1	**Lånebeløp:**	90000				
2	**Rente per måned:**	0,004				
3	**Avdrag per termin:**	2500				
4	**Termingebyr:**	50				
5						
6	**Termin**	**Rente**	**Avdrag**	**Gebyr**	**Terminbeløp**	**Restgjeld**
7	01.11.2017					=B1
8	01.12.2017	=F7*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B8+C8+D8	=F7-C8
9	01.01.2018	=F8*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B9+C9+D9	=F8-C9
10	01.02.2018	=F9*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B10+C10+D10	=F9-C10
11	01.03.2018	=F10*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B11+C11+D11	=F10-C11
12	01.04.2018	=F11*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B12+C12+D12	=F11-C12
13	01.05.2018	=F12*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B13+C13+D13	=F12-C13
14	01.06.2018	=F13*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B14+C14+D14	=F13-C14
15	01.07.2018	=F14*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B15+C15+D15	=F14-C15
16	01.08.2018	=F15*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B16+C16+D16	=F15-C16
17	01.09.2018	=F16*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B17+C17+D17	=F16-C17
18	01.10.2018	=F17*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B18+C18+D18	=F17-C18
19	01.11.2018	=F18*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B19+C19+D19	=F18-C19
20	01.12.2018	=F19*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B20+C20+D20	=F19-C20
21	01.01.2019	=F20*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B21+C21+D21	=F20-C21
22	01.02.2019	=F21*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B22+C22+D22	=F21-C22
23	01.03.2019	=F22*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B23+C23+D23	=F22-C23
24	01.04.2019	=F23*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B24+C24+D24	=F23-C24
25	01.05.2019	=F24*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B25+C25+D25	=F24-C25
26	01.06.2019	=F25*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B26+C26+D26	=F25-C26
27	01.07.2019	=F26*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B27+C27+D27	=F26-C27
28	01.08.2019	=F27*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B28+C28+D28	=F27-C28
29	01.09.2019	=F28*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B29+C29+D29	=F28-C29
30	01.10.2019	=F29*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B30+C30+D30	=F29-C30
31	01.11.2019	=F30*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B31+C31+D31	=F30-C31
32	01.12.2019	=F31*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B32+C32+D32	=F31-C32
33	01.01.2020	=F32*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B33+C33+D33	=F32-C33
34	01.02.2020	=F33*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B34+C34+D34	=F33-C34
35	01.03.2020	=F34*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B35+C35+D35	=F34-C35
36	01.04.2020	=F35*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B36+C36+D36	=F35-C36
37	01.05.2020	=F36*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B37+C37+D37	=F36-C37
38	01.06.2020	=F37*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B38+C38+D38	=F37-C38
39	01.07.2020	=F38*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B39+C39+D39	=F38-C39
40	01.08.2020	=F39*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B40+C40+D40	=F39-C40
41	01.09.2020	=F40*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B41+C41+D41	=F40-C41
42	01.10.2020	=F41*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B42+C42+D42	=F41-C42
43	01.11.2020	=F42*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B43+C43+D43	=F42-C43

c)

Hvor mye må Karen totalt betale for dette lånet?

Løsningsforslag c)

Karen betaler terminbeløp hver måned, og ved å summere alle terminbeløpene finner vi hvor mye hun må betale totalt for lånet. Vi kan finne dette ved å bruke regnearket fra oppgave b), og skrive `=SUMMER(E8:E43)`.

40	01.08.2020	kr	40,00	kr	2 500,00	kr	50,00	kr	2 590,00	kr	7 500,00
41	01.09.2020	kr	30,00	kr	2 500,00	kr	50,00	kr	2 580,00	kr	5 000,00
42	01.10.2020	kr	20,00	kr	2 500,00	kr	50,00	kr	2 570,00	kr	2 500,00
43	01.11.2020	kr	10,00	kr	2 500,00	kr	50,00	kr	2 560,00	kr	-
44						Sum terminbeløp		kr	98 460,00		

40	01.08.2020	=F39*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B40+C40+D40	=F39-C40
41	01.09.2020	=F40*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B41+C41+D41	=F40-C41
42	01.10.2020	=F41*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B42+C42+D42	=F41-C42
43	01.11.2020	=F42*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B43+C43+D43	=F42-C43
44				Sum terminbeløp	=SUMMER(E8:E43)	

Svar: Karen må totalt betale $98\,460,00$ kroner for lånet.

Like etter Karen inngikk låneavtalen ovenfor, så hun en reklame der hun kunne ha fått følgende betingelser for nedbetaling av et lån på $90\ 000$ kroner:

- en rente på $0{,}5\,\%$ per måned
- månedlige terminer
- et fast avdrag på 2500 kroner per termin
- ingen gebyrer

d)

Hvor mye måtte Karen totalt ha betalt for dette lånet?

Løsningsforslag d)

Vi kan bruke regnearket fra oppgave b). Siden vi har brukt informasjonen fra de øverste radene i beregningene, kan vi bare endre inndata til de nye betingelsene. Det som er forandret er renten, som er på $0,5\%$ i stedet for $0,4\%$, og at vi ikke har termingebyr.

Med utgangspunkt i det andre regnearket, kan vi nå skrive inn i `B2` $0,5\%$, og i `B4` kan vi skrive inn 0.

Da endrer beløpene i regnearket seg, og vi for dette lånet vil det se slik ut:

	A	B	C	D	E	
1	**Lånebeløp:**	90000				
2	**Rente per måned:**	0,005				
3	**Avdrag per termin:**	2500				
4	**Termingebyr:**	0				
5						
6	**Termin**	**Rente**	**Avdrag**	**Gebyr**	**Terminbeløp**	**Restgjeld**
7	01.11.2017					=B1
8	01.12.2017	=F7*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B8+C8+D8	=F7-C8
9	01.01.2018	=F8*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B9+C9+D9	=F8-C9
10	01.02.2018	=F9*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B10+C10+D10	=F9-C10
11	01.03.2018	=F10*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B11+C11+D11	=F10-C11
12	01.04.2018	=F11*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B12+C12+D12	=F11-C12
13	01.05.2018	=F12*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B13+C13+D13	=F12-C13
14	01.06.2018	=F13*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B14+C14+D14	=F13-C14
15	01.07.2018	=F14*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B15+C15+D15	=F14-C15
16	01.08.2018	=F15*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B16+C16+D16	=F15-C16
17	01.09.2018	=F16*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B17+C17+D17	=F16-C17
18	01.10.2018	=F17*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B18+C18+D18	=F17-C18
19	01.11.2018	=F18*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B19+C19+D19	=F18-C19
20	01.12.2018	=F19*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B20+C20+D20	=F19-C20
21	01.01.2019	=F20*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B21+C21+D21	=F20-C21
22	01.02.2019	=F21*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B22+C22+D22	=F21-C22
23	01.03.2019	=F22*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B23+C23+D23	=F22-C23
24	01.04.2019	=F23*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B24+C24+D24	=F23-C24
25	01.05.2019	=F24*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B25+C25+D25	=F24-C25
26	01.06.2019	=F25*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B26+C26+D26	=F25-C26
27	01.07.2019	=F26*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B27+C27+D27	=F26-C27
28	01.08.2019	=F27*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B28+C28+D28	=F27-C28
29	01.09.2019	=F28*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B29+C29+D29	=F28-C29
30	01.10.2019	=F29*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B30+C30+D30	=F29-C30
31	01.11.2019	=F30*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B31+C31+D31	=F30-C31
32	01.12.2019	=F31*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B32+C32+D32	=F31-C32
33	01.01.2020	=F32*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B33+C33+D33	=F32-C33
34	01.02.2020	=F33*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B34+C34+D34	=F33-C34
35	01.03.2020	=F34*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B35+C35+D35	=F34-C35
36	01.04.2020	=F35*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B36+C36+D36	=F35-C36
37	01.05.2020	=F36*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B37+C37+D37	=F36-C37
38	01.06.2020	=F37*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B38+C38+D38	=F37-C38
39	01.07.2020	=F38*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B39+C39+D39	=F38-C39
40	01.08.2020	=F39*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B40+C40+D40	=F39-C40
41	01.09.2020	=F40*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B41+C41+D41	=F40-C41
42	01.10.2020	=F41*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B42+C42+D42	=F41-C42
43	01.11.2020	=F42*$B$2	=$B$3	=$B$4	=B43+C43+D43	=F42-C43
44				**Sum terminbeløp**	=SUMMER(E8:E43)	

og med formler:

	A	B	C	D	E	F
1	**Lånebeløp:**	kr 90 000,00				
2	**Rente per måned:**	0,5 %				
3	**Avdrag per termin:**	kr 2 500,00				
4	**Termingebyr:**	kr -				
5						
6	**Termin**	**Rente**	**Avdrag**	**Gebyr**	**Terminbeløp**	**Restgjeld**
7	01.11.2017					kr 90 000,00
8	01.12.2017	kr 450,00	kr 2 500,00	kr -	kr 2 950,00	kr 87 500,00
9	01.01.2018	kr 437,50	kr 2 500,00	kr -	kr 2 937,50	kr 85 000,00
10	01.02.2018	kr 425,00	kr 2 500,00	kr -	kr 2 925,00	kr 82 500,00
11	01.03.2018	kr 412,50	kr 2 500,00	kr -	kr 2 912,50	kr 80 000,00
12	01.04.2018	kr 400,00	kr 2 500,00	kr -	kr 2 900,00	kr 77 500,00
13	01.05.2018	kr 387,50	kr 2 500,00	kr -	kr 2 887,50	kr 75 000,00
14	01.06.2018	kr 375,00	kr 2 500,00	kr -	kr 2 875,00	kr 72 500,00
15	01.07.2018	kr 362,50	kr 2 500,00	kr -	kr 2 862,50	kr 70 000,00
16	01.08.2018	kr 350,00	kr 2 500,00	kr -	kr 2 850,00	kr 67 500,00
17	01.09.2018	kr 337,50	kr 2 500,00	kr -	kr 2 837,50	kr 65 000,00
18	01.10.2018	kr 325,00	kr 2 500,00	kr -	kr 2 825,00	kr 62 500,00
19	01.11.2018	kr 312,50	kr 2 500,00	kr -	kr 2 812,50	kr 60 000,00
20	01.12.2018	kr 300,00	kr 2 500,00	kr -	kr 2 800,00	kr 57 500,00
21	01.01.2019	kr 287,50	kr 2 500,00	kr -	kr 2 787,50	kr 55 000,00
22	01.02.2019	kr 275,00	kr 2 500,00	kr -	kr 2 775,00	kr 52 500,00
23	01.03.2019	kr 262,50	kr 2 500,00	kr -	kr 2 762,50	kr 50 000,00
24	01.04.2019	kr 250,00	kr 2 500,00	kr -	kr 2 750,00	kr 47 500,00
25	01.05.2019	kr 237,50	kr 2 500,00	kr -	kr 2 737,50	kr 45 000,00
26	01.06.2019	kr 225,00	kr 2 500,00	kr -	kr 2 725,00	kr 42 500,00
27	01.07.2019	kr 212,50	kr 2 500,00	kr -	kr 2 712,50	kr 40 000,00
28	01.08.2019	kr 200,00	kr 2 500,00	kr -	kr 2 700,00	kr 37 500,00
29	01.09.2019	kr 187,50	kr 2 500,00	kr -	kr 2 687,50	kr 35 000,00
30	01.10.2019	kr 175,00	kr 2 500,00	kr -	kr 2 675,00	kr 32 500,00
31	01.11.2019	kr 162,50	kr 2 500,00	kr -	kr 2 662,50	kr 30 000,00
32	01.12.2019	kr 150,00	kr 2 500,00	kr -	kr 2 650,00	kr 27 500,00
33	01.01.2020	kr 137,50	kr 2 500,00	kr -	kr 2 637,50	kr 25 000,00
34	01.02.2020	kr 125,00	kr 2 500,00	kr -	kr 2 625,00	kr 22 500,00
35	01.03.2020	kr 112,50	kr 2 500,00	kr -	kr 2 612,50	kr 20 000,00
36	01.04.2020	kr 100,00	kr 2 500,00	kr -	kr 2 600,00	kr 17 500,00
37	01.05.2020	kr 87,50	kr 2 500,00	kr -	kr 2 587,50	kr 15 000,00
38	01.06.2020	kr 75,00	kr 2 500,00	kr -	kr 2 575,00	kr 12 500,00
39	01.07.2020	kr 62,50	kr 2 500,00	kr -	kr 2 562,50	kr 10 000,00
40	01.08.2020	kr 50,00	kr 2 500,00	kr -	kr 2 550,00	kr 7 500,00
41	01.09.2020	kr 37,50	kr 2 500,00	kr -	kr 2 537,50	kr 5 000,00
42	01.10.2020	kr 25,00	kr 2 500,00	kr -	kr 2 525,00	kr 2 500,00
43	01.11.2020	kr 12,50	kr 2 500,00	kr -	kr 2 512,50	kr -
44				**Sum terminbeløp**	kr 98 325,00	

Fra nederste rad kan vi lese at Karen totalt må betale $98\,325,00$ kroner for dette lånet.

Svar: Totalt må Karen betale $98\,325,00$ kroner for dette lånet.