REA3024 2016 Vår

Eksamenstid:
5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 3 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Del 1 har 8 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
- vurderer om svar er rimelige

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.:

- Bergen, rykte (www.freeimages.com, 5.07.2016)
- Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng) Nettkode: E-4DVS

Deriver funksjonene

a)

$f\,(x) = 2\cos 5x$

Løsningsforslag a)

La $u(x) = 5x$. Da er $f(x) = 2\cos(5x) = 2\cos(u(x))$. Kjerneregelen gir
$f^{'}(x) = (2\cos(u(x)))^{'} = -2\sin(u(x)) \cdot u^{'}(x) = -2\sin(5x) \cdot 5 = -10\sin(5x)$

Svar: $\underline{\underline{f'\left(x\right) = -10\sin(5x)}}$

b)

$g\,(x) = e^{-2x}\sin x$

Løsningsforslag b)

Vi setter bruker produktregelen

$$\left(u \cdot v\right)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

der $u = e^{-2x}$ og $v = \sin x$, da blir

$$\begin{aligned} g^{'}(x) &= \left(e^{-2x} \cdot \sin x\right)' \\ &= \left(e^{-2x}\right)' \cdot \sin x + e^{-2x} \cdot \left(\sin x\right)' \\ &= -2e^{-2x} \cdot \sin x + e^{-2x} \cdot \cos x \\ &= e^{-2x}\left(-2\sin x + \cos x\right) \\ &= -\frac{2\sin x - \cos x}{e^{2x}} \\ &= \left(-2\sin x + \cos x\right) \cdot e^{-2x} \end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{g'\left(x\right) = -\frac{2\sin x - \cos x}{e^{2x}}}}$

Oppgave 2 (4 poeng) Nettkode: E-4DVV

Bestem integralene

a)

$\int_1^e \frac{3}{x}\text{dx}$

Løsningsforslag a)

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{3}{x}\text{dx} &= 3\cdot\int_1^e \frac{1}{x}\text{dx}\\ &= 3[\ln|x|]_1^e\\ &= 3(\ln|e|-\ln|1|)\\ &= 3(1-0)\\ &= 3\end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{\int_1^e \frac{3}{x}dx = 3}}$

b)

$\int \frac{2}{x^2-1}\text{dx}$

Løsningsforslag b)

Før vi kan bruke delbrøkoppspalting må vi faktorisere polynomet i nevneren $x^2-1=\left(x+1\right)\left(x-1\right)$. Nå kan vi enten se at $2=(x+1)-(x-1)$, eller sette opp kravet

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x-1)}$$

Dette kan vi skrive som $2=A(x-1)+B(x+1)$. Siden denne likningen må være oppfylt for alle verdier av x må $0=Ax+Bx$ og $2=-A+B$. Delbrøkoppspaltingen løses altså av $A=-1$ og $B=1$. Integralet kan altså skrives på formen

$$\int\frac{2}{x^2-1}dx=-\int\frac{1}{(x+1)}dx+\int\frac{1}{(x-1)}dx$$

Disse integralene kan vi løse ved enten å bruke substitusjonen $u=x+1$ og $v=x-1$ slik at

$$\int\frac{2}{x^2-1}dx=-\int\frac{du}{u}+\int\frac{dv}{v}=-\ln\left|u\right|+\ln\left|v\right|+C=-\ln\left|x+1\right|+\ln\left|x-1\right|+C$$

eller ved å komme på at den deriverte til $\ln|x+a|$ er $\frac{1}{x+a}$.

Svar: $\underline{\underline{\int\frac{2}{x^2-1}dx=-\ln\left|x+1\right|+\ln\left|x-1\right|+C}}$

Oppgave 3 (6 poeng) Nettkode: E-4DVY

Funksjonen f er gitt ved

$f(x) = \sin x \quad , \quad x \in [0, \pi]$

Et flatestykke er avgrenset av x-aksen og grafen til f.

a)
Regn ut arealet av flatestykket.

Løsningsforslag a)

Vi må regne ut det bestemte integralet

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin x \ \mathrm{dx} &= [-\cos x]_0^{\pi} \\
&= -\cos \pi - (-\cos 0) \\
&= -(-1) - (-1) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Svar: Arealet av flatestykket er 2.

b)
Vis ved derivasjon at $\int \sin^2 x \, \mathrm{dx} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + C$

Løsningsforslag b)

Vi skal derivere $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + C$. Vi ser at den vanskelige delen er å derivere $\sin x \cdot \cos x$. Dette kan vi gjøre med produktregelen

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

vi setter $u = \sin x$ og $v = \cos x$. Da får vi

$$
\begin{aligned}
(\sin x \cdot \cos x)' &= u' \cdot v + u \cdot v' \\
&= \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) \\
&= \cos^2 x - \sin^2 x \\
&= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x \\
&= 1 - 2\sin^2 x
\end{aligned}
$$

Til slutt brukte vi at $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Vi kan nå derivere hele uttrykket

$$
\begin{aligned}
& \left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + C\right)' \\
= \; & \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2 x\right) + 0 \\
= \; & \sin^2 x
\end{aligned}
$$

som var akkurat det vi ville vise.

c)

Vi roterer flatestykket 360° om x-aksen.

Regn ut volumet av omdreiningslegemet vi da får.

Løsningsforslag c)

Bruker vi denne formelen, og resultatet fra deloppgave b) får vi

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_a^b \left(f\left(x\right)\right)^2 \, \mathrm{dx} \\
&= \pi \int_0^\pi \sin^2 \mathrm{dx} \\
&= \pi \left[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\sin x \cdot \cos x\right]_0^\pi \\
&= \pi\left(\left(\tfrac{1}{2} \cdot \pi - \tfrac{1}{2}\sin \pi \cdot \cos \pi\right) - \left(\tfrac{1}{2} \cdot 0 - \tfrac{1}{2}\sin 0 \cdot \cos 0\right)\right) \\
&= \pi \cdot \left(\tfrac{\pi}{2} - 0\right) \\
&= \tfrac{\pi^2}{2}
\end{aligned}
$$

Svar: $V = \frac{\pi^2}{2}$

Oppgave 4 (5 poeng) Nettkode: E-4DW2

Rekken $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ er gitt.

a)

Forklar at dette er en geometrisk rekke. Bestem et uttrykk for summen S_n av de n første leddene i rekken.

Løsningsforslag a)

La $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{1}{4}$, og så videre. Vi ser da at vi kan skrive $a_n=a_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Altså er dette en geometrisk rekke.

Summen av leddene i en geometrisk rekke er gitt ved

$$S_n=a_1\cdot\frac{k^n-1}{k-1}$$

så for oss blir det

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Svar: $\underline{\underline{S_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}}$

b)

Vi har gitt produktet $P_n(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[8]{x}\cdot\sqrt[16]{x}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{x}\quad,\quad x>0$

Vis at $P_n(x)=x^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}$

Løsningsforslag b)

Vi begynner med å skrive om

$$\sqrt[2^r]{x}=x^{\frac{1}{2^r}}$$

Når vi bruker at $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ blir produktet

$$\begin{aligned}P_n(x)\quad&=\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[8]{x}\cdot\sqrt[16]{x}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{x}\\&=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{8}}\cdot x^{\frac{1}{16}}\cdot\ldots\cdot x^{\frac{1}{2^n}}\\&=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}}\\&=x^{S_n}\\&=x^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}\end{aligned}$$

c)

Bestem $\lim\limits_{n \to \infty} P_n(x)$

Løsningsforslag c)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P_n\left(x\right) &= \lim_{n\to\infty} x^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} \\ &= x^{1-0} \\ &= x\end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{\lim_{n\to\infty} P_n(x) = x}}$

Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4DW6

Funksjonen f er gitt ved

$f(x) = 3\cos 2x \quad , \quad x \in \langle 0,\, 2\pi \rangle$

a)

Bestem eventuelle nullpunkter til f.

Løsningsforslag a)

At $3\cos 2x = 0$ må bety at $\cos 2x = 0$. Som nevnt over må vi ha at argumentet til cos-funksjonen, må være på formen $\frac{\pi}{2} + k\pi$ for en $k \in \mathbb{Z}$. Altså

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Siden $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ vet vi at $x > 0$ og $x < 2\pi$. Dette gir

$x > 0$ som gir $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} > 0$ som igjen gir $k > -\frac{1}{2}$, og siden $k \in \mathbb{Z}$ betyr det at $k \geq 0$.

$x < 2\pi$ som gir $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < 2\pi$ som igjen gir $k < \frac{7}{2}$ og siden $k \in \mathbb{Z}$ betyr det at $k \leq 3$.

De eneste mulige verdiene for k er derfor $k = 0$,$k = 1$, $k = 2$ og $k = 3$. Dette gir oss nullpunkter i $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$ og $x = \frac{7\pi}{4}$.

Svar: f har nullpunkter i $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$ og $x = \frac{7\pi}{4}$.

b)

Bestem eventuelle topp- eller bunnpunkter på grafen til f.

Løsningsforslag b)

Vi starter med å derivere f $f'(x) = \left(3\cos 2x\right)' \quad = (2x)' \cdot 3(-\sin 2x) = -6 \sin 2x$ Her brukte vi kjerneregelen på tilsvarende måte som i deloppgave 1a). Det neste vi gjør er å løse likningen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -6 \sin 2x &= 0 \\ \sin 2x &= 0 \\ 2x &= k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Altså har vi ekstremalpunkter når x er på formen $\frac{k\pi}{2}$ for $k \in \mathbb{Z}$, og i intervallet $\langle 0, 2\pi \rangle$ er dette $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ og $x = \frac{3\pi}{2}$. Den letteste måten å sjekke hvilke av disse som toppunkter og hvilke som er bunnpunkter, er ved å regne ut funksjonsverdien i hvert punkt.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos \pi = 3 \cdot \left(-1\right) = -3$$

$$f(\pi) = 3\cos(2 \cdot \pi) = 3\cos 2\pi = 3 \cdot 1 = 3$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3\cos\left(2 \cdot \frac{3\pi}{2}\right) = 3\cos 3\pi = 3 \cdot \left(-1\right) = -3$$

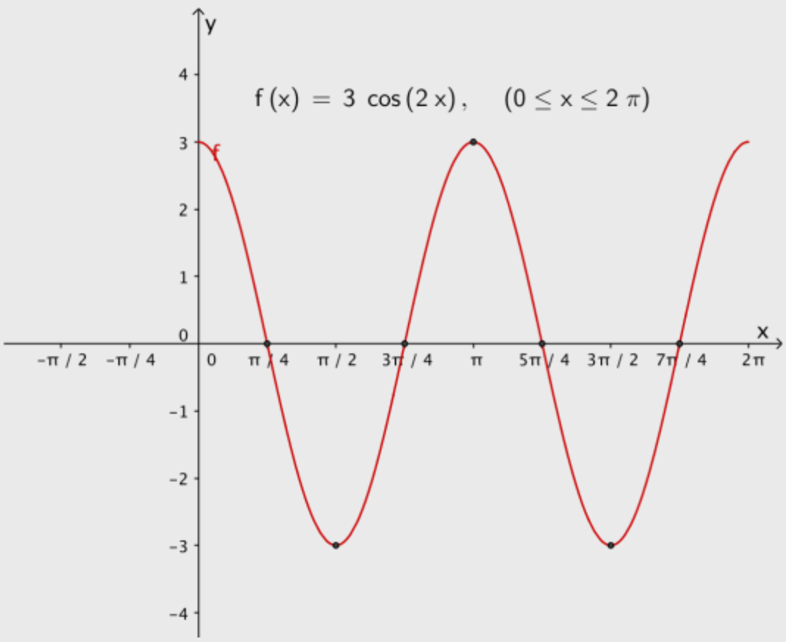
Derfor ser vi at grafen til f har de to bunnpunktene $\left(\frac{\pi}{2}, -3\right)$ og $\left(\frac{3\pi}{2}, -3\right)$, og toppunktet $(\pi, 3)$.

Svar: Grafen til f har de to bunnpunktene $\left(\frac{\pi}{2}, -3\right)$ og $\left(\frac{3\pi}{2}, -3\right)$, og toppunktet $(\pi, 3)$.

c)
Lag en skisse av grafen til f.

Løsningsforslag c)

Vi tegner skissen og legger inn både nullpunktene og topp-og bunnpunktene



Oppgave 6 (3 poeng) Nettkode: E-4DWA

Løs differensiallikningen

$y' - xy = x \quad , \qquad y(0) = 1$

Løsningsforslag

Vi skal løse den linære differensiallikningen $y' - xy = x$. Integrerende faktor er $e^{-\frac{1}{2}x^2}$, så $\left(ye^{-\frac{1}{2}x^2}\right)' = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$

Vi integrerer begge sider med hensyn på x:

$ye^{-\frac{1}{2}x^2} = \int xe^{-\frac{1}{2}x^2} \,\mathrm{dx}$

For å løse integralet på høyre side bruker vi substitusjonen $u = -\frac{1}{2}x^2$ og $\mathrm{du} = -x \,\mathrm{dx}$. Det gir

$\int xe^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{dx} = -\int e^u \mathrm{du} = -e^u + C = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + C$

Likningen blir dermed

$ye^{-\frac{1}{2}x^2} = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + C$

$y = -1 + Ce^{\frac{1}{2}x^2}$

Med $y(0) = 1$, får vi $y(0) = -1 + Ce^0 = -1 + C = 1$, så $C = 2$.

Løsningen på initialverdiproblemet er

$y = 2e^{\frac{1}{2}x^2} - 1$.

Svar: $y = 2e^{\frac{1}{2}x^2} - 1$

Oppgave 7 (7 poeng) Nettkode: E-4DWC

Punktene $A(1, -4, 1)$ og $B(3, 0, 5)$ ligger i planet α.

Vektoren $\overrightarrow{n_\alpha} = [k, 1, -k]$ står normalt på α for en bestemt verdi av konstanten k.

a)

Vis at planet α er gitt ved $2x + y - 2z + 4 = 0$.

Løsningsforslag a)

Vi starter med å regne ut vektoren $\overrightarrow{AB} = \left[3-1, 0-\left(-4\right), 5-1\right] = \left[2, 4, 4\right]$.

Deretter vet vi at $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = 0$ så vi har

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} &= 0 \\
[2,4,4] \cdot [k, 1, -k] &= 0 \\
2k + 4 - 4k &= 0 \\
2k &= 4 \\
k &= 2
\end{aligned}$$

Så koordinatene til normalvektoren blir $\overrightarrow{n_\alpha} = \left[k, 1, -k\right] = \left[2, 1, -2\right]$. Derfor blir likningen til planet

$$2x + y - 2z + d = 0$$

For et reellt tall d. Siden vi vet at $A(1, -4, 1)$ ligger i planet, kan vi bruke dette til å finne d

$$\begin{aligned}
2 \cdot 1 + (-4) - 2 \cdot 1 + d &= 0 \\
d &= 4
\end{aligned}$$

Derfor blir likningen til planet

$$2x + y - 2z + 4 = 0$$

som var det vi ville vise.

b)

Planet α skjærer z-aksen i punktet C.

Bestem koordinatene til C.

Løsningsforslag b)

Siden har koordinater $(0,0,c)$ og ligger i planet α, oppfyller $(0,0,c)$ likningen til α, altså

$$\begin{aligned} 2\cdot 0+0-2\cdot c+4 &= 0 \\ -2c &= -4 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

Svar: C har koordinater $\underline{\underline{(0,0,2)}}$.

c)

Bestem volumet av pyramiden $ABCO$, der O er origo.

Løsningsforslag c)

I vår oppgave er det vektorene $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ og $\overrightarrow{OC}$ som utspenner pyramiden. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ og $\overrightarrow{OC}$ er koordinatvektorer, så vi har

1. $\overrightarrow{OA} = \left[1,-4,1\right]$
2. $\overrightarrow{OB} = \left[3,0,5\right]$
3. $\overrightarrow{OC} = \left[0,0,2\right]$

$$V = \tfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OC}\right|$$

Vi starter med å regne ut

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB} &= [1,-4,1]\times[3,0,5] \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} \\ &= -20\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 12\,\vec{k} \\ &= [-20,-2,12] \end{aligned}$$

Deretter regner vi ut skalarproduktet

$$[-20,-2,12]\cdot[0,0,2] = -20\cdot 0 + (-2)\cdot 0 + 12\cdot 2 = 24$$

Vi er nå klare til å regne ut volumet av pyramiden

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right) \cdot \overrightarrow{OC}\right| = \frac{1}{6}\,|24| = \frac{24}{6} = 4$$

Svar: Volumet av pyramiden $ABCO$ er 4.

d)

En kule har sentrum i origo og tangerer planet α i et punkt P.

Bestem koordinatene til punktet P.

Løsningsforslag d)

Siden $\overrightarrow{OP}$ står normalt på planet α i likhet med $\overrightarrow{n_\alpha} = [2, 1, -2]$ må vi nødvendig vis ha at $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{n_\alpha}$. Ut ifra dette vet vi nå at det finnes et reellt tall s slik at

$$\overrightarrow{OP} = s \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = s \cdot [2, 1, -2] = [2s, s, -2s]$$

Siden $\overrightarrow{OP} = [2s, s, -2s]$ er koordinatvektoren til punktet P, vet vi at P har koordinater $(2s, s, -2s)$. Når vi vet at P ligger på planet α får vi

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z + 4 &= 0 \\ 2 \cdot 2s + s - 2 \cdot (-2s) + 4 &= 0 \\ 9s &= -4 \\ s &= -\tfrac{4}{9} \end{aligned}$$

Og derfor blir koordinatene til P

$$\left(2s, s, -2s\right) = \left(2 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right), -\frac{4}{9}, -2 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)\right) = \left(-\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

Svar: $P\left(-\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right)$

Oppgave 8 (2 poeng) Nettkode: E-4DWH

Bruk induksjon til å bevise påstanden P gitt ved

$$P(n): \ \frac{k^n-1}{k-1} = 1 + k + k^2 + k^3 + ... + k^{n-1} \quad , \qquad n \in \mathbb{N}$$

Løsningsforslag

Vi starter med å vise nullhypotesen, at $P(1)$ er sann.

$$P\left(1\right): \ \frac{k^1-1}{k-1} = \frac{k-1}{k-1} = 1$$

Altså stemmer $P(1)$. Det neste vi må vise er induksjonssteget, altså at $P(n)$ sann, impliserer $P(n+1)$ sann. Så vi antar at påstanden $P(n)$ stemmer.

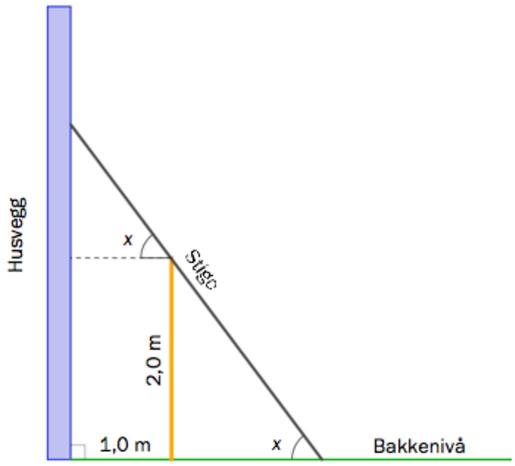
$$\begin{aligned} P(n+1): \qquad \frac{k^{n+1}-1}{k-1} &= \frac{\left(k^{n+1}-k^n\right)+\left(k^n-1\right)}{k-1} \\ &= \frac{k^n(k-1)+(k^n-1)}{k-1} \\ &= \frac{k^n(k-1)}{k-1} + \frac{(k^n-1)}{k-1} \\ &= k^n + 1 + k + k^2 + k^3 + \cdots + k^{n-1} \\ &= 1 + k + k^2 + k^3 + \cdots + k^{n-1} + k^n \end{aligned}$$

som var det vi ville vise.

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng) Nettkode: E-4DWK

En stige, som kan justeres, skal stå på skrå mot en husvegg og berøre et 2,0 m høyt gjerde. Gjerdet står 1,0 m fra husveggen. La x være vinkelen mellom stigen og bakken. Se skissen nedenfor.



a)
Vis at lengden av stigen, målt i meter, er

$L(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{2}{\sin x}$, der $0^\circ < x < 90^\circ$

Løsningsforslag a)

Vi bruker definisjonene av cosinus og sinus. I den nederste trekanten har vi

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}} \\ \sin x &= \frac{2}{H_1(x)} \\ H_1(x) &= \frac{2}{\sin x} \end{aligned}$$

I den øverste trekanten har vi

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}} \\ \cos x &= \frac{1}{H_2(x)} \\ H_2(x) &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

Derfor på vi

$$L(x) = H_1(x) + H_2(x) = \frac{2}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

b)

Bestem x slik at lengden av stigen blir kortest mulig.
Hvor høyt opp på veggen rekker stigen da?

Løsningsforslag b)

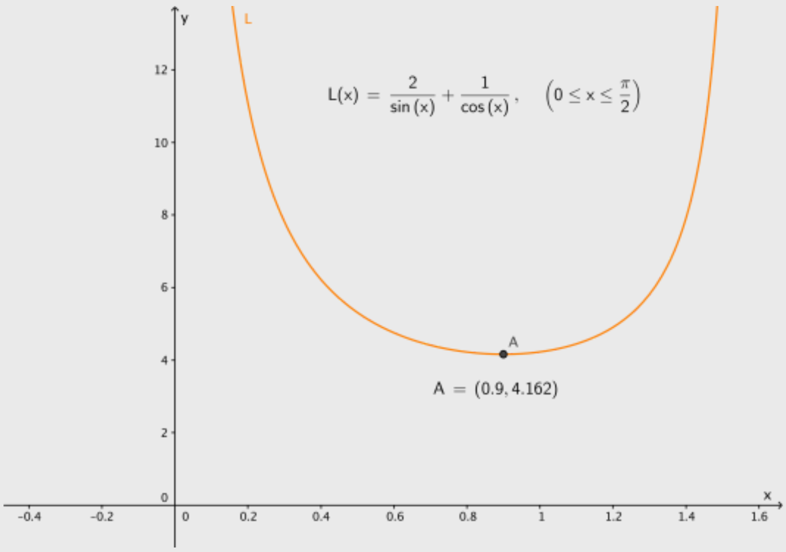
Framgangsmåte:

1. Vi tegner grafen til L med kommandoen: **funksjon[<funksjon>, <start>, <slutt>]**, der vi bytter ut funksjonen med $\frac{2}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ og legger inn riktige grenser. Merk at vi må gjøre om til radianer $(0 < x < \frac{\pi}{2})$.

2. Gir nytt navn til funksjonen: L

3. Vi finner ekstremalpunktene med kommandoen: **ekstremalpunkt[<funksjon>, <start>, <slutt>]**, der vi bytter ut funksjon med L.

4. Leser av koordinatene ekstremalpunktene.



Den korteste lengden stigen kan ha er $4{,}16$ m. Da er $x = 0{,}9$ i radianer. Dette kan vi gjøre om med formelen

$$v = \frac{180^\circ r}{\pi}$$

som gir en vinkel på $51{,}6^\circ$.

Høyden på veggen, h får vi ved å legge sammen høyden i det lille rektangelet (2 m) og motstående katet i den øvre trekanten. Der har vi at

$$\begin{aligned}
\tan 51{,}6^\circ &= \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}} \\
\tan 51{,}6^\circ &= \frac{h-2}{1} \\
1{,}26 &= h - 2 \\
h &= 3{,}26
\end{aligned}$$

Høyden på veggen er da $3{,}26$ m.

Svar: Den korteste lengden stigen kan ha er $4{,}16$ m. Da er $x = 51{,}6^\circ$. Og høyden på veggen er da $3{,}26$ m.

Oppgave 2 (8 poeng) Nettkode: E-4DWN

Daglengden D i Bergen er tilnærmet gitt ved funksjonen

$D(t) = 6{,}63\sin(0{,}0172t - 1{,}39) + 12{,}5$

Her er $D(t)$ daglengden målt i timer, og t er antall dager fra nyttår.

a)
Bruk uttrykket $D(t)$ til å bestemme den korteste og den lengste daglengden i Bergen.

Løsningsforslag a)

Siden $-1 \leq \sin v \leq 1$, vet vi at den minste verdien til $D(t)$ er når $\sin(0,0172t - 139) = -1$ og den største verdien når $\sin(0,0172t - 139) = 1$. Altså

Den korteste daglengden: $6,63 \cdot (-1) + 12,5 = 5,87$ timer.

Den lengste daglengden: $6,63 \cdot 1 + 12,5 = 19,13$ timer.

Svar: Den korteste daglengden er **5** timer og **52** minutter, mens den lengste daglengden er **19** timer og **8** minutter.

b)

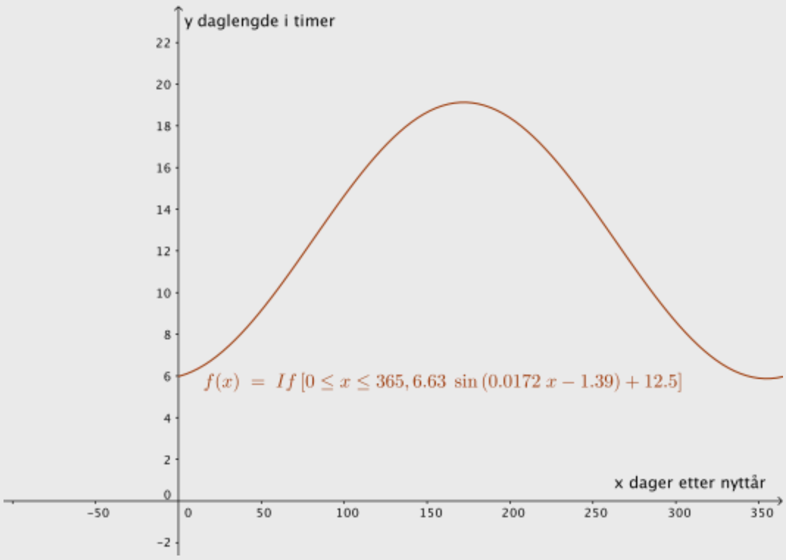
Bruk graftegner til å tegne grafen til D for $t \in [0,\ 365]$

Løsningsforslag b)

Framgangsmåte:

1. Vi tegner grafen til D med kommandoen: **funksjon[<funksjon>, <start>, <slutt>]**, der vi bytter ut funksjonen med $6,63\sin(0,0172t - 1,39) + 12,5$ og legger inn riktige grenser. Merk at vi må gjøre om til radianer ($0 \leq x \leq 365$).

2. Gir nytt navn til funksjonen: D

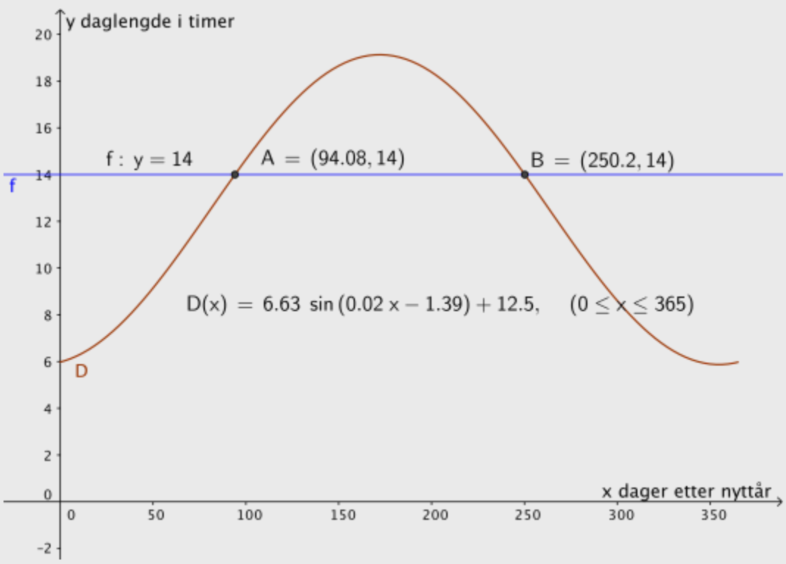


c)

Når er daglengden i Bergen 14 timer?

Løsningsforslag c)

Vi tegner den horisontale linja $y = 14$, og markerer hvor den skjærer med grafen til D .



Svar: Daglengden er 14 timer 94 og 250 dager etter nyttår.

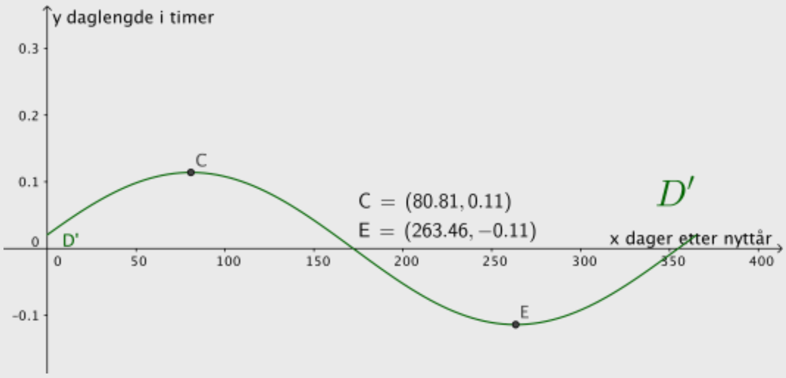
d)

Undersøk på hvilken dato daglengden vokser raskest.

Hvor mye øker daglengden per døgn da?

Løsningsforslag d)

Vi bruker kommandoen D', for å tegne grafen til den deriverte. Deretter bruker vi kommandoen **ekstremalpunkt[<funksjon>, <start>, <slutt>]**, der vi bytter ut funksjon med D'.



Vi ser at det er i toppunktet til D' hvor D vokser raskest. Det er i punktet $(80.8, 0.11)$. Altså inntreffer det etter nesten 81 dager etter nyttår, og da øker daglengden med $0{,}11$ timer per døgn.

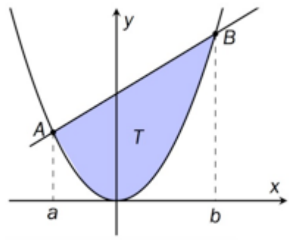
Svar: Daglengden vokser raskest nesten 81 dager etter nyttår, og da øker daglengden med $0{,}11$ timer per døgn.

Oppgave 3 (6 poeng) Nettkode: E-4DWS

Funksjonen f er gitt ved

$f(x) = x^2$

Punktene $A\left(a, a^2\right)$ og $B\left(b, b^2\right)$ der $a < b$, ligger på grafen til f. Se figur 1 nedenfor.



Figur 1

a)
Grafen til f og linjestykket AB avgrenser et flatestykke med areal T.

Bruk CAS til å bestemme T uttrykt ved a og b.

Løsningsforslag a)

Framgangsmåte:

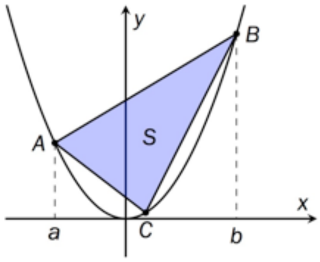
1. Vi starter med å definere f med kommandoen **f(x):=x**2**
2. Deretter definerer vi A og B med kommandoene **A:=(a,f(a))** og **B:=(b,f(b))**.
3. Så definerer vi linja gjennom A og B med kommandoen **Linje[<start>, <slutt>]** og bytter ut start og slutt med A og B.
4. Til slutt integrerer vi området vi får ved å trekke f fra utrykket for linja med kommandoen **Integral[<funksjon>,<start>, <slutt>]** og legger inn riktig funksjon og start- og sluttverdier.

CAS	
1	f(x):=x^2 $\rightarrow$ $f(x) := x^2$
2	A:=(a,f(a)) $\rightarrow$ $\mathbf{A} := (\mathbf{a}, \mathbf{a}^2)$
3	B:=(b,f(b)) $\rightarrow$ $\mathbf{B} := (\mathbf{b}, \mathbf{b}^2)$
4	l:=Linje[A, B] $\rightarrow$ $\ell: \mathbf{y} = -\mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{x}\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})$
5	T:=Integral[-a*b+x*(a+b)-f(x), a, b] $\rightarrow$ $\mathbf{T} := \frac{-\mathbf{a}^3 + 3\,\mathbf{a}^2\,\mathbf{b} - 3\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}^2 + \mathbf{b}^3}{6}$

Svar: $\underline{\underline{\mathbf{T} := \frac{-\mathbf{a}^3+3\mathbf{a}^2\mathbf{b}-3\mathbf{a}\mathbf{b}^2+\mathbf{b}^3}{6} = \frac{(\mathbf{b}-\mathbf{a})^3}{6}}}$

b)

Punktet C på grafen har koordinatene $\left(c,\, c^2\right)$, der $c = \frac{a+b}{2}$. Se figur 2 nedenfor.



Figur 2

Bruk CAS til å vise at arealet S av ΔACB er $S = \frac{1}{8}(b-a)^3$.

Løsningsforslag b)

Framgangsmåte:

1. I celle 1 defineres funksjonen $f(x)$. Celle 2 og 3 definerer punktene A og B. I celle 4 og 5 defineres verdien c og punktet C.
2. Cellene 6 - 8 beskriver linjene gjennom de angitte punktene som grafen til funksjonene $g,\, h$ og k.
3. I celle 9 beregnes $\int_a^c (k(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ som er arealet av den delen av området som ligger over AC.
4. I celle 10 beregnes $\int_a^c (k(x) - h(x))\,\mathrm{d}x$ som er arealet av den delen av området som ligger over CB.
5. Celle 11 definerer S til å være summen av de to arealene, akkurat slik oppgaven krever.
6. Celle 12 sjekker at verdien av S.

CAS	
1	f(x):=x^2;
2	A:=(a,f(a));
3	B:=(b,f(b));
4	c:=(a+b)/2;
5	C:=(c,f(c));
6	g(x):=Linje[A, C];
7	h(x):=Linje[C, B];
8	k(x):=Linje[A, B];
9	A_1:=IntegralMellom[k, g, a,c];
10	A_2:=IntegralMellom[k, h, c, b];
11	S:=A_1+A_2;
12	S==(b-a)^3/8 → **true**

Svar: $\mathbf{S} := \frac{1}{8}\left(-\mathbf{a}^3 + \mathbf{b}^3 - 3\mathbf{a}\mathbf{b}^2 + 3\mathbf{a}^2\mathbf{b}\right) = \frac{(b-a)^3}{8}$

c)

Bestem forholdet $\frac{T}{S}$.

Løsningsforslag c)

Taster inn kommandoen **R:=T/S** (vi definerer R som forholdet)

11	S:=S_1+S_2 $\rightarrow$ $\mathbf{S := \frac{1}{8}\left(-a^3 + b^3 - 3\,a\,b^2 + 3\,a^2\,b\right)}$
12	R:=T/S $\rightarrow$ $\mathbf{R := \frac{4}{3}}$

Svar: $\underline{\underline{\frac{T}{S} = \frac{4}{3}}}$

Oppgave 4 (4 poeng) Nettkode: E-4DX0

I en bygd med 1200 innbyggere spres et rykte. La y være antall innbyggere som kjenner til ryktet ved tiden t, der t er tiden målt i dager etter at ryktet oppsto.

Vi antar at ryktet spres med en fart som til enhver tid er proporsjonal med produktet av antall innbyggere som kjenner ryktet, og antall innbyggere som ikke kjenner det. Proporsjonalitetskonstanten har verdien $0{,}0006$.

Ved tiden $t = 0$ var det kun én person som kjente til ryktet.

a)
Sett opp en differensiallikning som beskriver situasjonen ovenfor.

Løsningsforslag a)

At ryktet spres med en fart som til enhver tid er proporsjonal med produktet av antall innbyggere som kjente ryktet (y), og antall innbyggere som ikke kjenner det($1200 - y$), kan vi sette opp som differensiallikningen (vi bruker også at proporsjonalitetskonstanten har verdien $0{,}0006$)

$$y' = 0{,}0006 \cdot y\left(1200 - y\right)$$

Fordi ved tiden $t = 0$ var det kun én person som kjente til ryktet, får vi initialverdien $y(0) = 1$

Svar: Vi får differensiallikningen

$$\underline{\underline{y' = 0{,}0006 \cdot y\left(1200 - y\right) \quad y\left(0\right) = 1}}$$

b)

Hvor lang tid tar det før halve bygda kjenner til ryktet?

Løsningsforslag b)

Framgangsmåte

1. Vi løser differensiallikningen med kommandoen **LøsODE[0.0006* y*(1200-y)]**, og definerer løsningen til å være $f(x)$
2. Vi bruker initialverdien $y(0) = 1$, som nå lyder $f(0) = 1$ til å finne verdien konstanten c_1. Altså løser vi med hensyn på c_1, med kommandoen **Løs[f(0)=1, c_1]**
3. Nå vil vi definere funksjonen med riktig verdi av c_1, så vi definerer funksjonen $g(x)$ som dette med kommandoen **g(x):=(-1200) / (-1199* e**((-18) / 25 x) - 1)**. Alternativt sett inn initialbetingelsen direkte i **LøsODE**: **LøsODE[0.0006* y*(1200-y), (0,1)]** og da blir svaret lik $g(x) = \dfrac{1200}{1199e^{-18\cdot\frac{x}{25}} - 1}$
4. Til slutt vil vi finne når ryktet har nådd halve bygda, altså når $g(x) = 600$. Vi løser likningen med kommandoen **Løs[g(x)=600]**

CAS	
1	f(x):=LøsODE[0.0006*y*(1200-y)] $\to$ $f(x) := -\dfrac{1200}{c_1\, e^{-\frac{18}{25}x} - 1}$
2	Løs[f(0)=1, c_1] $\to$ $\{c_1 = -1199\}$
3	g(x):=(-1200) / (-1199* e^((-18) / 25 x) - 1) $\to$ $g(x) := \dfrac{1200}{1199\, e^{-\frac{18}{25}x} + 1}$
4	Løs[g(x)=600] $\to$ $\left\{x = \dfrac{25}{18}\ln(1199)\right\}$
5	$4 $\approx$ $\{x = 9.85\}$

Svar: Vi ser at ryktet har nådd halve befolkningen etter nesten 10 dager ($9{,}85$ dager).