



www.matematikk.org

Eksamensoppgavesettet er utarbeidet av Utdanningsdirektoratet. Avvik fra det originale eksamenssettet er eventuelle spesifiseringer og illustrasjoner. Løsningsforslagene i sin helhet er utarbeidet av matematikk.org.

Nettkoden som står til høyre for oppgavetittelen brukes i søkefeltet på www.matematikk.org for å åpne oppgaven og se utfyllende løsningsforslag.

Våre samarbeidspartnere:



REA3024 2014 Vår



Eksamenstid:

5 timer:

Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.

Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:

Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler

Del 2:

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:

Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.

Veiledning om vurderingen:

Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger:

Kilder for bilder, tegninger osv.

- Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet
- CSI, sodahead.com (28.02.2014)



DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng) [Nettkode: E-4DG6](#)

Deriver funksjonene

a)

$$f(x) = \sin(3x)$$

b)

$$g(x) = e^{2x} \cdot \cos x$$

Oppgave 2 (4 poeng) [Nettkode: E-4DG9](#)

Regn ut integralene

a)

$$\int 2x \cdot \sin(x^2) dx$$

b)

$$\int_1^e x \cdot \ln x dx$$

Oppgave 3 (2 poeng) [Nettkode: E-4DGC](#)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = e^{2x} - 4e^x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Bestem koordinatene til eventuelle vendepunkter på grafen til f .

Oppgave 4 (4 poeng) [Nettkode: E-4DGE](#)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$s(x) = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \dots$$

a)

Bestem konvergensområdet til rekken.

b)

Løs likningene

$$s(x) = 3 \quad \text{og} \quad s(x) = \frac{1}{3}$$



Oppgave 5 (5 poeng) [Nettkode: E-4DGH](#)

Planet α er gitt ved

$$\alpha : 2x + y - 2z + 3 = 0$$

a)

Vis at punktet $P(3, 4, 2)$ ikke ligger i planet α .

b)

En linje l går gjennom P slik at $l \perp \alpha$.

Bestem en parameterframstilling for l .

c)

Bestem koordinatene til skjæringspunktet mellom l og α .

d)

Bestem avstanden fra P til α .

Oppgave 6 (4 poeng) [Nettkode: E-4DGM](#)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = a \sin(cx + \varphi) + d$$

Grafen til funksjonen har et toppunkt i $(0, 7)$. Det nærmeste bunnpunktet til høyre for dette toppunktet er $(2, 3)$.

a)

Forklar at funksjonsuttrykket kan skrives

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) + 5$$

b)

Lag en skisse av grafen til f for $x \in [0, 12]$.

Oppgave 7 (2 poeng) [Nettkode: E-4DGP](#)

Løs differensiallikningen

$$y' - 3y = 2 \quad \text{når} \quad y(0) = \frac{1}{3}$$



DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng) [Nettkode: E-4DGT](#)

Punktene $A(4, 3, 1)$, $B(2, 2, 0)$ og $C(1, 2, -2)$ er gitt.

En setning i geometrien sier:

Et plan er entydig bestemt av tre punkter dersom disse punktene ikke ligger på en rett linje.

- a)**
Bruk denne setningen til å vise at punktene A , B og C bestemmer et plan α entydig.
- b)**
Bestem en likning til planet α .
- c)**
Et punkt T har koordinatene $(2, 5, 4t + 1)$.
Bestem t slik at volumet av pyramiden $ABCT$ blir 3.

Oppgave 2 (5 poeng) [Nettkode: E-4DGY](#)

En kuleflate er gitt ved likningen

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 2 = 0$$

- a)**
Vis at punktet $P(2, 3, 5)$ ligger på kuleflaten.
- b)**
Bestem sentrum og radius til kulen.
- c)**
Bestem likningen til planet som tangerer kuleflaten i punktet P .



Oppgave 3 (7 poeng) Nettkode: E-4DH7



I en kriminalserie på TV ble et drapsoffer funnet kl. 11.00. Kropstemperaturen ble da målt til 30°C . Rommet der den drepte ble funnet, hadde hatt en konstant temperatur på 22°C siden mordet skjedde.

Vi lar kroppstemperaturen være $y(t)$ grader Celsius t timer etter at den døde ble funnet.

a)

Ifølge Newtons avkjølingslov er temperaturendringen per time proporsjonal med differansen mellom kroppstemperaturen og romtemperaturen. Forklar at dette gir differensiallikningen

$$y' = -k(y - 22) \text{ der } k > 0$$

b)

Forklar at $y(0) = 30$, og løs differensiallikningen ved regning.

c)

En time etter at den døde ble funnet, ble kroppstemperaturen målt til 28°C . Bruk dette til å bestemme konstanten k .

d)

Vi antar at drapsofferet hadde en kroppstemperatur på 37°C like etter at døden inntraff.

Bruk $y(t)$ til å anslå når drapet ble utført.



Oppgave 4 (7 poeng) [Nettkode: E-4DHC](#)

En uendelig rekke er gitt ved

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

a)

Vis at $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$, når $x \in \langle -1, 1 \rangle$

Det kan vises at

$$(1)' + (x)' + (x^2)' + (x^3)' + \dots = \left(\frac{1}{1-x}\right)', \text{ når } x \in \langle -1, 1 \rangle$$

b)

Vis at

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}, \text{ når } x \in \langle -1, 1 \rangle$$

c)

Bruk resultatet i oppgave b) til å vise at

$$1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots = 4$$

d)

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n) : 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

e)

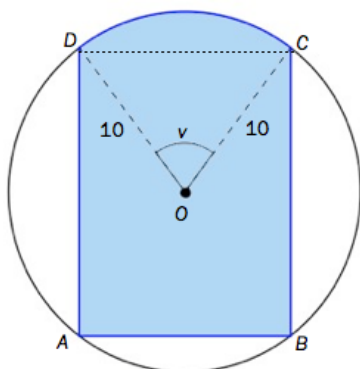
Bruk det du har funnet ovenfor til å bestemme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2^{n-1}}$



Oppgave 5 (5 poeng) Nettkode: E-4DHJ

Et rektangel $ABCD$ er innskrevet i en sirkel. Sirkelen har sentrum i O og radius 10.

Vi setter $\angle COD = \nu$, der $0 < \nu < \pi$. Se figuren nedenfor.



a)

Vis ved regning at arealet F av sirkelsektoren COD er

$$F(\nu) = 50\nu$$

b)

Vis ved regning at arealet T av det fargelagte området på figuren kan skrives som

$$T(\nu) = 50(\nu + 3 \sin \nu)$$

c)

Bestem ν grafisk slik at T blir størst mulig. Bestem T_{maks} .

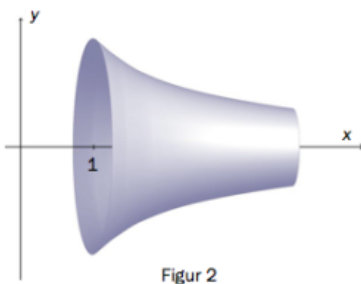
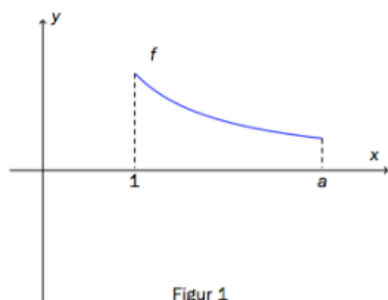


Oppgave 6 (6 poeng) Nettkode: E-4DHP

Figur 1 nedenfor viser grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, a]$$

Vi dreier grafen til f 360° om x-aksen. Vi får da fram et omdreiningslegeme som vist på figur 2.



a)

Bestem volumet $V(a)$ av omdreiningslegemet.

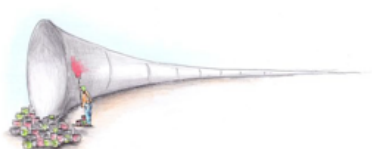
b)

Bestem $\int_1^a f(x) dx$. Omdreiningslegemet har overflateareal $O(a)$. Forklar at $O(a) > \int_1^a f(x) dx$.

c)

Vi lar $a \rightarrow \infty$. Det omdreiningslegemet vi da får, kalles Gabriels horn.

Bestem $\lim_{a \rightarrow \infty} O(a)$ og $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$ dersom grenseverdiene eksisterer. Kommenter svarene.



Å male Gabriels horn ...



Å fylle Gabriels horn ...

