REA3024 2013 Vår

Eksamenstid:
5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler

Del 2:
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.

- Alle grafer og figurer (Utdanningsdirektoratet)

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng) Nettkode: E-4DBN

Deriver funksjonene

a)
$f\,(x) = 3\cos x$

Løsningsforslag a)

Siden den deriverte av $\cos x$ er $-\sin x$ følger det at

$$f'(x) = (3\cos x)' = 3\,(\cos x)' = 3(-\sin x) = -3\sin x.$$

Svar:

$$f'(x) = -3\sin x.$$

b)
$g\,(x) = 6\sin(\pi x) + 7$

Løsningsforslag b)

Vi observerer først at $g'\left(x\right) = 6(\sin(\pi x))'$ siden den deriverte av et konstantledd alltid er null og konstante koeffisienter alltid kan tas utenfor derivasjonen. Kjerneregelen for derivasjon sier at $(f\,(h\,(x)))' = h'(x)f'(h\,(x))$. Ved å sette $f(x) = \sin x$ og $h(x) = \pi x$ finner vi da at

$$g'(x) = 6(\sin(\pi x))' = 6(f\,(h\,(x)))' = 6f'\,(h\,(x)) \cdot h'(x)$$

$$= 6\cos(h\,(x)) \cdot \pi = 6\pi\cos(\pi x)$$

Svar:

$$g'(x) = 6\pi\cos(\pi x).$$

c)

$h(x) = 3e^{2x} \cdot \sin(3x)$

Løsningsforslag c)

Produktregelen for derivasjon sier at hvis $u(x)$ og $v(x)$ er deriverbare funksjoner, så må

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Hvis vi setter $u\left(x\right) = 3e^{2x}$ og $v(x) = \sin(3x)$ følger det da at

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(3e^{2x}\sin\left(3x\right)\right)' = (uv)' = u'v + uv' \\ &= \left(3e^{2x}\right)'\sin\left(3x\right) + 3e^{2x}\left(\sin(3x)\right)' \\ &= 3\left(e^{2x}\right)'\sin\left(3x\right) + 3e^{2x}\left(\sin(3x)\right)'. \end{aligned}$$

Videre gir kjerneregelen, som sier at $(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$, med kjernen $g(x) = 2x$ at

$$\left(e^{2x}\right)' = \left(2x\right)'e^{2x} = 2e^{2x},$$

siden e^x er sin egen deriverte. Hvis vi igjen bruker kjerneregelen, men nå på $\sin(3x)$ med kjernen $g = 3x$ finner vi at

$(\sin(3x))' = \cos(3x) \cdot (3x)' = 3\cos(3x)$

siden den deriverte av $\sin x$ er $\cos x$. Altså er

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3\left(e^{2x}\right)'\sin\left(3x\right) + 3e^{2x}\left(\sin(3x)\right)' \\ &= 3\left(2e^{2x}\right)\sin\left(3x\right) + 3e^{2x}\left(3\cos(3x)\right) \\ &= 6e^{2x}\sin\left(3x\right) + 9e^{2x}\cos\left(3x\right) \\ &= 3e^{2x}\left(2\sin(3x) + 3\cos(3x)\right). \end{aligned}$$

Svar:

$$h'\left(x\right) = 3e^{2x}\left(2\sin(3x) + 3\cos(3x)\right).$$

Oppgave 2 (4 poeng) Nettkode: E-4DBR

Bestem integralet $\int \frac{2x}{x^2-4} \mathrm{dx}$ ved å bruke

a)

variabelskifte

Løsningsforslag a)

Metoden for integrasjon ved substitusjon sier at

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du.$$

Ved å introdusere variabelskiftet $u(x) = x^2 - 4$ finner vi da, siden $u'(x) = (x^2 - 4)' = 2x$, at

$$\int \frac{2x}{x^2-4}dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \int \frac{du}{u}.$$

Siden den deriverte av $\ln x$ er $\frac{1}{x}$ må

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C,$$

der C er integrasjonskonstanten. Legg merke til at vi har lagt til et absoluttverditegn inne i logaritmen. Dette er fordi $\ln x$ bare gir mening å snakke om hvis x er et positivt tall. Ved å legge til en absoluttverdi kan vi også ta høyde for verdier som er negative. Ved nå å sette inn for $u = x^2 - 4$ følger det at

$$\int \frac{2x}{x^2-4}dx = \ln|x^2 - 4| + C.$$

Svar:

$$\int \frac{2x}{x^2-4}dx = \ln|x^2 - 4| + C.$$

b)
delbrøkoppspalting

Løsningsforslag b)

Funksjonen $x^2 - 4$ kan ifølge tredje kvadratsetning faktoriseres

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2).$$

Vi ønsker å finne to konstanter A og B slik at

$$\tfrac{2x}{x^2-4} = \tfrac{2x}{(x-2)(x+2)} = \tfrac{A}{x-2} + \tfrac{B}{x+2}.$$

Ved å multiplisere begge sider av likningen med $(x-2)(x+2)$ følger det at

$$2x = (x+2)A + (x-2)B = (A+B)x + 2(A-B).$$

Siden denne likningen må være sann for alle x må den stemme for alle konstantledd og x-ledd separat. Det vil si at

$$\begin{aligned} \text{konstantledd:} \quad & A - B = 0 \\ x\text{-ledd:} \quad & A + B = 2. \end{aligned}$$

Den første likningen gir at $B = A$, som ved innsetting i den andre likningen gir

$$A + A = 2 \implies A = 1 \implies B = A = 1.$$

Altså kan vi skrive

$$\tfrac{2x}{x^2-4} = \tfrac{1}{x-2} + \tfrac{1}{x+2}.$$

Det betyr at

$$\int \tfrac{2x}{x^2-4} dx = \int \tfrac{1}{x-2} dx + \int \tfrac{1}{x+2} dx$$

og siden den deriverte av $\ln(x-2)$ er $\frac{1}{x-2}$ og den deriverte av $\ln(x+2)$ er $\frac{1}{x+2}$ får vi

$$\int \tfrac{1}{x-2} dx + \int \tfrac{1}{x+2} dx = \ln|x-2| + \ln|x+2| + C,$$

der C er integrasjonskonstanten. Vi har altså funnet at

$$\int \tfrac{2x}{x^2-4} dx = \ln|x-2| + \ln|x+2| + C.$$

Merk at dette er det samme svaret som i oppgave $a)$ siden vi kan skrive

$$\ln|x-2| + \ln|x+2| + C = \ln|(x-2)(x+2)| + C = \ln\left|x^2 - 4\right| + C.$$

Svar:

$$\int \tfrac{2x}{x^2-4} dx = \ln\left|x-2\right| + \ln\left|x+2\right| + C.$$

Oppgave 3 (4 poeng) Nettkode: E-4DBU

Punktene $A\,(1,\,-\,1,\,0)$, $B\,(3,\,1,\,1)$ og $C\,(0,\,0,\,0)$ er gitt.

a)

Bestem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Bruk resultatet til å bestemme arealet av ΔABC.

Løsningsforslag a)

Gitt de tre punktene $A(1,-1,0)$, $B(3,1,1)$ og $C(0,0,0)$ kan vi konstruere vektorene

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left[3,1,1\right] - \left[1,-1,0\right] = \left[2,2,1\right]$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \left[0,0,0\right] - \left[1,-1,0\right] = \left[-1,1,0\right].$$

Det gir at

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{e_x} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec{e_y} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{e_z}$$

$$= (-1)\vec{e_x} - (1)\vec{e_y} + (2-(-2))\vec{e_z} = [-1,\,-\,1{,}4]$$

som har lengde

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left|\left[-1,-1,4\right]\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2}$$
$$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Siden lengden av vektoren $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ er lik arealet av parallellogrammet utspent av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$, og $\triangle\, ABC$utgjør nøyaktig halvparten av parallellogrammet, følger det at arealet av $\triangle\, ABC$ er $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Svar:$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-1,\,-\,1{,}4]$ og arealet av $\Delta ABC = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

b)

Bestem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Bruk blant annet dette resultatet til å bestemme arealet av ΔABC.

Løsningsforslag b)

Siden $\overrightarrow{AB} = \left[2, 2, 1\right]$ og $\overrightarrow{AC} = \left[-1, 1, 0\right]$ må

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = [2,2,1] \cdot [-1,1,0] = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0.$

Altså står $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ vinkelrett på hverandre, noe som betyr at $\triangle ABC$ er rettvinklet og $\angle A = 90^\circ$. Arealet av $\triangle ABC$ er dermed

$$\text{Arealet av } \triangle ABC = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{2^2+2^2+1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+1^2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2},$$

som passer med det vi fant i forrige oppgave.

Svar: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ og arealet av $\Delta ABC = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

Oppgave 4 (3 poeng) Nettkode: E-4DBX

Løs differensiallikningen

$y' = 6xy$ når $y(0) = 2$

Løsningsforslag

Først observerer vi at $y = 0$ er en løsning av differensiallikningen siden begge sider da er konstant lik 0. For å finne andre løsninger, kan vi dele på y på begge sider for å separere variabler. Da får vi

$$\frac{y'}{y} = 6x$$

Integrasjon med hensyn på x på begge sider gir

$$\begin{aligned} \int \frac{y'}{y} dx &= \int 6x \, dx \\ \ln(|y|) &= 3x^2 + C \\ |y| &= e^{3x^2+C} \\ y &= \pm e^c \cdot e^{3x^2} \end{aligned}$$

der C er et vilkårlig reelt tall.

Når C gjennomløper alle reelle tall, vil e^C gjennomløpe alle positive tall. Dermed er alle løsningene til likningen, inkludert den trivielle løsningen $y = 0$, gitt ved

$$y = De^{3x^2},$$

der D er et vilkårlig reelt tall.

Løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsen må ha

$$y(0) = De^{3\cdot 0^2} = De^0 = D = 2.$$

Svar:

$$\underline{\underline{y(x) = 2e^{3x^2}.}}$$

Oppgave 5 (5 poeng) Nettkode: E-4DBZ

En rekke er gitt ved

$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + a_n$

a)

Bestem a_{16} og S_{16}

Løsningsforslag a)

For å løse denne oppgaven må vi egentlig også løse oppgave b). Med dette i tankene begynner vi med å observere at leddene a_n i rekken

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + a_n$$

representerer det n-te oddetallet. Siden annenhvert tall er et oddetall må differansen mellom to tall i rekken være 2. Siden den rekken begynner på 1 kan vi skrive

$$a_n = 2n - 1.$$

Det betyr at

$$a_{16} = 2 \cdot 16 - 1 = 31.$$

For å finne summen S_{16} kan man enten huske at summen av de første n oddetallene er det $n$te kvadrattallet og at derfor $S_{16} = 16^2$, eller dele opp summen. Siden S_n er summen av oddetallene fra og med 1 til og med $2n - 1$ kan vi ved å bytte rekkefølge på addisjonen finne at

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 3 + 5 + \ldots [2(n-2) - 1] + [2(n-1) - 1] + [2n - 1] \\ &= \underbrace{1 + [2n-1]}_{2n} + \underbrace{3 + [2(n-1) - 1]}_{2n} + \ldots + \underbrace{\left[2\left(\tfrac{n}{2}\right) - 1\right] + \left[2\left(\tfrac{n}{2} + 1\right) - 1\right]}_{2n} \\ &= \underbrace{2n + 2n + 2n + \ldots + 2n}_{\frac{n}{2}\,ganger} \\ &= \frac{n}{2} \cdot 2n = n^2. \end{aligned}$$

Uansett finner vi at

$$S_{16} = 16^2 = 256.$$

Svar: $\underline{\underline{a_{16} = 31 \text{ og } S_{16} = 16^2 = 256}}$

b)
Forklar at rekken er aritmetisk, og bruk dette til å finne et uttrykk for a_n og S_n .

Løsningsforslag b)

Leddene i rekken

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + a_n$$

er oddetall og kan derfor skrives

$$a_n = 2n - 1 for n \in \mathbb{N}.$$

Siden differansen mellom nærstående ledd,

$$d = a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 1 - (2n-1) = 2(n+1) - 2n = 2$$

for alle n er rekken aritmetisk. Siden leddene øker med like mye vil summen av dem, altså verdien til rekken, alltid være n ganger så stor som gjennomsnittsverdien $\frac{1}{2}\left(a_1 + a_n\right)$ av leddene i den. Det betyr at

$$S_n = n\frac{a_1+a_n}{2} = n\frac{1+2n-1}{2} = n\frac{2n}{2} = n^2.$$

Svar: Aritmetisk rekke: $a_n = 2n - 1$ og $S_n = n^2$

c)
Bestem hvor mange ledd rekken minst må ha for at $S_n > 400$.

Løsningsforslag c)

Fra oppgave $b)$ har vi at

$$S_n = n^2.$$

De mulige antallene ledd n som gjør at $S_n > 400$ må dermed tilfredsstille

$$S_n = n^2 > 400 \implies n > \sqrt{400} = 20.$$

Altså må rekken minst ha 21 ledd for at $S_n > 400$.

Svar: 21.

Oppgave 6 (2 poeng) Nettkode: E-4DC3

Følgende informasjon er gitt om en kontinuerlig funksjon f :

- $f(x) > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) < 0$ for alle $x \in \langle \leftarrow, -2\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$
- $f'(x) = 0$ for $x = -2$ og for $x = 2$
- $f''(x) = 0$ for $x = 1$ og for $x = 3$

Lag en skisse som viser hvordan grafen til f kan se ut.

Løsningsforslag

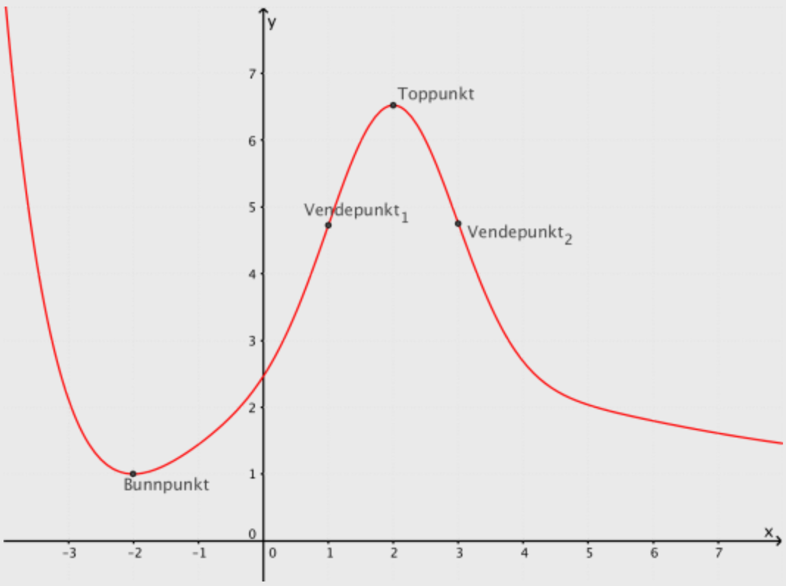
Siden $f(x) > 0$ må grafen til f alltid være over x-aksen. Siden

$$f'(x) < 0 \text{ for } x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

må grafen være avtagende på $(-\infty, -2)$ og på $(2, \infty)$ og kan derfor være voksende på $(-2, 2)$. Dette passer godt overens med kravet

$$f'(x) = 0 \text{ for } x = -2 \text{ og } x = 2.$$

Siden $f''(x) = 0$ for $x = 1$ og $x = 3$ må grafen ha vendepunkter i $x = 1$ og $x = 3$. Én mulig løsning er skissert i figuren under.



Oppgave 7 (2 poeng) Nettkode: E-4DC5

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad a + ak + ak^2 + ak^3 + ... + ak^{n-1} = a \cdot \frac{k^n - 1}{k-1} \quad , \qquad n \in \mathbb{N}$$

Løsningsforslag

For $n = 1$ er påstanden $P\left(1\right): \quad a = a \cdot \frac{k^1 - 1}{k-1} = a \cdot \frac{1}{1} = a$, som er sant! Vi antar nå at påstanden stemmer for $n = m$. Det betyr at

$$P\left(m\right): \quad a + ak + ak^2 + ak^3 + ... + ak^{m-1} = a\frac{k^m - 1}{k-1}.$$

Vi ønsker å se om dette betyr at også

$$P\left(m+1\right): \quad a + ak + ak^2 + ak^3 + ... + ak^{m-1} + ak^m = a\frac{k^{m+1} - 1}{k-1}$$

er sann. Siden vi har antatt at $P(m)$ er sann kan vi skrive

$$P\left(m+1\right): \quad a\frac{k^m - 1}{k-1} + ak^m = a\frac{k^{m+1} - 1}{k-1}.$$

Dette kan vi omformulere ved

$$a\frac{k^m - 1}{k-1} + ak^m = a\frac{k^{m+1} - 1}{k-1}$$

$$\Rightarrow ak^m = a\frac{k^{m+1} - 1}{k-1} - a\frac{k^m - 1}{k-1}$$

$$= a\frac{k^{m+1} - 1 - k^m + 1}{k-1} = a\frac{k^m(k-1)}{k-1} = ak^m,$$

som betyr at $P(m+1)$ stemmer hvis $P(m)$ stemmer. Vi har altså bevist at påstanden $P(n)$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$, ved induksjon.

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng) Nettkode: E-4DC7

En pasient får 8 mL av en medisin hver time. Den totale mengden medisin i kroppen t timer etter at medisineringen startet, er $y(t)$ mL. I løpet av en time skiller kroppen ut 5% av den totale medisinmengden.

a)
Forklar at

$y' = 8 - 0{,}05 \cdot y$

Løsningsforslag a)

Vi lar $y(t)$ være mengden medisin, målt i milliliter, i kroppen t timer etter at medisineringen startet. Siden pasienten får 8 mL av medisinen hver time må

$$y'(t) = 8.$$

At pasienten skiller ut 5% av den totale medisinmengden hver time betyr imidlertid at vi må trekke 5% av $y(t)$ fra endringen $y'(t)$. Med andre ord må vi ha

$$y' = 8 - 0,05y.$$

b)
Vis at $y(t) = 160 - 160e^{-0{,}05t}$ når $y(0) = 0$

Løsningsforslag b)

Siden oppgaven ber oss om å vise at $y\left(t\right) = 160 - 160e^{-0{,}05t}$ er en løsning av differensiallikningen når $y(0) = 0$ holder det å vise at $y(t)$ tilfredstiller differensiallikningen og at $y(0) = 0$. Sistnevnte kan vi observere ved

$$y\left(0\right) = 160 - 160e^{-0{,}05\cdot 0} = 160 - 160e^{0} = 160 - 160 = 0.$$

Fra kjerneregelen følger det at

$$y'\left(t\right) = \left(160 - 160e^{-0{,}05t}\right)' = \left(-0,05t\right)' \left(-160e^{-0{,}05t}\right) = 8e^{-0{,}05t}.$$

For å undersøke om y tilfredsstiller likningen

$$y' = 8 - 0,05y$$

holder det å sette inn uttrykkene for y' og y og se om likningen er oppfylt. Ved å gjøre dette får vi

$$8e^{-0{,}05t} = 8 - 0,05\left(160 - 160e^{-0{,}05t}\right) = 8 - 8 + 8e^{-0{,}05t},$$

som betyr at y løser differensiallikningen.

c)

Bestem $\lim_{t\to\infty} y(t)$. Kommenter svaret.

Løsningsforslag c)

Vi må beregne grenseverdien

$$\lim_{t\to\infty} y\left(t\right) = \lim_{t\to\infty} \left[160 - 160e^{-0{,}05t}\right].$$

Når t går mot uendelig må $0,05t$ gå mot uendelig. Det betyr at $e^{0{,}05t}$ må gå mot uendelig og derfor må $e^{-0{,}05t} = 1/e^{0{,}05t}$ gå mot én over uendelig – altså null. Med andre ord må

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} y\left(t\right) &= \lim_{t\to\infty} \left[160 - 160e^{-0{,}05t}\right] = 160 - 160 \lim_{t\to\infty} e^{-0{,}05t} \\ &= 160 - 160 \cdot 0 = 160.\end{aligned}$$

Dette er egentlig det eneste rimelige svaret. Hvis vi hadde funnet at $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$ hadde dette betydd at pasienten, og hele universet, etterhvert vil bli fylt opp av medisin – det høres ikke fornuftig ut! Hvis vi på den annen side hadde funnet at $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ hadde det ikke vært noen vits for pasienten å innta 8 mL av medisinen hver time. Dessuten hadde ikke dette gitt mening ettersom pasienten da måtte ha skilt ut 100% av den totale medisinmengden hver time. Den eneste fornuftige verdien $\lim_{t\to\infty} y(t)$ kan ta er altså slik at fem prosent av medisinmengden er nøyaktig lik 8 mL. Dette kan vi skrive som $0.05 \cdot y(\infty) = 8$. Svaret er da det samme som vi fant ovenfor – pasienten vil etter en veldig lang behandling ende opp med å ha omlag 160 mL medisin i kroppen.

Svar:

$$\underline{\underline{\lim_{t\to\infty} y\left(t\right) = 160.}}$$

Oppgave 2 (6 poeng) Nettkode: E-4DCB

Funksjonen f er gitt ved

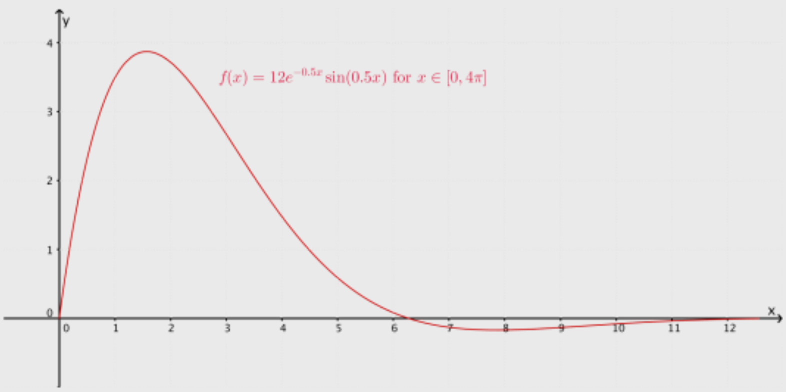
$$f(x) = 12e^{-0,5x} \cdot \sin(0,5x) \quad , \quad x \in [0,\ 4\pi]$$

a)

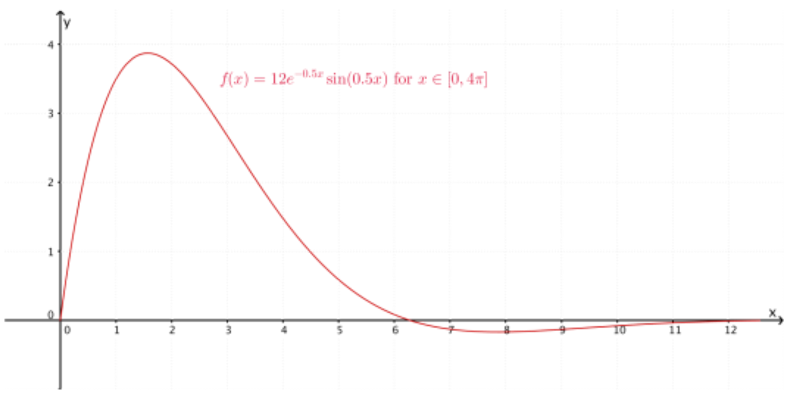
Tegn grafen til f.

Løsningsforslag a)

Ved å bruke kommandoen
`f(x):=Funksjon[12exp(-0.5x)sin(0.5x),0,4\pi]`
i geoGebras grafdel sitter vi igjen med følgende graf:



Svar:



b)

Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

Løsningsforslag b)

Ved å benytte produktregelen og kjerneregelen for derivasjon finner vi at

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(12e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)' \\
&= \left(12e^{-\frac{1}{2}x}\right)'\sin\left(\tfrac{x}{2}\right) + 12e^{-\frac{1}{2}x}\left(\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)' \\
&= \left(-\tfrac{1}{2}\right)12e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\tfrac{x}{2}\right) + 12e^{-\frac{1}{2}x}\left(\tfrac{1}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x}{2}\right) \\
&= 6e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\left(\tfrac{x}{2}\right) - \sin\left(\tfrac{x}{2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Topp- og bunnpunktene, x, på grafen til f må altså tilfredsstille

$$f'\left(x\right) = 6e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\left(\tfrac{x}{2}\right) - \sin\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) = 0$$

og siden $6e^{-\frac{1}{2}x}$ aldri er null må

$$\cos\left(\tfrac{x}{2}\right) - \sin\left(\tfrac{x}{2}\right) = 0.$$

Ved å dividere begge sider av likningen på $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ følger det at

$1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 1$

Det betyr at

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{Z}$

og dermed

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{Z}$

De punktene som ligger i intervallet $[0, 4\pi]$ er da

$x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{og} \qquad x = \frac{5\pi}{2}$

Ved enten å se på tegningen av grafen til f fra oppgave $a)$ eller å legge merke til at

$f\,'(0) = 6 > 0, \quad f\,'(2\pi) = -6e^{-\pi} < 0 \quad \text{og} \quad f\,'(4\pi) = 6e^{-2\pi} > 0,$

som betyr at $f'(x)$ går fra å være positiv til å være negativ i $x = \frac{\pi}{2}$ og fra å være negativ til å være positiv i $x = \frac{5\pi}{2}$, følger det at

$$
\begin{aligned}
\textit{Toppunkt}: \quad & \left(\tfrac{\pi}{2}, f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\tfrac{\pi}{2}, 12e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\tfrac{\pi}{2}, 6\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right) \\
\textit{Bunnpunkt}: \quad & \left(\tfrac{5\pi}{2}, f\left(\tfrac{5\pi}{2}\right)\right) = \left(\tfrac{5\pi}{2}, 12e^{-\frac{5\pi}{4}}\sin\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)\right) = \left(\tfrac{5\pi}{2}, -6\sqrt{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}\right).
\end{aligned}
$$

ALTERNATIV LØSNING (NUMERISK)

Svar: Toppunktet er $\left(\frac{\pi}{2}, 6\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$ og bunnpunktet er $\left(\frac{5\pi}{2}, -6\sqrt{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}\right)$.

c)

Bestem arealet som er begrenset av grafen til f og x-aksen.

Løsningsforslag c)

Vi begynner med å observere at nullpunktene til f på intervallet $[0, 4\pi]$ er punktene

$$x \in \{0, 2\pi, 4\pi\}$$

siden

$$f(x) = 12e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \pi n \text{ for } n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = 2\pi n \text{ for } n \in \mathbb{Z}.$$

Siden $f(x)$ er positiv på intervallet $[0, 2\pi]$ og negativ på intervallet $[2\pi, 4\pi]$ kan vi uttrykke arealet A avgrenset av grafen til f og x-aksen ved

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{4\pi} \left|f\left(x\right)\right| dx = \int_0^{2\pi} f\left(x\right) dx + \int_{2\pi}^{4\pi} -f\left(x\right) dx \\ &= 12 \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx - 12 \int_{2\pi}^{4\pi} e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx. \end{aligned}$$

Ved å benytte metoden for delvis integrasjon ved å integrere $e^{-\frac{1}{2}x}$ og derivere $\sin\frac{x}{2}$, finner vi at

$$\begin{aligned} I &= \int e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx \\ &= -2e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\int e^{-\frac{1}{2}x} \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx \\ &= -2e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \int e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx \end{aligned}$$

Vi kan nå gjenta delvis integrasjon på det gjenværende integralet ved å integrere $e^{-\frac{1}{2}x}$ og derivere $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$. Da får vi

$$\begin{aligned} \int e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx &= -2e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \int 2e^{-\frac{1}{2}x} \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx \\ &= -2e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{x}{2}\right) - I. \end{aligned}$$

Det betyr at vi har integralet I må tilfredsstille

$$\begin{aligned} I &= -2e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \int e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx \\ &= -2e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{x}{2}\right) - I, \end{aligned}$$

som ved å legge til I på begge sider av likhetstegnet kan skrives

$$2I = -2e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\tfrac{x}{2}\right) - 2e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\tfrac{x}{2}\right).$$

Altså må

$$I \quad = \int e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)dx = -e^{-\frac{1}{2}x}\left(\sin\left(\tfrac{x}{2}\right) + \cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\right).$$

Merk at vi med vilje har latt være å ta med en integrasjonskonstant ettersom den uansett bortfaller når resultatet brukes i et bestemt integral. Dette betyr at arealet A kan skrives

$$\begin{aligned}
A \quad &= 12\int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)dx - 12\int_{2\pi}^{4\pi} e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)dx \\
&= 12\Big[-e^{-\frac{1}{2}x}\left(\sin\left(\tfrac{x}{2}\right) + \cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\Big]_0^{2\pi} - 12\Big[-e^{-\frac{1}{2}x}\left(\sin\left(\tfrac{x}{2}\right) + \cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\Big]_{2\pi}^{4\pi} \\
&= 12\left[-e^{-\pi}(-1) + 1\right] - 12\left[-e^{-2\pi}(\sin 2\pi + \cos 2\pi) + e^{-\pi}(-1)\right] \\
&= 12 + 12e^{-\pi} - 12\left[-e^{-2\pi} - e^{-\pi}\right] = 12 + 12e^{-\pi} + 12e^{-\pi} + 12e^{-2\pi} \\
&= 12\left(1 + 2e^{-\pi} + e^{-2\pi}\right) \approx 13,0595.
\end{aligned}$$

ALTERNATIV LØSNING (NUMERISK)

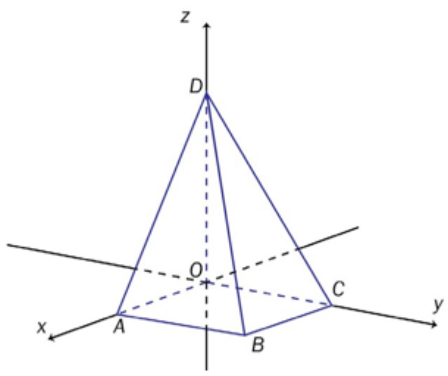
Svar:

$$12\left(1 + 2e^{-\pi} + e^{-2\pi}\right) \approx 13,0595.$$

Oppgave 3 (8 poeng) Nettkode: E-4DDB

Skissen nedenfor viser en pyramide $OABCD$ som er plassert i et romkoordinatsystem.

Hjørnene i pyramiden er $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(3,\ 0,\ 0)$, $B(3,\ 3,\ 0)$, $C(0,\ 3,\ 0)$ og $D(0,\ 0,\ 4)$.



a)
Bestem ved regning arealet av sideflaten ABD i pyramiden.

Løsningsforslag a)

Vi begynner med å observere at

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [3,3,0] - [3,0,0] = [0,3,0]\\ \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [0,0,4] - [3,0,0] = [-3,0,4].\end{aligned}$$

Det betyr at

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\vec{e}_x - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}\vec{e}_y + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}\vec{e}_z$$

$$= 3 \cdot 4\vec{e}_x - 0\vec{e}_y + (-3 \cdot (-3))\vec{e}_z = [12,0,9].$$

Siden lengden av vektoren $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ er lik arealet av parallellogrammet utspent av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$, og paralleogrammet har nøyaktig dobbelt så stort areal som sideflaten ABD, følger det at arealet A av sideflaten ABD er

$$\begin{aligned}A &= \tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \tfrac{1}{2}\sqrt{12^2 + 9^2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{4^2 + 3^2}\\ &= \tfrac{3}{2}\sqrt{25} = \tfrac{3}{2} \cdot 5 = \tfrac{15}{2} = 7,5.\end{aligned}$$

ALTERNATIV LØSNING

Svar: Areal av $\Delta ABD = \frac{15}{2} = 7{,}5.$

b)

Sideflaten ABD ligger i et plan α.

Vis ved regning at planet α har likningen

$4x + 3z - 12 = 0$

Løsningsforslag b)

Vektoren $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$, som vi i oppgave $a)$ fant at er lik $[12, 0, 9]$, står vinkelrett på planet α. Det betyr at vi må velge normalvektoren $\vec{n}$ som en konstant λ multiplisert med retningen $[12, 0, 9]$. Ett mulig valg er da å sette

$\vec{n} = \frac{1}{3}\left[12, 0, 9\right] = \left[4, 0, 3\right].$

Hvis $\vec{v}$ er en vektor mellom to punkter i α er da likningen til α gitt som

$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0.$

Siden $A(3, 0, 0)$ ligger i alpha må altså alle punkter $P(x, y, z)$ som ligger i α tilfredsstille

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = \left[4, 0, 3\right] \cdot ([x,y,z] - [3,0,0]) = \left[4, 0, 3\right] \cdot \left[x - 3, y, z\right] = 4\left(x - 3\right) + 3z = 0.$

Det kan skrives

$$4x + 3z - 12 = 0,$$

som er det vi ønsket å vise.

c)

Bestem avstanden fra punktet O til planet α.

Løsningsforslag c)

Vi husker først at hvis to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle, eller antiparallelle, tilfredsstiller de likningen

$$\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|$$

der $\left|\vec{a}\right|$ og $\left|\vec{b}\right|$ er lengden til henholdsvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Siden likningen til planet,

$$4x + 3z - 12 = 0,$$

kan skrives

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} = 12,$$

der $P(x, y, z)$ er et punkt i planet og $\vec{n} = [4, 0, 3]$ er normalvektoren til planet, følger det at

$$\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}\right| = \left|\vec{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OP}\right| = 12$$

hvis $\vec{n}$ og $\overrightarrow{OP}$ er parallelle, eller antiparallelle. Da er P det punktet i α som er nærmest O, som betyr at lengden $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ må være avstanden d fra punktet O til planet α. Vi har altså at

$$d = \left|\overrightarrow{OP}\right| = \frac{12}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{12}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{12}{5} = 2,4.$$

Svar:

$$\underline{\underline{2,4.}}$$

d)

Bestem ved regning vinkelen mellom de to planene som sideflatene ABD og BCD ligger i.

Løsningsforslag d)

Først observerer vi at

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = [3,3,0] - [0,3,0] = [3,0,0] \\ \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = [0,0,4] - [0,3,0] = [0,-3,4].\end{aligned}$$

Deretter ser beregner vi vektoren

$$\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}\vec{e}_x - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\vec{e}_y + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}\vec{e}_z$$

$$= 0\vec{e}_x - 3 \cdot 4\vec{e}_y + 3 \cdot (-3)\vec{e}_z = [0, -12, -9].$$

Siden normalvektoren til planet α er $\vec{n} = [4,0,3]$ og vektoren $\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CD}$ er normal på planet BCD ligger i må vinkelen θ mellom de to planene tilfredsstille

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CD} = |\vec{n}| \cdot \left|\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CD}\right| \cos(\theta)$$

Med andre ord er vinkelen mellom de to planene gitt ved

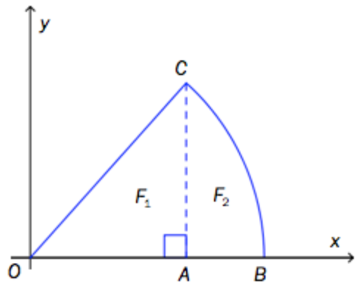
$$\begin{aligned}\theta &= \arccos\left(\frac{\vec{n}\cdot\vec{CB}\times\vec{CD}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{CB}\times\vec{CD}|}\right) = \arccos\left(\frac{[4,0,3]\cdot[0,-12,-9]}{\sqrt{4^2+3^2}\cdot\sqrt{(-12)^2+(-9)^2}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{-3\cdot 9}{5\cdot 15}\right) = \arccos\left(\frac{-9}{25}\right) \approx 111,1^\circ.\end{aligned}$$

Siden vi tenker på vinkelen mellom to plan som en vinkel i første kvadrant bør vi heller velge $\theta \approx 180^\circ - 111,1^\circ = 68,9^\circ$.

Svar: Ca. $68,9^\circ$.

Oppgave 4 (6 poeng) Nettkode: E-4DDH

Figuren nedenfor viser en sirkelsektor OBC der C ligger i første kvadrant. Buen BC er en del av sirkelen med likning $x^2 + y^2 = 9$. Punktet A har koordinatene $(2, 0)$ og $\angle OAC = 90^\circ$



a)

Vis at koordinatene til C er $\left(2, \sqrt{5}\right)$.

Bestem likningen for den rette linjen gjennom O og C.

Løsningsforslag a)

Siden C ligger rett over A må A og C dele x-koordinat. Det betyr at C har x-koordinat lik 2. Siden C også må tilfredsstille likningen for sirkelen finner vi da at y-koordinaten til C, y_C, må tilfredsstille

$$2^2 + y_C^2 = 9 \Rightarrow y_C = \pm\sqrt{9 - 2^2} = \pm\sqrt{5}$$

Ettersom C ligger over x-aksen må den positive løsningen være den rikitige. Altså har vi funnet at

$$C = \left(2, \sqrt{5}\right).$$

Likningen for punktene som ligger på den rette linjen gjennom O og C kan skrives

$$y = ax + b$$

for to konstanter a og b. Siden linjen skjærer y-aksen i Origo må konstantleddet, b, være null, og siden C har koordinater $\left(2, \sqrt{5}\right)$ må stigningstallet til linjen være gitt som

$$a = \frac{y_C}{x_C} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Likningen for linjen som går gjennom O og C kan altså skrives

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2}x.$$

Dersom vi ikke husker hvordan vi kan finne konstantleddet og stigningstallet til en rett linje kunne vi også sagt at linjen gjennom O og C kan uttrykkes

$$C_x x + C_y y + C = 0,$$

for tre konstanter C_x, C_y og C. At $O(0,0)$ ligger på linjen impliserer

$C_x \cdot 0 + C_y \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0.$

Siden $C\left(2, \sqrt{5}\right)$ også ligger på denne linjen må

$C_x \cdot 2 + C_y \cdot \sqrt{5} \Rightarrow C_x = -\frac{\sqrt{5}}{2} C_y$

Altså kan likningen for den rette linjen skrives

$-\frac{\sqrt{5}}{2} C_y x + C_y y = 0 \Rightarrow C_y y = \frac{\sqrt{5}}{2} C_y x.$

Ved å dele på C_y på begge sider av likningen finner vi uttrykket

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2} x,$$

som er likningen for den rette linjen mellom O og C.

ALTERNATIV LØSNING

Svar:

$y = \frac{\sqrt{5}}{2} x.$

b)

Når flatestykket F_1 (ΔOAC) dreies 360° om x-aksen, får vi en kjegle.

Bestem volumet av denne kjeglen ved hjelp av integralregning.

Løsningsforslag b)

I oppgave $a)$ fant vi at den rette linjen gjennom O og C tilsvarer grafen til funksjonen $y\left(x\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Kjeglen som oppstår når denne linjen roteres om x-aksen kan deles opp i uendelig mange, uendelig tynne sylindere med radius $f(x)$ og høyde dx. Volumet av hver sylinder er dermed $\pi f(x)^2 dx$ og integralet av disse volumene er volumet V av kjeglen. Altså har vi at

$V \quad = \int_{x_O}^{x_A} \pi (y(x))^2 \mathrm{dx} = \int_0^2 \pi \left(\frac{\sqrt{5}}{2} x\right)^2 dx = \frac{5\pi}{4} \int_0^2 x^2 dx$

og siden den deriverte av $\frac{1}{3}x^3$ er x^2 må

$\frac{5\pi}{4} \int_0^2 x^2 \mathrm{dx} = \frac{5\pi}{4} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{5\pi}{4} \left(\frac{1}{2} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3\right) = \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^3 = \frac{10\pi}{3} \approx 10{,}47.$

Altså er arealet av kjeglen gitt av

$$V = \frac{10\pi}{3} \approx 10,47.$$

Svar:

$\frac{10\pi}{3} \approx 10,47.$

c)

Når flatestykket F_2 dreies 360° om x-aksen, får vi et kulesegment.

Bestem volumet av dette kulesegmentet ved hjelp av integralregning.

Løsningsforslag c)

Ettersom likningen for sirkelen er

$$x^2 + y^2 = 9$$

kan vi skrive funksjonsuttrykket for sektoren BC som

$$y = \sqrt{9 - x^2}.$$

Ved å gjenta prosedyren med å dele opp omdreiningslegemet i uendelige mange, uendelig tynne sylindere med volum $\pi(y(x))^2 dx$ kan vi uttrykke volumet V av omdreiningslegemet ved $V = \int_{x_C}^{x_B} \pi(y(x))^2 dx$. Siden C har x-koordinat lik 2 og B må ha x-koordinat lik radius i sirkelen, nemlig 3, følger det at

$$\int_{x_C}^{x_B} \pi y\left(x\right)^2 dx = \int_2^3 \pi \sqrt{9 - x^2}^2 dx = \pi \int_2^3 \left(9 - x^2\right) dx$$
$$= \pi \left(\int_2^3 9dx - \int_2^3 x^2 dx\right) = 9\pi \int_2^3 1dx - \pi \int_2^3 x^2 dx.$$

At den deriverte av x og $\frac{1}{3}x^3$ er henholdsvis 1 og x^2 gir dermed at

$$9\pi \int_2^3 1dx - \pi \int_2^3 x^2 dx = 9\pi \Big[x\Big]_2^3 - \pi \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_2^3$$
$$= 9\pi\,(3 - 2) - \pi\left(\tfrac{1}{3}3^3 - \tfrac{1}{3}2^3\right)$$
$$= 9\pi - \pi\left(9 - \tfrac{8}{3}\right) = \frac{8\pi}{3} \approx 8,38.$$

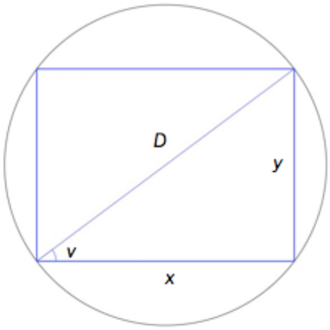
Svar:

$\frac{8\pi}{3} \approx 8,38.$

Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4DDM

På figuren er et rektangel med sider x og y innskrevet i en sirkel. Sirkelen har diameteren D.

$\angle v$ er vinkelen mellom x og D.



a)
Forklar at omkretsen O til rektangelet kan skrives som

$O(v) = 2D\cos v + 2D\sin v$

Bestem også et funksjonsuttrykk for arealet $A(v)$ av rektangelet.

Løsningsforslag a)

Siden

$$\sin(v) = \frac{\text{Motstående katet}}{\text{Hypotenus}} \quad \text{og} \quad \cos(v) = \frac{\text{Hosliggende katet}}{\text{Hypotenus}}$$

kan vi skrive

$$\sin(v) = \frac{y}{D} \quad \text{og} \quad \cos(v) = \frac{x}{D}$$

og dermed få

$$x = D\cos(v) \quad \text{og} \quad y = D\sin(v)$$

Omkretsen O av rektangelet kan da skrives

$$O = 2x + 2y = 2D\cos v + 2D\sin v,$$

som er det første vi ønsket å vise. Arealet $A(v)$ av rektangelet blir da

$$A\left(v\right) = xy = D^2\sin(v)\cos(v) = \frac{D^2}{2}\sin(2v).$$

Svar: $A\left(v\right) = D^2\sin(v)\cos(v) = \frac{D^2}{2}\sin(2v).$

b)

Bruk $O'(v)$ og vis at det rektangelet som har størst omkrets, er et kvadrat.

Bestem den største omkretsen av rektangelet uttrykt ved diameteren D.

Løsningsforslag b)

Ettersom

$$O(v) = 2D\cos(v) + 2D\sin(v)$$

følger det at

$$O'(v) = 2D(\cos(v))' + (2D\sin(v))' = -2D\sin(v) + 2D\cos(v).$$

De ekstreme verdiene til omkretsen $O(v)$ er dermed gitt av de vinklene v som tilfredsstiller

$$O^{'}(v) = -2D\sin(v) + 2D\cos(v) = 0$$

$$\Rightarrow 2D\sin(v) = 2D\cos(v)$$

$$\Rightarrow \sin(v) = \cos(v)$$

$$\Rightarrow \tan(v) = 1$$

Siden denne verdien for v er slik at $\sin(v) = \cos(v)$ følger det at

$$x = D\cos(v) = D\sin(v) = y,$$

som betyr at rektangelet da er et kvadrat. Ettersom vinkelen v må være i intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ er den eneste løsningen av denne likningen gitt ved $v = \frac{\pi}{4}$. Siden $O(v) \to 0 \text{ når } v \to 0^{+} \text{ eller } v \to \frac{\pi}{2}^{-}$, må $\frac{\pi}{4}$ være et makspunkt. Dette gir en maksimal omkrets lik

$$\begin{aligned} O_{maks} &= O\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = 2D\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + 2D\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= 2D\frac{\sqrt{2}}{2} + 2D\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}D. \end{aligned}$$

Svar:

$$\underline{\underline{O_{maks} = 2\sqrt{2}D.}}$$

c)

Bruk $A'(v)$ og vis at det rektangelet som har størst areal, også er et kvadrat.

Bestem det største arealet av rektangelet uttrykt ved diameteren D.

Løsningsforslag c)

Ettersom

$$A\left(v\right) = \frac{1}{2}D^2 \sin\left(2v\right)$$

følger det at

$$A'(v) \quad = \frac{1}{2}D^2\left(\sin\left(2v\right)\right)' = \frac{1}{2}D^2\left(2v\right)'\cos\left(2v\right) = \frac{1}{2}D^2 2\cos\left(2v\right) = D^2\cos\left(2v\right).$$

Siden det største arealet $A(v)$ er gitt av den vinkelen v som tilfredsstiller $A'(v) = 0$ og

$$A^{'}(v) = D^2\cos\left(2v\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\left(2v\right) = 0 \Rightarrow 2v = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

må vinkelen som maksimerer arealet $A(v)$ være $v = \frac{\pi}{4}$. Siden $O\left(v\right) \to 0$ når $v \to 0^+$ eller $v \to \frac{\pi}{2}^-$, må $\frac{\pi}{4}$ være et makspunkt. Merk imidlertid at også $v = \frac{\pi}{2}$ er en løsning likningen $A'(v) = 0$. Denne forkaster vi ettersom den fører til et areal lik 0. Det maksimale arealet A_{maks} er altså gitt av

$$A_{maks} = A\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}D^2\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}D^2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}D^2.$$

Siden vinkelen er den samme som i oppgave $b)$ følger det at rektangelet med maksimalt areal er et kvadrat. Alternativt kan vi observere dette ved

$$x = D\cos\left(v\right) = D\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = D\frac{\sqrt{2}}{2} = D\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = y.$$

Svar: $\underline{\underline{A_{maks} = \frac{1}{2}D^2.}}$

Oppgave 6 (6 poeng) Nettkode: E-4DDU

Sierpiński-trekanten, som har sitt navn etter den polske matematikeren Wacław Franciszek Sierpiński (1882–1969), lages slik:

1. Vi starter med en likesidet, svart trekant som har areal A. Se figur 1.

2. Midtpunktet på hver av sidene i trekanten er hjørnene i en ny hvit, likesidet trekant. Denne hvite trekanten fjerner vi. Vi står da igjen med tre likesidede, svarte trekanter. Se figur 2.

3. Vi gjentar denne prosessen med hver av de svarte trekantene. Se figurene 3–5. Vi tenker oss at prosessen blir utført uendelig mange ganger. Den «gjennomhullede» figuren vi da står igjen med, kalles Sierpiński-trekanten.

Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4 Figur 5

Summen av arealene som fjernes (de hvite trekantene), er gitt ved rekken

$A \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + \frac{27}{256} + \ldots\right)$

a)

Bestem summen av rekken ovenfor.

Hva forteller svaret ditt om arealet av Sierpiński-trekanten?

Løsningsforslag a)

Rekken kan skrives

$$\begin{aligned} & A \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + \frac{27}{256} + \ldots\right) \\ & = A \cdot \left(\frac{3^0}{4^1} + \frac{3^1}{4^2} + \frac{3^2}{4^3} + \frac{3^3}{4^4} + \ldots\right) \\ & = \frac{A}{4} \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \ldots\right). \end{aligned}$$

Det holder altså å finne verdien av

$$S_n = \left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

og deretter beregne $\frac{1}{4} A S_n$ når n går mot uendelig. Siden vi kan skrive

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{4}\right) S_n & = \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \\ & = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] - 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \\ & = S_n + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

følger det imidlertid at

$$S_n\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)\right)=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

som betyr at

$$S_n=\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

Ettersom $\frac{3}{4}<1$ blir $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ mindre og mindre etterhvert som n blir større. Med andre ord må

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=\frac{4}{4-3}=4.$$

Summen av rekken kan altså skrives

$$A\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}+\frac{27}{256}+\ldots\right)=\frac{A}{4}\cdot 4=A.$$

Det betyr at Sierpinski-trekanten har areal lik null ettersom alt det opprinnelige arealet A fjernes etter uendelig mange steg.

Svar:

$$A\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}+\frac{27}{256}+\ldots\right)=A.$$

Sierpinski-trekanten har areal lik null.

b)

Sidene i trekanten i figur 1 er lik a.

Forklar at omkretsene av de svarte trekantene i figurene 2 − 5 ovenfor er henholdsvis

$3 \cdot \frac{3}{2} \cdot a, \quad 3 \cdot \frac{9}{4} \cdot a, \quad 3 \cdot \frac{27}{8} \cdot a \quad \text{og} \quad 3 \cdot \frac{81}{16} \cdot a$

Løsningsforslag b)

Hvis den opprinnelige trekanten har sidelengde a, vil den ha en omkrets lik

$$O_0 = 3a.$$

Ettersom trekanten som er fjernet i figur **2** utgjør nøyaktig $\frac{1}{4}$ av den opprinnelige trekanten må den ha sidelengde lik $\frac{1}{2}a$. Det betyr at omkretsen av figuren i figur **2** er

$$O_1 = 3a + \frac{3}{2}a = \frac{9}{2}a = 3 \cdot \frac{3}{2}a.$$

Siden figur **3** består av tre kopier av figur **2** som er halvert i størrelse må omkretsen av figur **3** være gitt som

$$O_2 = \frac{3}{2}O_1 = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}a = 3 \cdot \frac{9}{4}a.$$

Nøyaktig det samme er tilfellet i figur **4** – den består av tre kopier av figur **3** i halvert størrelse. Altså må

$$O_3 = \frac{3}{2}O_2 = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \frac{9}{4}a = 3 \cdot \frac{27}{8}a.$$

Helt tilsvarende må omkretsen av figur 5 være gitt som

$$O_4 = \frac{3}{2}O_3 = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \frac{27}{8}a = 3 \cdot \frac{81}{16}a.$$

c)
Vi gjør prosessen som forklart i trinn 2 ovenfor n ganger. Forklar at omkretsen av de svarte trekantene da er lik $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot a$

Forklar at $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot a \to \infty$ når $n \to \infty$

Hva forteller dette om omkretsen til Sierpiński-trekanten?

Løsningsforslag c)

I oppgave b) fant vi at omkretsen av den første trekanten (figur **1**), er lik $O_0 = 3a$. Videre fant vi at

$$O_n = \frac{3}{2} O_{n-1} \qquad \text{for} \qquad n = 1,2,3,....$$

Det betyr at

$$
\begin{aligned}
O_0 &= 3a \\
O_1 &= 3 \cdot \frac{3}{2} a \\
O_2 &= 3 \cdot \frac{9}{4} a = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 a \\
O_3 &= 3 \cdot \frac{27}{8} a = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 a \\
O_4 &= 3 \cdot \frac{81}{16} a = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 a
\end{aligned}
$$

og dermed er omkretsen til de sorte trekantene lik

$$O_n = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n a$$

etter n steg. Siden $\frac{3}{2} > 1$ følger det at $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ vokser når n vokser. Altså må

$$\lim_{n \to \infty} O_n = 3a \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty.$$

Dette betyr at Sierpinski-trekanten har uendelig stor omkrets.

Svar: Sierpinski-trekanten har uendelig stor omkrets.