REA3022 2016 Vår

Eksamenstid:
5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 3 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Del 1 har 7 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
- vurderer om svar er rimelige

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.:

- Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng) Nettkode: E-4D8B

Deriver funksjonene gitt ved

a)

$f(x) = -3x^2 + 6x - 4$

Løsningsforslag a)

$$f'(x) = \left(-3x^2 + 6x - 4\right)' = -3 \cdot 2x + 6 \cdot 1 - 0 = -6x + 6 = 6(1 - x)$$

Svar:

$$\underline{\underline{f'(x) = -6x + 6 = 6(1 - x)}}$$

b)

$g(x) = 5\ln\left(x^3 - x\right)$

Løsningsforslag b)

Siden vi vet hvordan vi kan derivere

$u(x) = x^3 - x$ og $h(u) = 5\ln u$, $\left(x^3 - x\right)' = 3x^2 - 1$ og $\left(5\ln u\right)' = \frac{5}{u}$,

begynner vi med å skrive

$g(x) = 5\ln\left(x^3 - x\right) = 5\ln u(x) = h(u(x))$

Ved å benytte kjerneregelen for derivasjon, som sier at

$h(u(x)))' = u'(x)h'(u)$

finner vi da at

$g'(x) = u'(x)h'(u) = \left(x^3 - x\right)'\left(5\ln u\right)' = \left(3x^2 - 1\right)\left(\frac{5}{u}\right)$

$$= \left(3x^2 - 1\right)\left(\frac{5}{x^3-x}\right) = \frac{15x^2-5}{x^3-x}$$

Svar:

$$g'\left(x\right) = \frac{15x^2 - 5}{x^3 - x}$$

c)

$h\,(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Løsningsforslag c)

Brøkregelen for derivasjon sier

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

I vårt tilfelle er $u(x) = x - 1$ og $v(x) = x + 1$, og derfor $u'\left(x\right) = 1$ og $v'\left(x\right) = 1$

$$h'\left(x\right) = \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'\left(x\right)v\left(x\right) - u\left(x\right)v'\left(x\right)}{\left(v(x)\right)^2} = \frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1\cdot(x+1)-(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ALTERNATIV LØSNING

Svar:

$$h'\left(x\right) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Oppgave 2 (5 poeng) Nettkode: E-4D8F

Polynomet P er gitt ved

$P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x + k$

a)
Vis at P er delelig med $(x-2)$ hvis og bare hvis $k = -8$.

Løsningsforslag a)

P er delelig med $(x-2)$ hvis og bare hvis $P(2) = 0$. Da får vi

$$\begin{aligned} 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 + k &= 0 \\ 8 - 28 + 28 + k &= 0 \\ k &= -8 \end{aligned}$$

b)
Sett $k = -8$ og faktoriser P ved hjelp av lineære faktorer.

Løsningsforslag b)

Vi starter med å dele P på $(x-2)$

$$\begin{array}{l} (x^3 - 7x^2 + 14x - 8) : (x-2) = x^2 - 5x + 4 \\ \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\ \quad -5x^2 + 14x - 8 \\ \quad \underline{-(-5x^2 + 10x)} \\ \qquad 4x - 8 \\ \qquad \underline{-(4x - 8)} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Å faktorisere $x^2 - 5x + 4$ gjør vi, ved å finne nullpunktene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+3}{2} = 4 \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{5-3}{2} = 1$$

Derfor er

$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$,

og kan faktoriseres

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-4)$$

Svar:

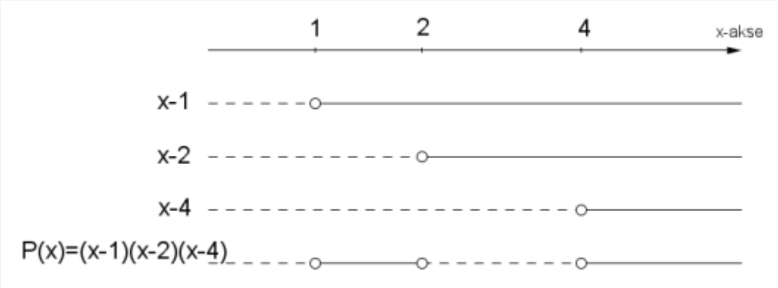
$$\underline{\underline{P(x) = (x-1)(x-2)(x-4)}}$$

c)

Løs ulikheten $P(x) \leq 0$.

Løsningsforslag c)

Fortegnssjemaet til P ser slik ut:



Vi ser at P er negativ i $\langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 2, 4 \rangle$, så vi har løsningen

$$L = \langle \leftarrow, 1] \cup [2, 4]$$

Svar:

$$\underline{\underline{L = \langle \leftarrow, 1] \cup [2, 4]}}$$

Oppgave 3 (7 poeng) Nettkode: E-4D8J

Funksjonen f er gitt ved

$f(x) = x^2 e^{1-x^2} \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$

a)

Vis at $f'(x) = 2x\left(1 - x^2\right)e^{1-x^2}$

Løsningsforslag a)

Vi setter $u = x^2$ og $v = e^{1-x^2}$, da blir

$$f'(x) = \left(x^2 e^{1-x^2}\right)' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$
$$= \left(x^2\right)' \cdot e^{1-x^2} + x^2 \cdot \left(e^{1-x^2}\right)' = 2xe^{1-x^2} + x^2 \cdot \left(e^{1-x^2}\right)'$$

Det gjenstår å regne ut $\left(e^{1-x^2}\right)'$. Hvis vi setter $u(x) = 1 - x^2$ og bruker kjerneregelen, så blir uttrykket

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'\left(x\right)e^{u(x)} = \left(1 - x^2\right)' e^{1-x^2} = -2xe^{1-x^2}$$

Når vi vet dette får vi

$$f'(x) = 2xe^{1-x^2} + x^2 \cdot \left(e^{1-x^2}\right)'$$
$$= 2xe^{1-x^2} + x^2 \cdot \left(-2xe^{1-x^2}\right)$$
$$= 2xe^{1-x^2} - 2x^3 e^{1-x^2}$$
$$= 2x\left(1 - x^2\right)e^{1-x^2}$$

b)
Bestem eventuelle topp- og bunnpunkt på grafen til f.

Løsningsforslag b)

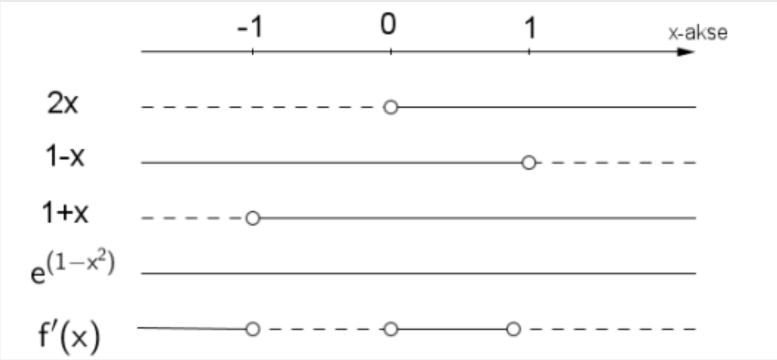
Vi vil faktorisere

$f'(x) = 2x(1 - x^2)e^{1-x^2}$

i faktorer som vi har en oversikt over hvor er positive og negative, og så tegne opp fortegnsskjema.

$$2x\left(1 - x^2\right)e^{1-x^2} = 2x\left(1 + x\right)\left(1 - x\right)e^{1-x^2}$$

$2x$, $1 + x$ og $1 - x$ er lineære faktorer som vi har kontroll på, og e^{1-x^2} er alltid positiv (et positivt tall opphøyd i noe er alltid positivt). Vi tegner fortegnsskjemaet:



At $f'(x)$ er positiv betyr at $f(x)$ stiger, og at $f'(x)$ er negativ betyr at $f(x)$ synker. Derfor ser vi at f stiger fram til $x = -1$, så synker f til $x = 0$, deretter stiger f igjen, til $x = 1$, og etter det synker f. Derfor er toppunktene når $x = -1$ og $x = 1$, og bunnpunktet er når $x = 0$.

Vi vet nå x-verdiene til topp- og bunnpunktene. For å ha koordinatene til punktene, må vi også vite y-verdiene- Disse finner vi ved å sette disse verdiene i f:

$$x = -1 \qquad f(-1) = (-1)^2 e^{1-(-1)^2} = 1 \cdot e^0 = 1$$

$$x = 0 \qquad f(0) = 0^2 e^{1-0^2} = 0 \cdot e^1 = 0$$

$$x = 1 \qquad f(1) = 1^2 e^{1-1^2} = 1 \cdot e^0 = 1$$

Toppunkter: $(-1, 1)$ og $(1, 1)$

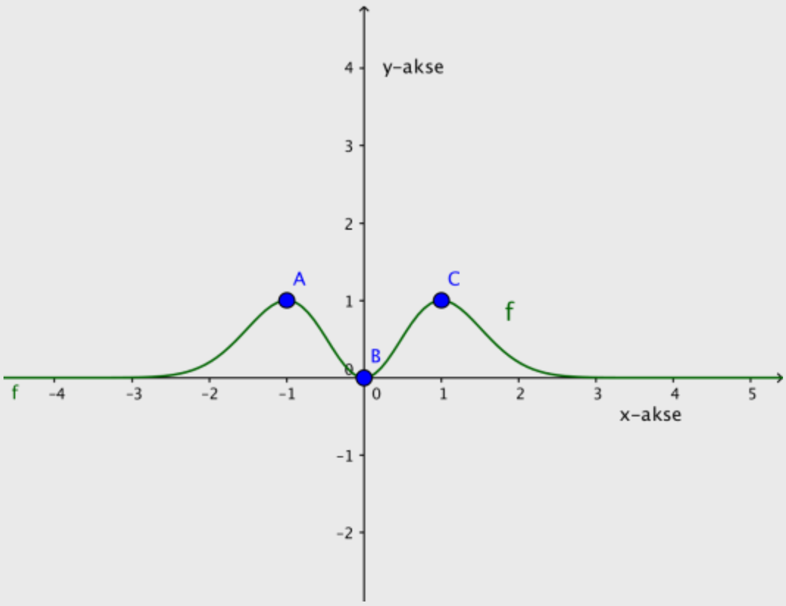
Bunnpunkt: $(0, 0)$

Svar: Toppunkter: $(-1, 1)$ og $(1, 1)$, og Bunnpunkt: $(0, 0)$

c)

Lag en skisse av grafen til f, når du får vite at $f(x) \to 0$ når $x \to \pm\infty$.

Løsningsforslag c)



d)

Bruk skissen til å avgjøre hvor mange vendepunkt grafen til f har.

Marker vendepunktene på skissen.

Løsningsforslag d)

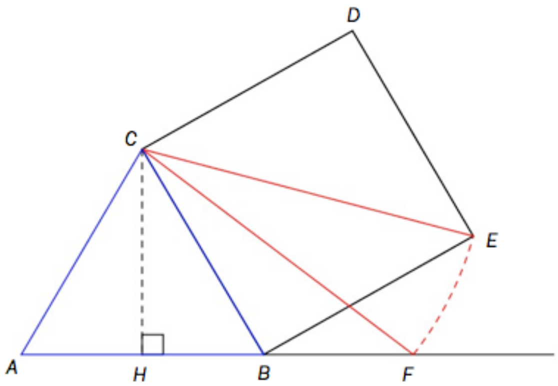
Beregningene som la grunnlag for skissen gir bare informasjon om fortegnet og monotoniegenskapene til f og dens asymptotiske oppførsel. Vi brukte altså bare at funksjonen er ikke-negativ og informasjon om hvor funksjonen er voksende eller avtagende, og hvordan funksjonen oppfører seg når x får stor tallverdi. Det er mulig å tegne mange skisser som samsvarer med all denne informasjonen samtidig som funksjonene som skisseres tilsynelatende har forskjellig antall vendepunkter. En funksjon kan nemlig være avtagende eller voksende i et intervall der den samtidig har mange vendepunkter.

Et annet poeng er at en graf egentlig aldri kan gi oss sikker informasjon om antall vendepunkter. Ved å zoome inn er det alltid en mulighet for å oppdage nye vendepunkter som ikke kunne oppdages i større skala.

Svar: Oppgaven er uløselig da vi ut i fra skissen ikke kan avgjøre hvor mange vendepunkter det finnes.

Oppgave 4 (4 poeng) Nettkode: E-4D8P

En likesidet ΔABC har side lik 6 cm. Høyden fra C treffer AB i H. $\square BEDC$ er et kvadrat. En sirkelbue med sentrum i C og radius CE treffer forlengelsen av AB i punktet F. Se figuren nedenfor.



a)

Bestem lengdene av linjestykkene CH, CF og HF.

Løsningsforslag a)

CH: ΔHBC er rettvinklet og $HB = 3\,\text{cm}$, og $BC = 6\,\text{cm}$.

$CH^2 = BC^2 - HB^2$

$CH = \sqrt{27}\,\text{cm} = 3\sqrt{3}\,\text{cm}$

CF: $CF = CE$ og ΔBEC er rettvinklet og $BE = BC = 6\,\text{cm}$.

$CE^2 = BC^2 + BE^2$

$CE = \sqrt{72}\,\text{cm} = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$

HF: ΔHFC er rettvinklet og $CH = 3\sqrt{3}\,\text{cm}$, og $CF = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$.

$HF^2 = CF^2 - CH^2$

$HF = \sqrt{45}\,\text{cm} = 3\sqrt{5}\,\text{cm}$

Svar: $CH = 3\sqrt{3}$ cm, $CE = 6\sqrt{2}$ cm og $HF = 3\sqrt{5}$ cm

b)

Vis at forholdet $\frac{AF}{AB}$ er lik «det gylne snitt» $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Løsningsforslag b)

$AB = 6\,\text{cm}$ og $AF = AH + HF = 3\text{cm} + 3\sqrt{5}\,\text{cm}$, så derfor er

$$\frac{AF}{AB} = \frac{3\text{cm}+3\sqrt{5}\,\text{cm}}{2\cdot 3\ \text{cm}} = \frac{3\ \text{cm}\left(1+\sqrt{5}\right)}{2\cdot 3\ \text{cm}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4D8S

Punktene $A(1,\ 1)$, $B(5,\ 2)$ og $C(3,\ 5)$ er gitt.

a)
Bruk vektorregning til å avgjøre om punktene ligger på en rett linje.

Løsningsforslag a)

$\overrightarrow{AB} = \left[5-1, 2-1\right] = \left[4, 1\right]$ og $\overrightarrow{BC} = \left[3-5, 5-2\right] = \left[-2, 3\right]$.

Hvis $\overrightarrow{AB}$ er parallell med $\overrightarrow{BC}$, så finnes det et reelt tall t slik at

$\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{BC}$

$[4,1] = t[-2,3]$

$4 = -2t \text{ og } 1 = 3t$

$t = -\frac{1}{2} \text{ og } t = \frac{1}{3}$

Dette stemmer ikke (vi kan ikke få to forskjellige verdier av t), og derfor kan heller ikke $\overrightarrow{AB}$ være parallell med $\overrightarrow{BC}$, så A, B og C ligger ikke på en rett linje.

Svar: Punktene ligger ikke på en rett linje.

b)
Punktet D er gitt ved $D(0,\ t)$.

Bestem eventuelle verdier av t slik at $\angle CDA = 90^\circ$.

Løsningsforslag b)

Vi starter med å regne ut vektorene $\overrightarrow{CD}$ og $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{CD} = \left[0-3, t-5\right] = \left[-3, t-5\right]$

$\overrightarrow{AD} = \left[0-1, t-1\right] = \left[-1, t-1\right]$

Skalarproduktet $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AD} = \left[-3, t-5\right] \cdot \left[-1, t-1\right] = \left(-3\right)\left(-1\right) + \left(t-5\right)\left(t-1\right)$
$= 3 + t^2 - 6t + 5 = t^2 - 6t + 8$

For å finne ut hvilke verdier av t som gjør at skalarproduktet er 0, løser vi

$t^2 - 6t + 8 = 0$

$t = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 2}{2} = 3 \pm 1$

$t_1 = 2 \quad t_2 = 4$

Svar: $t = 2$ og $t = 4$ gir $\angle\ CDA = 90^o$.

c)

Bestem eventuelle verdier av t slik at $ABCD$ blir et trapes.

Løsningsforslag c)

Vi trenger å ta for oss de tre mulighetene.

1) $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$: $\quad \overrightarrow{AB} = [4, 1]$, $\overrightarrow{DC} = [3, 5 - t]$

Hvis de to vektorene er parallelle

$\overrightarrow{AB} = s\overrightarrow{DC}$

$[4, 1] = s[3, 5 - t]$

$4 = 3s$ og $1 = s(5 - t)$

$s = \frac{4}{3}$ og $1 = \frac{4}{3}(5 - t)$

For å finne t løser vi

$1 = \frac{4}{3}(5 - t) \quad \Big| \cdot \left(\frac{3}{4}\right)$

$\frac{3}{4} = 5 - t$

$-\frac{3}{4} + 5 = t$

$t = 4,25$

2) $\overrightarrow{BD} \| \overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{BC} = \left[-2, 3\right]$, $\overrightarrow{AD} = \left[-1, t-1\right]$

Hvis de to vektorene er parallelle

$\overrightarrow{BC} = s\overrightarrow{AD}$

$[2, -3] = s[-1, t-1]$

$2 = -1 \cdot s$ og $-3 = s(t-1)$

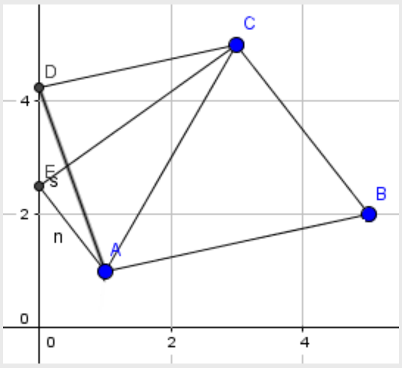
$s = -2$ og $-3 = -2(t-1)$

For å finne t løser vi
$-3 = -2(t-1) \quad | : -2$

$\frac{3}{2} = t - 1$

$1 + \frac{3}{2} = t$

$t = 2,5$



Svar: Verdiene $t = 4,25$ og $t = 2,5$ gjør at $\square ABCD$ blir et trapes (se figur over).

Oppgave 6 (4 poeng) Nettkode: E-4D8W

Elevene på Vg1 må velge fag for Vg2. Camilla vil ha realfag som sitt programområde og må derfor velge minst to realfag. Skolen tilbyr fem realfag og åtte fag fra andre programområder.

a)

Hvor mange fagkombinasjoner er mulig dersom hun skal ha to realfag og to andre fag?

Løsningsforslag a)

Vi starter med å finne hvor mange kombinasjoner av to realfag det finnes.
Her er det et uordnet utvalg (rekkefølgen spiller ingen rolle), uten tilbakelegging (vi kan ikke ta det samme realfaget to ganger). Altså bruker vi binomialkoeffisienten

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$$

For å finne hvor mange kombinasjoner av to andre fag det finnes, går bruker vi samme resonnement

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

For hvert par av realfag må vi telle alle mulige par av andre fag. Derfor må vi multiplisere disse svarene

$$10 \cdot 28 = 280$$

Svar: Dersom hun skal ha to realfag og to andre fag, er det 280 forskjellige mulige kombinasjoner der to fag er realfag og to fag er andre fag.

b)

Camilla skal velge fire fag. Hvor mange fagkombinasjoner er mulig dersom minst to av fagene skal være realfag?

Løsningsforslag b)

2) Tre realfag og ett annet fag

Vi vil finne hvor mange tripler (r_1, r_2, r_3) av realfag det finnes. Som i a), er dette uordnet utvalg uten tilbakelegging

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$$

For hver trippel av realfag skal vi velge ett annet fag, og siden vi har 8 muligheter blir antall kombinasjoner

$$10 \cdot 8 = 80$$

3) Fire realfag

Til slutt må vi finne ut hvor mange kombinasjoner det finne der vi velger fire realfag. Igjen er det uordnet utvalg uten tilbakelegging, og vi bruker binomialkoeffisienten

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{5}{1} = 5$$

Altså har vi 5 kombinasjoner der vi velger fire realfag.

Til sammen blir antall kombinasjoner der minst to av fagene skal være realfag

$$280 + 80 + 5 = 365$$

Svar: Antall kombinasjoner der minst to av fagene skal være realfag er 365.

Oppgave 7 (5 poeng) Nettkode: E-4D90

En funksjon f er gitt på formen

$$f(x) = x^2 + px + q$$

Vi kan finne eventuelle nullpunkt til f ved hjelp av en geometrisk konstruksjon. Framgangsmåten er gitt i boksen nedenfor.

1) Sett av punktene $A(0,1)$ og $B(-p,q)$ i et koordinatsystem.

2) Konstruer sirkelen som har AB som diameter.

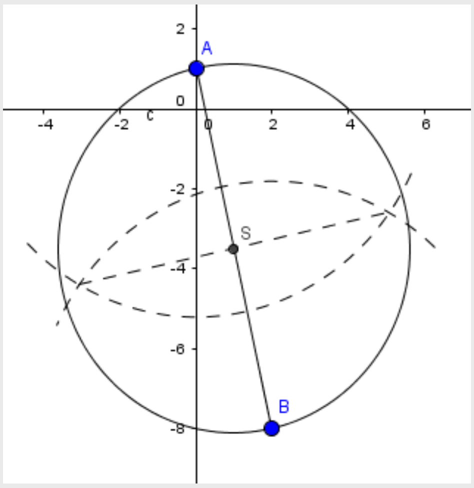
3) Skjæringspunktene mellom sirkelen og x-aksen er nullpunktene til f.

a)
Bruk framgangsmåten til å konstruere sirkelen når

$$f(x) = x^2 - 2x - 8$$

Hva er nullpunktene til f , ifølge konstruksjonen?

Løsningsforslag a)



Vi ser at sirkelen krysser x-aksen i $x = -2$ og $x = 4$.

Svar: Nullpunktene til f, ifølge konstruksjonen er $x = -2$ og $x = 4$.

b)
Vi vil nå se på det generelle tilfellet

$f(x) = x^2 + px + q$

Vis at sentrum S og radien r til sirkelen er gitt ved

$S\left(-\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$ og $r = \sqrt{\frac{p^2+(q-1)^2}{4}}$

Løsningsforslag b)

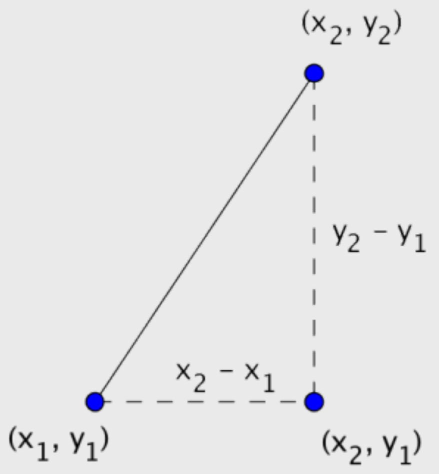
Midtpunktet på et linjestykke ligger midt mellom x-verdiene til punktene, og y-verdiene til punktene (midt mellom to tall a og b, er det samme som gjennomsnittet $\frac{a+b}{2}$).

$$S = \left(\frac{0+(-p)}{2}, \frac{1+q}{2}\right) = \left(-\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$$

Avstanden mellom to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er gitt ved

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

som vi får ved å tegne opp trekanten med hjørner i (x_1, y_1), (x_2, y_1) og (x_2, y_2) og bruke Pytagoras.



Siden radiusen er avstanden mellom A og S (eller S og B, svaret blir det samme),

$$r = \sqrt{\left(-\frac{p}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{q+1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{(q-1)^2}{4}} = \sqrt{\frac{p^2+(q-1)^2}{4}}$$

c)
Bestem likningen for sirkelen uttrykt ved p og q . Vis at sirkelen skjærer x-aksen i nullpunktene til funksjonen f .

Løsningsforslag c)

En sirkel med sentrum i $S(x_0, y_0)$ og radius r har likningen
$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = r^2$, og $S\left(-\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$og $r = \sqrt{\frac{p^2+\left(q-1\right)^2}{4}}$.

Derfor får vi likningen

$$\left(x - \left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(\frac{q+1}{2}\right)\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{p^2+\left(q-1\right)^2}{4}}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \frac{p^2+\left(q-1\right)^2}{4}$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} + y^2 - \left(q + 1\right)y + \frac{(q+1)^2}{4} = \frac{p^2+\left(q-1\right)^2}{4}$$

$$x^2 + y^2 + px - \left(q + 1\right)y + \frac{p^2}{4} + \frac{(q+1)^2}{4} - \frac{p^2}{4} - \frac{(q-1)^2}{4} = 0$$

$$x^2 + y^2 + px - \left(q + 1\right)y + \frac{(q+1)^2-(q-1)^2}{4} = 0$$

$$x^2 + y^2 + px - \left(q + 1\right)y + \frac{4q}{4} = 0$$

$$x^2 + y^2 + px - \left(q + 1\right)y + q = 0$$

Sirkelen skjærer x-aksen akkurat de stedene hvor $y = 0$. Setter vi dette inn i likningen vi fant over, får vi likningen

$$x^2 + px + q = 0$$

Dette er jo likningen for nullpunktene til f, så derfor skjærer sirkelen x-aksen i nullpunktene til funksjonen f.

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng) Nettkode: E-4D94

Vi har to bunker med kort. I bunke A er det 5 røde og 3 svarte kort. I bunke B er det 3 røde og 4 svarte kort.

Vi velger tilfeldig én av bunkene og trekker tilfeldig 2 kort fra denne bunken. Vi definerer følgende hendelser:

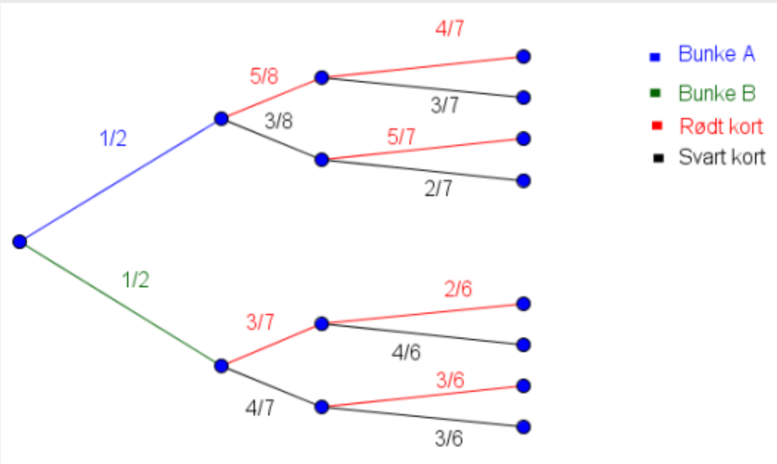
F: Vi velger bunke A

R: Vi trekker 2 røde kort

a)

Bestem $P(F)$, $P(\overline{F})$, $P(R|F)$ og $P\left(R|\overline{F}\right)$.

Løsningsforslag a)



Her er valgtreet markert med farger, slik at du lettere skal se hvilen gren av treet som viser hvilket valg som blir tatt. Først velger vi bunken. Det er like stor sjanse for å trekke bunke A som bunke B. Når vi så har valgt dette, trekker vi det første kortet (sannsynlighetene er oppgitt), som kan være rødt eller svart. For å regne ut sannsynligheten for hver av endene i treet (altså en hendelse), ganger vi sammen sannsynlighetene til hver gren som fører oss til denne enden.

1. $P(F) = P(\text{Vi velger bunke A}) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

2. $P\left(\overline{F}\right) = P(\text{Vi velger ikke bunke A}) = P(\text{Vi velger bunke B}) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

3. $P(R|F) = P(\text{2 røde, gitt bunke A}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

4. $P\left(R|\overline{F}\right) = P(\text{2 røde, gitt ikke bunke A}) = P(\text{2 røde, gitt bunke B}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$

Svar: $P(F) = \frac{1}{2} = 0{,}5$, $P\left(\overline{F}\right) = \frac{1}{2} = 0{,}5$, $P(R|F) = \frac{5}{14}$ og $P\left(R|\overline{F}\right) = \frac{1}{7}$

b)
Bestem $P(R)$.

Løsningsforslag b)

Den enkleste løsningen er å se at hendelsen R er unionen av de to hendelsene Blå-Rød-Rød og Grønn-Rød-Rød, som vist på valgtreet over. Husk at sannsynligheten for en hendelse i et valgtre finnes ved å multiplisere sannsynlighetene til valgene hendelsen består av.

$$P(\text{Blå-Rød-Rød}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{1\cdot5\cdot4}{2\cdot8\cdot7} = \frac{5\cdot4}{2\cdot2\cdot4\cdot7} = \frac{5}{2\cdot2\cdot7} = \frac{5}{28}$$

$$P(\text{Grønn-Rød-Rød}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1\cdot3\cdot2}{2\cdot7\cdot6} = \frac{1\cdot6}{2\cdot7\cdot6} = \frac{1}{2\cdot7} = \frac{1}{14}$$

Siden $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$, når $A\cap B = \emptyset$ (som er tilfellet når vi har to disjunkte hendelser), får vi

$$\text{P(R)=P(Blå-Rød-Rød)+P(Grønn-Rød-Rød)} = \frac{5}{28} + \frac{1}{14} = \frac{5}{28} + \frac{2}{28} = \frac{7}{28} = \frac{7}{7\cdot4} = \frac{1}{4}$$

Svar: $P(R) = \frac{1}{4}$.

c)
Bruk Bayes' setning til å bestemme $P(F|R)$.

Løsningsforslag c)

Bayes' setning gir oss at $\text{P}(\text{F}|\text{R}) = \frac{\text{P}(\text{R}|\text{F})\cdot\text{P}(\text{F})}{\text{P}(\text{R})}$. Vi vet at $P(R) = \frac{1}{4}$ og $\text{P}(\text{R}|\text{F})$ og $\text{P}(\text{F})$ fant vi i deloppgave a), så vi trenger å regne ut $\text{P}(\text{F}|\text{R})$.

$$\text{P}(\text{F}|\text{R}) = \frac{\text{P}(\text{R}|\text{F})\cdot\text{P}(\text{F})}{\text{P}(\text{R})} = \frac{\frac{5}{14}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

Svar: $\text{P}(\text{F}|\text{R}) = \frac{5}{7}$

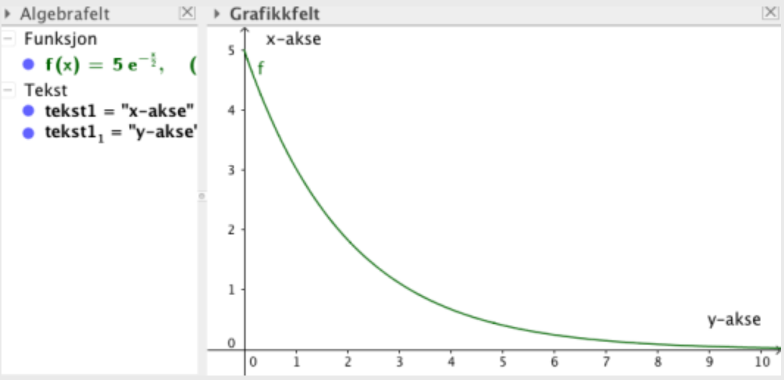
Oppgave 2 (6 poeng) Nettkode: E-4D98

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 5e^{-\frac{x}{2}} \quad , \quad x \geq 0$$

a)
Bruk graftegner til å tegne grafen til f.

Løsningsforslag a)



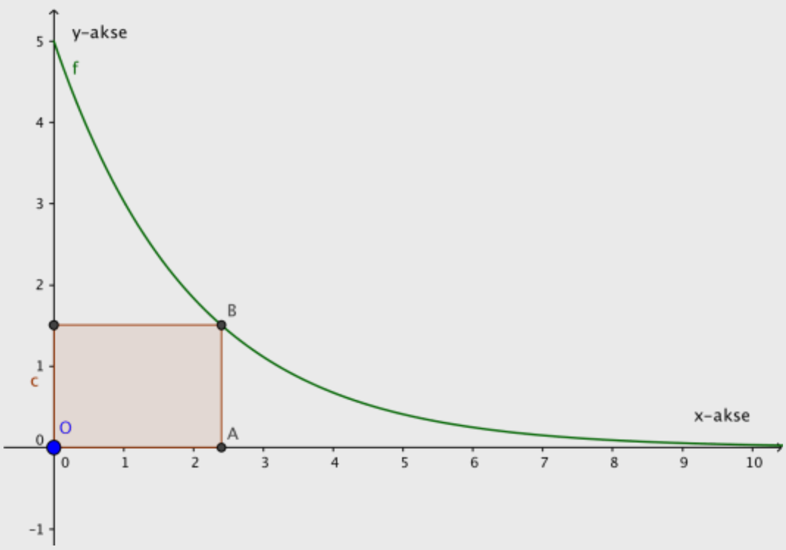
b)
Rektangelet $OABC$ er gitt ved punktene $O(0,\ 0)$, $A(x,\ 0)$, $B(x, f(x))$ og $C(0, f(x))$.

Forklar at arealet til rektangelet er gitt ved

$$T(x) = 5xe^{-\frac{x}{2}}$$

Løsningsforslag b)

Først tegner vi opp en figur som viser situasjonen



Her brukte vi en 'glider'-knapp, slik at vi kan variere hvor punktene er.

Vi ser at lengden av rektangelet er lengden $OA = x - 0 = x$ og høyden er $OC = f(x) - 0 = f(x)$. Derfor får vi arealet

$$T\left(x\right) = x \cdot f\left(x\right) = x \cdot 5e^{-\frac{x}{2}} = 5xe^{-\frac{x}{2}}$$

c)

Bestem det største arealet rektangelet kan få. Bestem den tilhørende verdien for x.

Løsningsforslag c)

Vi skal finne toppunktet til $T(x)$, så vi starter med å derivere funksjonen.

$$T'\left(x\right) = \left(5xe^{-\frac{x}{2}}\right)'$$

Vi ser at $T(x)$ er produktet av to funksjoner $u = 5x$ og $v = e^{-\frac{x}{2}}$. Derfor må vi bruke produktregelen

$$(uv)'\left(x\right) = u'v + uv'$$

$u' = (5x)' = 5$, men neste utfordring er å regne ut $v' = \left(e^{-\frac{x}{2}}\right)'$. Her kan vi bruke kjerneregelen, men vi kan også bruke regelen $\left(e^{kx}\right)' = ke^{kx}$. Så

$$\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

Setter vi alt dette sammen får vi nå

$$\begin{aligned} T'\left(x\right) &= \left(5xe^{-\frac{x}{2}}\right)' \\ &= (uv)'\left(x\right) = u'v + uv' \\ &= 5e^{-\frac{x}{2}} + 5x\left(-\tfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right) \\ &= 5\left(1 - \tfrac{1}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} \\ &= \tfrac{5}{2}\left(2 - x\right)e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

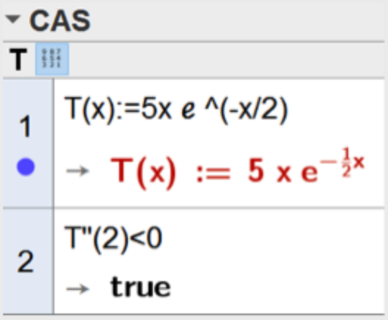
For å finne toppunktet til $T(x)$ må vi løse likningen $T'\left(x\right) = 0$.

$$\frac{5}{2}\left(2 - x\right)e^{-\frac{x}{2}} = 0$$

Altså vi har at produktet av faktorene $\frac{5}{2}$, $(2-x)$ og $e^{-\frac{x}{2}}$ skal være lik 0. Men det må bety at en av faktorene må være lik 0.

1. $\frac{5}{2} = 0$ Stemmer ikke
2. $(2-x) = 0$ gir $x = 2$ OK
3. $e^{-\frac{x}{2}} = 0$ Stemmer ikke fordi $e^x > 0$ for alle x

Det eneste ekstremalpunktet til $T(x)$ er når $x = 2$. Vi må vise at $T''(2)<0$ for at dette er et toppunkt og ikke bunnpunkt eller terrassepunkt.



Det største arealet rektangelet kan ha er

$$T\left(2\right) = 5 \cdot 2 \cdot e^{-\frac{2}{2}} = 10e^{-1} = \frac{10}{e} \approx 3,68$$

Svar: Det største arealet rektangelet kan ha er

$$T\left(2\right) = 5 \cdot 2 \cdot e^{-\frac{2}{2}} = 10e^{-1} = \frac{10}{e} \approx 3,68$$

med tilhørende $x = 2$.

Oppgave 3 (8 poeng) Nettkode: E-4D9D

Gitt tre punkt $A\,(1,\,3)$, $B\,(4,\,0)$ og $C\,(5,\,5)$.

a)

Bestem en parameterframstilling for linjen l gjennom B og C.

Løsningsforslag a)

Linjen ℓ går igjennom punktene $B\,(4{,}0)$ og $C\,(5{,}5)$. Hvis vi regner ut at $\overrightarrow{BC} = \left[5-4, 5-0\right] = \left[1, 5\right]$ kan vi si om linja at den går igjennom $B\,(4{,}0)$ og er parallell med vektoren $\vec{v} = \overrightarrow{BC} = \left[1, 5\right]$, og fra formelen over vet vi nå at linja har en parameterframstilling

$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + at = 4 + 1 \cdot t = 4 + t \\ y = y_0 + bt = 0 + 5t = 5t \end{cases}$$

Svar: Linjen ℓ har en parameterframstilling

$$\ell : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5t \end{cases}$$

b)

Et punkt P ligger på linjen l. Forklar at vi kan skrive $\overrightarrow{AP} = [3 + t,\, -3 + 5t]$ for en $t \in \mathbb{R}$.

Løsningsforslag b)

Siden P kan skrives $P(4 + t, 5t)$, får vi

$$\vec{\mathrm{AP}} = \left[4 + t - 1, 5t - 3\right] = \left[3 + t, -3 + 5t\right]$$

Svar: $\vec{\mathrm{AP}} = \left[3 + t, -3 + 5t\right]$

c)

Bruk blant annet skalarprodukt til å finne koordinatene til P slik at $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP}$.

Løsningsforslag c)

$\vec{AB} \perp \vec{AP}$ betyr at

$$\vec{AB} \cdot \vec{AP} = 0$$

Før vi løser denne likningen trenger vi $\vec{AB} = \left[4 - 1, 0 - 3\right] = \left[3, -3\right]$,

$$\vec{AB} \cdot \vec{AP} = 0$$
$$[3, -3] \cdot [3 + t, -3 + 5t] = 0$$
$$3(3 + t) + (-3)(-3 + 5t) = 0$$
$$9 + 3t + 9 - 15t = 0$$
$$18 - 12t = 0$$
$$\frac{18}{12} = \frac{12t}{12}$$
$$t = \frac{18}{12} = \frac{6 \cdot 3}{6 \cdot 2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Hvis $t = 1,5$, får vi at $P = (4 + t, 5t) = (5.5, 7.5)$.

Svar: P= $\underline{\underline{(5.5, 7.5)}}$

d)

Bruk CAS til å bestemme hvilke koordinater P kan ha når $\angle BAP = 45^\circ$.

Løsningsforslag d)

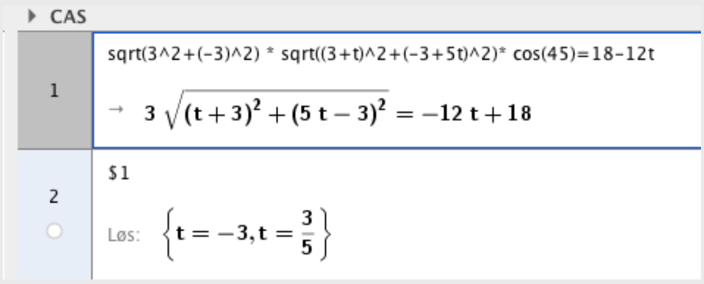
Våre to vektorer er $\overrightarrow{AB} = \left[3, -3\right]$ og $\overrightarrow{AP} = \left[3 + t, -3 + 5t\right]$, og vinkelen er $\angle BAP = 45^\circ$. Likningen vi får er

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AP}\right|\cos 45^\circ = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$$

$$|[3, -3]||[3 + t, -3 + 5t]|\cos 45^\circ = [3, -3] \cdot [3 + t, -3 + 5t]$$ Dette er en likning vi kan

$$\sqrt{3^2 + \left(-3\right)^2} \cdot \sqrt{(3 + t)^2 + (-3 + 5t)^2} \cdot \cos 45^\circ = 18 - 12t$$

legge inn i CAS.



1. $t = -3$ gir at $P = (4 + t, 5t) = (4 - 3, 5 \cdot (-3)) = (1, -15)$

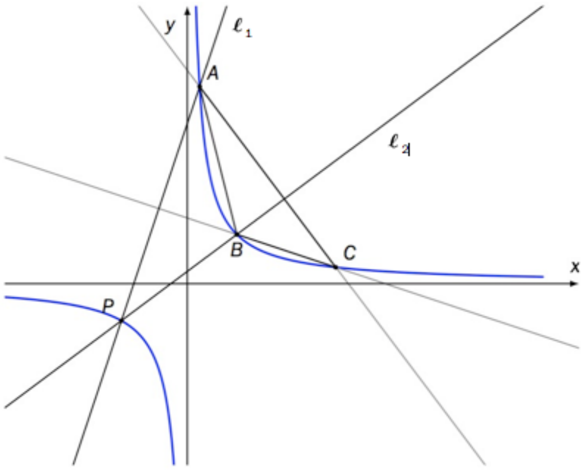
2. $t = \frac{3}{5}$ gir at $P = \left(4 + t, 5t\right) = \left(4 + \frac{3}{5}, 5 \cdot \frac{3}{5}\right) = \left(4.6, 3\right) = \left(\frac{23}{5}, 3\right)$

Svar: P kan ha koordinatene $(1, -15)$ eller $\left(\frac{23}{5}, 3\right)$ når $\angle BAP = 45^\circ$.

Oppgave 4 (4 poeng) Nettkode: E-4D9K

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

ΔABC har hjørnene $A(r, f(r))$, $B(s, f(s))$ og $C(t, f(t))$ på grafen til f, der r, s, $t \in \mathbb{R}$ er tre parametere.



a)
Vis at linjen l_1 gjennom A som står normalt på linjen gjennom B og C, er gitt ved

$y = st(x - r) + \frac{1}{r}$

Løsningsforslag a)

Linja vi skal finne heter ℓ_1, med funksjonsuttrykk

$$y = ax + b$$

og vi kaller linja gjennom B og C for ℓ_3, med funksjonsuttrykk

$$y = cx + d$$

Siden $\ell_1 \perp \ell_3$, vet vi at $a = -\frac{1}{c}$

Linja ℓ_3 går igjennom $B(s, f(s))$ og $C(t, f(t))$ og har derfor stigningstall

$$\begin{aligned} c &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{s}}{t - s} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right)st}{(t-s)st} = \frac{s-t}{(t-s)st} \\ &= -\frac{t-s}{(t-s)st} = -\frac{1}{st} \end{aligned}$$

Derfor kan vi finne a

$$a = -\frac{1}{c} = -\frac{1 \cdot st}{-\frac{1}{st} \cdot st} = -\frac{st}{-1} = st$$

Vi vet nå at ℓ_1 kan uttrykkes $y = stx + b$, og vi vet at linja går igjennom $A\left(r, f\left(r\right)\right) = A\left(r, \frac{1}{r}\right)$. Vi bruker ettpunktsformelen

$$\begin{aligned} y - y_0 &= a(x - x_0) \\ y - \tfrac{1}{r} &= st\left(x - r\right) \\ y &= st\left(x - r\right) + \tfrac{1}{r} \end{aligned}$$

Og vi har vist det vi skulle!

b)

På samme måte kan vi vise at linjen l_2 gjennom B som står normalt på linjen gjennom A og C, er gitt ved

$y = rt\left(x - s\right) + \frac{1}{s}$

Linjene l_1 og l_2 skjærer hverandre i et punkt P. Bruk CAS til å vise at P alltid vil ligge på grafen til f.

Løsningsforslag b)

Vi starter med å legge inn de to likningene inn i CAS, og løse med hensyn på x og y (dette er våre variabler).

Vi taster inn: **Løs[{y=s*t*(x-r)+1/r, y=r*t*(x-s)+1/s },{x,y}]**

Løs[{y=s*t*(x-r)+1/r, y=r*t*(x-s)+1/s} , {x,y}]

$\rightarrow \left\{\left\{x = -\frac{1}{r\,s\,t}, y = -r\,s\,t\right\}\right\}$

Til slutt sjekker vi om punktet $P\left(-\frac{1}{rst}, -rst\right)$ ligger på f

$$x_0 \cdot y_0 = -\frac{1}{rst} \cdot \left(-rst\right) = 1$$

Som stemmer!