www.matematikk.org

Eksamensoppgavesettet er utarbeidet av Utdanningsdirektoratet. Avvik fra det originale eksamenssettet er eventuelle spesifiseringer og illustrasjoner. Løsningsforslagene i sin helhet er utarbeidet av matematikk.org.

Nettkoden som står til høyre for oppgavetittelen brukes i søkefeltet på www.matematikk.org for å åpne oppgaven og se utfyllende løsningsforslag.

Våre samarbeidspartnere:

AkerBP PGS

REA3022 2015 Høst

Eksamenstid:
5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 3 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Del 1 har 9 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
- vurderer om svar er rimelige

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.:

- Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng) Nettkode: E-4D51

Deriver funksjonene

a)

$f(x) = 3x^2 + 5x - 2$

Løsningsforslag a)

$$f'(x) = (3x^2 + 5x - 2)' = 3 \cdot 2x + 5 \cdot 1 + 0 = 6x + 5$$

Svar:

$$\underline{\underline{f'(x) = 6x + 5}}$$

b)

$g(x) = 3 \cdot (x^2 - 2)^4$

Løsningsforslag b)

Siden vi vet hvordan vi kan derivere $u(x) = x^2 - 2$ og $g(u) = 3u^4$, $(x^2 - 2)' = 2x$ og $(3u^4)' = 3 \cdot 4u^3 = 12u^3$, begynner vi med å skrive

$$g(x) = 3 \cdot (x^2 - 2)^4 = 3(u(x))^4 = g(u(x))$$

Ved å benytte kjerneregelen for derivasjon, som sier at

$$g(u(x)))' = u'(x)g'(u)$$

finner vi da at

$$g'(x) = u'(x)g'(u) = (x^2 - 2)'(3u^4)' = 2x \cdot (12u^3) = 2x \cdot 12(x^2 - 2)^3 = 24x(x^2 - 2)^3$$

Svar:

$$\underline{\underline{g'(x) = 24x(x^2 - 2)^3}}$$

c)

$h(x) = x \cdot \ln\left(x^2 + 3\right)$

Løsningsforslag c)

Vi setter $u = x$ og $v = \ln\left(x^2 + 3\right)$, da blir

$$h'(x) = \left(x \cdot \ln\left(x^2 + 3\right)\right)' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$
$$= (x)' \cdot \ln\left(x^2 + 3\right) + x \cdot \left(\ln\left(x^2 + 3\right)\right)' = \ln\left(x^2 + 3\right) + x \cdot \left(\ln\left(x^2 + 3\right)\right)'$$

Det gjenstår å regne ut $\left(\ln\left(x^2 + 3\right)\right)'$. Hvis vi setter $u(x) = x^2 + 3$ og bruker kjerneregelen, så blir utrykket

$$\left(\ln\left(u\left(x\right)\right)\right)' = u'\left(x\right)\frac{1}{u(x)} = \left(x^2 + 3\right)'\frac{1}{x^2 + 3} = \frac{2x}{x^2 + 3}$$

Når vi vet dette får vi

$$h'(x) = \ln\left(x^2 + 3\right) + x \cdot \left(\ln\left(x^2 + 3\right)\right)'$$
$$= \ln\left(x^2 + 3\right) + x \cdot \frac{2x}{x^2+3}$$
$$= \ln\left(x^2 + 3\right) + \frac{2x^2}{x^2+3}$$

Svar: $h'\left(x\right) = \ln\left(x^2 + 3\right) + \frac{2x^2}{x^2+3}$

Oppgave 2 (3 poeng) Nettkode: E-4D55

Funksjonen f er gitt ved

$f(x) = x \cdot e^{-x}$, $D_f = \mathbb{R}$

Tegn fortegnslinjen til $f'(x)$.

Løsningsforslag

Vi ser at f er produktet av to funksjoner, x og e^{-x}, så vi bruker produktregelen med $u = x$ og $v = e^{-x}$.

$$f'(x) = \left(xe^{-x}\right)' = \left(u \cdot v\right)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$
$$= \left(x\right)' \cdot e^{-x} + x \cdot \left(e^{-x}\right)' = e^{-x} + x \cdot \left(e^{-x}\right)'$$

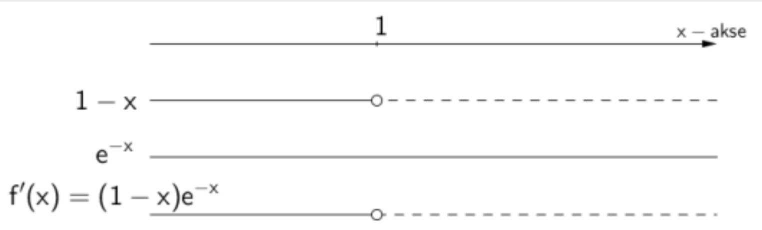
For å regne ut $\left(e^{-x}\right)'$, kan vi bruke kjerneregelen, men vi kan også bruke regelen $\left(e^{kx}\right)' = ke^{kx}$. Så

$$\left(e^{-x}\right)' = \left(e^{-1 \cdot x}\right)' = -1 \cdot e^{-1 \cdot x} = -e^{-x}$$

Setter vi alt dette sammen får vi nå

$$f'(x) = e^{-x} + x \cdot \left(e^{-x}\right)' = e^{-x} + x \cdot \left(-e^{-x}\right)$$
$$= e^{-x} - xe^{-x} = \left(1 - x\right)e^{-x}$$

Merk at e^{-x} er positiv for alle verdier av x.



Oppgave 3 (5 poeng) Nettkode: E-4D57

Funksjonen f er gitt ved

$f(x) = x^3 - 2x^2 - kx + 6 \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$

a)
Bestem k slik at divisjonen $f(x) : (x-1)$ går opp.

Løsningsforslag a)

At divisjonen $f(x) : (x-1)$ går opp, betyr at $f(1) = 0$.

$$
\begin{gathered}
f(1) = 0 \\
1^3 - 2 \cdot 1^2 - k \cdot 1 + 6 = 0 \\
5 - k = 0 \\
k = 5
\end{gathered}
$$

Svar: Hvis divisjonen $f(x) : (x-1)$ går opp, er $k = 5$.

b)
I resten av oppgaven bruker vi denne k-verdien.

Faktoriser $f(x)$ i lineære faktorer.

Løsningsforslag b)

Vi starter med å dele f på $(x-1)$.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x-1) = x^2 - x - 6 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad -x^2 - 5x + 6 \\
\quad \underline{-(-x^2 + x)} \\
\quad\quad -6x + 6 \\
\quad\quad \underline{-(-6x + 6)} \\
\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Å faktorisere $x^2 - x - 6$ gjør vi, ved å finne nullpunktene

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-\left(-1\right)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm5}{2}$$

$$x_1=\frac{1+5}{2}=3 \quad \text{og} \quad x_2=\frac{1-5}{2}=-2$$

Derfor er $x^2-x-6=\left(x-3\right)\left(x+2\right)$, og f kan faktoriseres

$$f(x)=(x+2)(x-1)(x-3)$$

Svar:

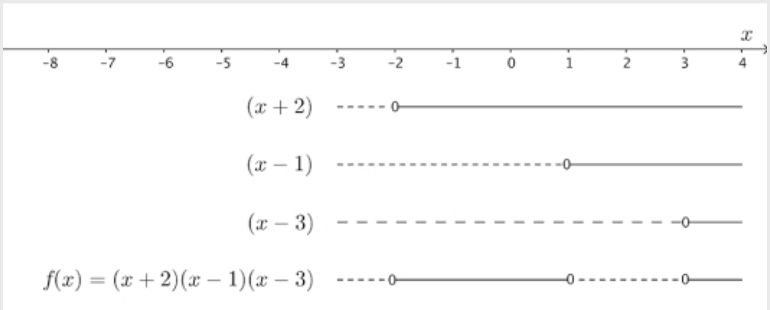
$f(x)=(x+2)(x-1)(x-3)$

c)

Løs ulikheten $f\left(x\right)\geq 0$.

Løsningsforslag c)

Fortegnsskjemaet til f ser slik ut:



Vi ser at f er større eller lik 0 i intervallet $\left[-2,1\right]\cup\left[3,\rightarrow\right\rangle$, så vi har løsningen;

Svar: $L=[-2,1]\cup[3,\rightarrow)$

Oppgave 4 (2 poeng) Nettkode: E-4D5B

Skriv så enkelt som mulig

$\lg\left(a^2 \cdot b^3\right) + \lg\left(\frac{1}{b^2}\right) - \lg\left(\frac{b}{a}\right)$

Løsningsforslag

Vi kan ta for oss de tre leddene $\lg\left(a^2 \cdot b^3\right)$, $\lg\left(\frac{1}{b^2}\right)$ og $\lg\left(\frac{b}{a}\right)$ hver for seg

* $\lg\left(a^2 \cdot b^3\right) = \lg a^2 + \lg b^3 = 2\lg a + 3\lg b \qquad (2) + (1)$

* $\lg\left(\frac{1}{b^2}\right) = \lg 1 - \lg b^2 = 0 - 2\lg b = -2\lg b \qquad (3) + (1)$

* $\lg\left(\frac{b}{a}\right) = \lg\ b - \lg\ a \qquad (3)$

Tallene i parentes på enden forteller hvilken logaritmeregel vi brukte.

Til slutt setter vi alt sammen

$$\begin{aligned} &\lg\left(a^2 \cdot b^3\right) + \lg\left(\frac{1}{b^2}\right) - \lg\left(\frac{b}{a}\right) \\ &= (2\lg a + 3\lg b) + (-2\lg b) - (\lg b - \lg a) \\ &= 2\lg a + 3\lg b - 2\lg b - \lg b + \lg a \\ &= 3\lg a \end{aligned}$$

Svar: $3\lg a$

Oppgave 5 (7 poeng) Nettkode: E-4D5D

Funksjonen f er gitt ved

$f(x) = -x^4 + 4x^3 \quad , \quad x \in \langle -2, 4 \rangle$

a)
Bestem eventuelle nullpunkter til f.

Løsningsforslag a)

$$f(x) = -x^4 + 4x^3 = x^3(-x+4)$$

Derfor blir likningen for nullpunktene til f

$f(x) = 0$

$x^3(-x+4) = 0$

$x^3 = 0 \text{ og } -x+4 = 0$

$x = 0 \text{ og } x = 4$

Siden 4 ikke ligger i definisjonsområdet, $\langle -2, 4 \rangle$, er det eneste nullpunktet til f der $x = 0$

Svar: f har ett nullpunkt, $x = 0$

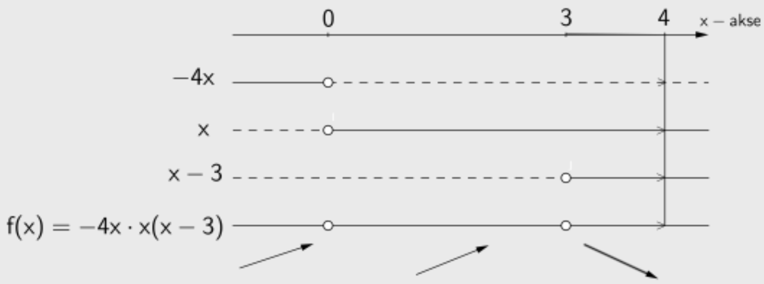
b)
Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

Løsningsforslag b)

Vi starter med å derivere f

$$f'(x) = \left(-x^4 + 4x^3\right)' = -4x^3 + 4 \cdot 3x^2 = -4x^3 + 12x^2 = -4x \cdot x(x-3)$$

Vi tegner opp fortegnsskjemaet til f'



Vi ser at f vokser fram til $x = 0$, der har f et terrassepunkt. Videre stiger f til $x = 3$, hvor f har et toppunkt, hvorpå f synker.

Svar: f har toppunktet $(3, 27)$ og ingen bunnpunkter.

c)

Bestem eventuelle vendepunkter på grafen til f.

Løsningsforslag c)

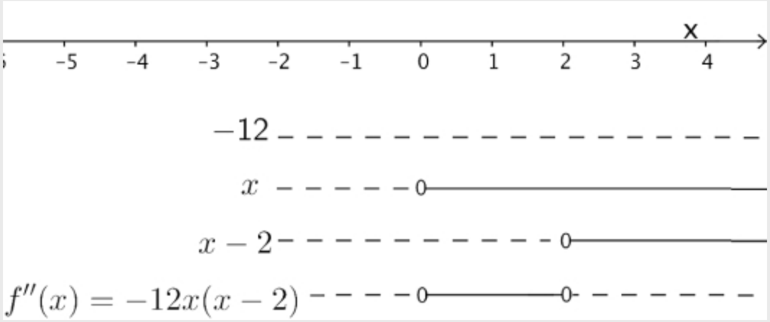
Vi vil løse likningen $f''(x) = 0$, så først må vi regne ut f''

$$f''(x) = (f'(x))'$$
$$= \left(-4x^3 + 12x^2\right)' = -4 \cdot 3x^2 + 12 \cdot 2x$$
$$= -12x^2 + 24x = -12x(x-2)$$

Vi kan nå løse likningen

$$\begin{aligned}
&f''(x) = 0 \\
&-12x(x-2) = 0 \\
&-12x = 0 \text{ eller } x - 2 = 0 \\
&x = 0 \text{ eller } x = 2
\end{aligned}$$

Når den annenderiverte er positiv, er funksjonen konveks. Når den annenderiverte er negativ, er den konkav. I vendepunktene skifter den fortegn. For å vite når funksjonen er konkav eller konveks, tegner vi et fortegnsskjema til f'':



Svar: f har følgende vendepunkter

1. Konkav-konveks: $(0, f(0)) = (0, 0)$

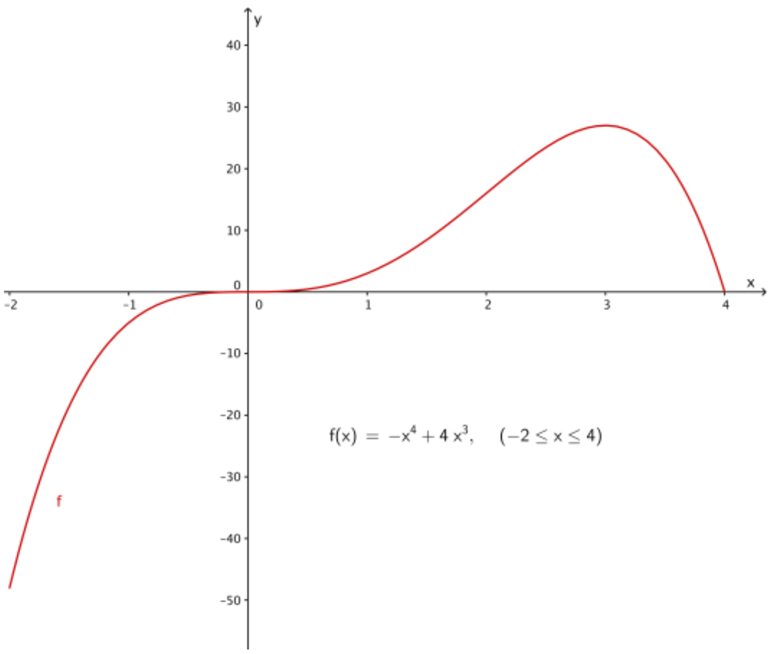
2. Konveks-konkav: $(2, f(2)) = (2, 16)$

d)

Lag en skisse av grafen til f.

Løsningsforslag d)

Svar:



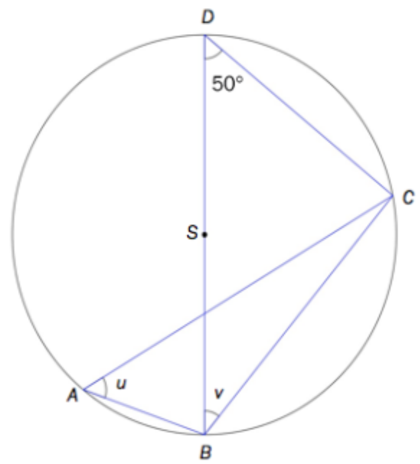
Oppgave 6 (3 poeng) Nettkode: E-4D5J

Skissen viser en sirkel med sentrum i S. Punktene A, B, C og D ligger på sirkelen.

BD er en diameter.

Vi setter $\angle BDC = 50^\circ$, $\angle BAC = u$ og $\angle CBD = v$.

Bruk et geometrisk resonnement til å bestemme størrelsen på vinklene u og v.



Løsningsforslag

$u = \angle BAC$ utspenner sirkelbuen mellom B og C, og det samme gjør $\angle BDC$=50°. Av periferivinkler må disse være like store

$$u = \angle \text{BAC} = \angle \text{BDC} = 50^\circ$$

Merk at $v + \angle BDC + \angle BCD$=$180^\circ$ (vinkelsummen i en trekant er 180°). Så vi får at $v = 180^\circ - 50^\circ - \angle$BCD.

Videre har vi at sentralvinkelen til $\angle BCD$, er vinkelen $\angle BSD$=180°. Siden periferivinkelen er havlparten så stor som sentralvinkelen, konkluderer vi med at $\angle BCD$ =90°. Derfor får vi

$$v = 180^\circ - 50^\circ - \angle \text{BCD} = 180^\circ - 50^\circ - 90^\circ = 40^\circ$$

Svar: $u = 50^\circ$ og $v = 40^\circ$

Oppgave 7 (4 poeng) Nettkode: E-4D5L

På en skole er 60 % av elevene jenter. 70 % av jentene og 55 % av guttene har blå øyne. Vi trekker ut en tilfeldig valgt elev ved skolen.

a)
Bestem sannsynligheten for at eleven har blå øyne.

Løsningsforslag a)

Loven om total sannsynlighet gir

$$P(B) = P(J) \cdot P(B|J) + P(\bar{J}) \cdot P(B|\bar{J})$$

$$= 0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}55 = 0{,}42 + 0{,}22 = 0{,}64$$

ALTERNATIV LØSNING

Svar: Sannsynligheten for at eleven har blå øyne er $0,64 = 64\%$.

b)
Eleven som er trukket ut, har ikke blå øyne. Bestem sannsynligheten for at eleven er en gutt.

Løsningsforslag b)

For å regne ut $P(\bar{J}|\bar{B})$, bruker vi Bayes' setning:

$$P(\bar{J}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{J}) \cdot P(\bar{B}|\bar{J})}{P(\bar{B})}$$

$$= \frac{0{,}4 \cdot (1-0{,}55)}{1-0{,}64} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}45}{0{,}36} = 0{,}4 \cdot \frac{5}{4} = 0{,}5$$

$$\mathrm{P}(\bar{\mathrm{B}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{B}) = 1 - 0,64 = 0,36$$

ALTERNATIV LØSNING

Svar: $\mathrm{P}(\bar{J}|\bar{\mathrm{B}}) = 0{,}5$

Oppgave 8 (5 poeng) Nettkode: E-4D5O

a)

Konstruer en ΔABC slik at $AB = 10{,}0$ cm, $BC = 7{,}0$ cm og $AC = 11{,}0$ cm.

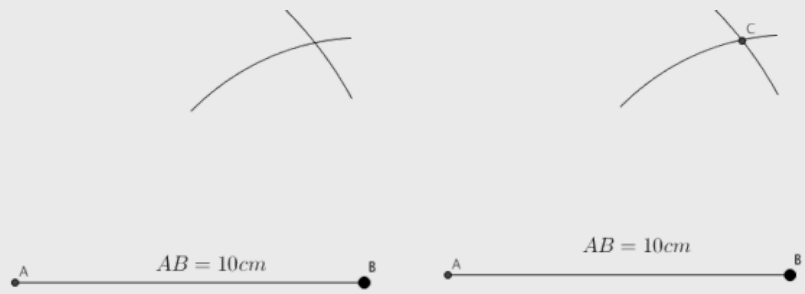
Løsningsforslag a)

Framgangsmåte

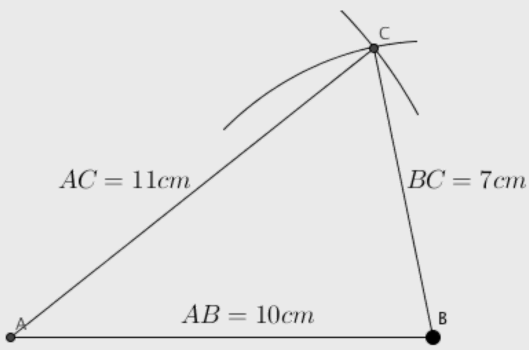
1. Tegn en linje, og marker punktet A, og mål 10 cm og marker B
2. Mål opp 7 cm på passeren, og sett passerspissen i B og marker en sirkelbue omtrent der C skal være.
3. Mål opp 11 cm på passeren, og sett passerspissen i A og marker en sirkelbue omtrent der C skal være.
4. Punktet der de to sirkelbuene skjærer hverandre markerer vi som C
5. Trekk linjestykkene BC og AC

1. og 2.

3. og 4.



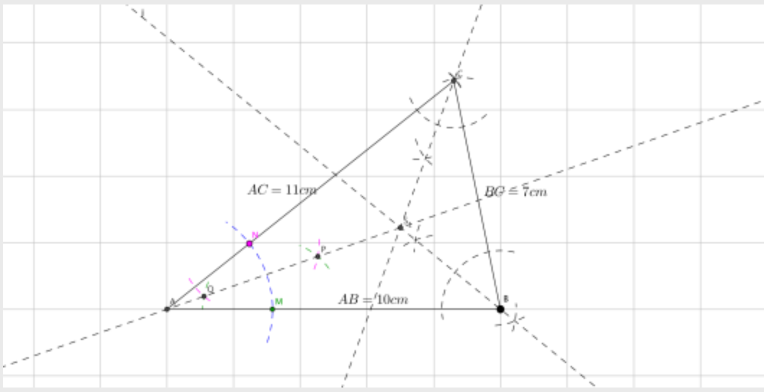
5.



b)
En skjæringssetning sier at halveringslinjene til de tre vinklene i trekanten skjærer hverandre i ett punkt.

Demonstrer denne setningen ved å konstruere halveringslinjene til vinklene i ΔABC.

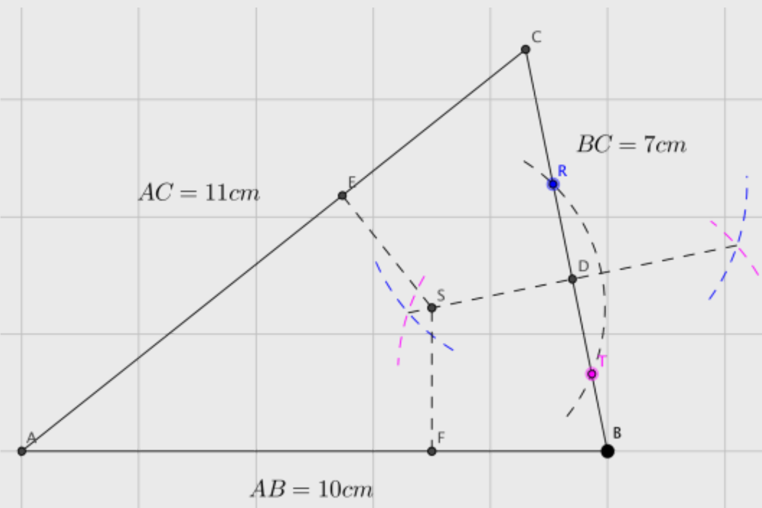
Løsningsforslag b)



c)
Halveringslinjene skjærer hverandre i punktet S.

Konstruer normalene fra S ned på hver av sidekantene i ΔABC. Fotpunktene til normalene kaller vi D, E og F.

Løsningsforslag c)



d)

Forklar at $SD = SE = SF$. Konstruer den innskrevne sirkelen i ΔABC.

Løsningsforslag d)

Vi skal vise at $FS = ES$ (tilsvarende argument gjelder for $FS = DS$ og $ES = DS$).
For ΔAFS, og ΔAES stemmer følgende

* $\angle FAS = \angle EAS$

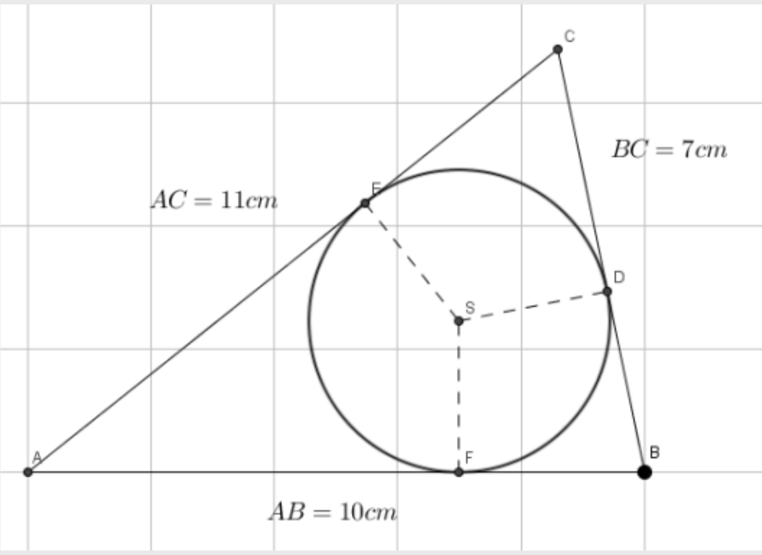
* $\angle AFS = \angle AES = 90^o$

* $\angle ASF = 180^o - \angle FAS - \angle AFS = 180^o - \angle EAS - \angle AES = \angle ASE$

* hypotenusen er like lang i begge trekanter (=linjestykke AS)

Vi konkluderer med at disse trekantene er kongruente, og følgelig er $FS = ES$

Den innskrevne sirkelen i ΔABC, konstruerer vi ved å tegne sirkelen med sentrum i S, og radius lik $FS = ES = DS$. Merk at sirkelen tangerer hver av sidekantene fordi FS, ES og DS står vinkelrett på henholdsvis AB, AC og BC.



Oppgave 9 (2 poeng) Nettkode: E-4D5T

Løs likningen

$\lg{(x+2)}^2 = \lg x^4$

Løsningsforslag

Vi kan begynne med å fjerne logaritmen på begge sider

$$\begin{aligned} \lg\left(x+2\right)^2 &= \lg x^4 \\ 10^{\lg(x+2)^2} &= 10^{\lg x^4} \\ \left(x+2\right)^2 &= x^4 \end{aligned}$$

Det vi har nå er en fjerdegradslikning, men heldigvis kan vi løse dette ved å ta kvadratroten på begge sider

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+2)^2} &= \pm\sqrt{x^4} \\ x+2 &= \pm x^2 \end{aligned}$$

Derfor har vi to likninger

1. $x+2 = x^2$
2. $x+2 = -x^2$

Begge disse er andregradslikninger, som vi kan løse med abc-formelen. De tar dem for oss hver for seg:

1. Likningen kan skrives

$$x^2 - x - 2 = 0$$

og har derfor løsningene

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}$

$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \;\; \text{og} \;\; x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$

Vi har de to løsningene $x = 2$ og $x = -1$, og vi kan sjekke at begge disse er gyldige løsninger ved å sette de inn i den opprinnelige likningen.

2. Likningen kan skrives

$$x^2 + x + 2 = 0$$

og har derfor løsningene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

Denne likningen har ingen løsninger fordi vi ikke kan regne ut $\sqrt{-7}$.

Vi konkluderer med at de eneste løsningene er $x = 2$ og $x = -1$.

Svar: Likningen har løsninger $x = 2$ og $x = -1$.

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng) Nettkode: E-4D5V

I 1960 var folketallet på jorden 3,0 milliarder. I 2013 var folketallet 7,1 milliarder. En god modell for utviklingen av folketallet er funksjonen f gitt ved

$f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$

der c og k er konstanter og tiden t er antall år etter 1960.

a)
Bestem konstantene c og k.

Løsningsforslag a)

Vi har fått oppgitt at

1. $f(0) = 3,0 \cdot 10^9$
2. $f(53) = 7,1 \cdot 10^9$

1. Dette gir oss

$$f(0) = c \cdot e^{k \cdot 0} = c = 3,0 \cdot 10^9$$

Så $c = 3,0 \cdot 10^9$.

2. Vi setter nå $t = 53$ inn i funksjonen

$f(53) = c \cdot e^{k \cdot 53} = 3,0 \cdot 10^9 \cdot e^{k \cdot 53} = 7,1 \cdot 10^9$

Altså, vi har en likning der k er ukjent.

$$\frac{3,0 \cdot 10^9 \cdot e^{k \cdot 53}}{3,0 \cdot 10^9} = \frac{7,1 \cdot 10^9}{3,0 \cdot 10^9}$$

$$\ln\left(e^{53k}\right) = \ln\left(\frac{7,1}{3}\right)$$

$$53k = \ln 7,1 - \ln 3$$

$$k = \frac{\ln 7,1 - \ln 3}{53} \approx 0,0163$$

Svar: $c = 3,0 \cdot 10^9$ og $k = 0,0163$

b)
Når vil folketallet passere 10 milliarder ifølge denne modellen?

Løsningsforslag b)

Vi kan løse dette som en likning eller løse det grafisk.

Likning:

Vi ser etter den t-verdien som gir oss 10 milliarder mennesker. Det gir oss likningen

$$f(t) = 10 \cdot 10^9$$

$$\frac{3{,}0 \cdot 10^9 \cdot e^{0{,}0163t}}{3{,}0 \cdot 10^9} = \frac{10 \cdot 10^9}{3{,}0 \cdot 10^9}$$

$$e^{0{,}0163t} = \frac{10}{3}$$

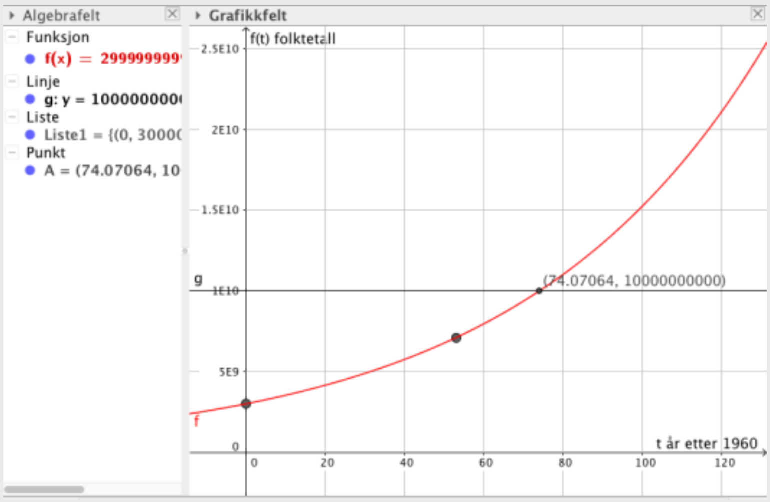
$$\ln\left(e^{0{,}0163t}\right) = \ln\left(\frac{10}{3}\right)$$

$$\frac{0{,}0163t}{0{,}0163} = \frac{\ln 10 - \ln 3}{0{,}0163} \qquad t = \frac{\ln 10 - \ln 3}{0{,}0163} \approx 74$$

74 år etter 1960 tilsvarer år $(1960 + 74 = 2034)$ år 2034.

Grafisk:

For å se hvor befolkningen går forbi 10 milliarder, tegner vi opp linja $y = 10 \cdot 10^9$, og markerer skjæringspunktet mellom denne linja og f.



Vi merker oss koordinatene til dette kryssningspunktet $A\left(74,\ 10 \cdot 10^9\right)$, altså $t = 74$, som tilsvarer på 2034.

Svar: Folketallet passere 10 milliarder i år 2034.

c)

Forklar at folketallet stiger med en fast prosent hvert år ifølge modellen.

Bestem denne faste, årlige prosenten.

Løsningsforslag c)

Vi bruker den andre fremgangsmåten gitt over. Vi regner ut

$$\frac{f(t+1)}{f(t)}$$
$$= \frac{3{,}0\cdot 10^9\cdot e^{0{,}0163(t+1)}}{3{,}0\cdot 10^9\cdot e^{0{,}0163t}}$$
$$= \frac{e^{0{,}0163(t+1)}}{e^{0{,}0163t}}$$
$$= e^{0{,}0163(t+1)-0{,}0163t}$$
$$= e^{0{,}0163} \approx 1{,}016$$

Som vi ser avhenger ikke dette forholdet av hvilket år det er. Og

$$f(t+1) = 1{,}016\cdot f(t)$$

Altså øker det med $1{,}6\%$.

Svar: Den faste årlige befolkningsveksten er på $1{,}6\%$.

Oppgave 2 (6 poeng) Nettkode: E-4D5Z

I et koordinatsystem er punktene $A(-1, 0)$, $B(7, -1)$ og $C(5, 8)$ gitt.

a)

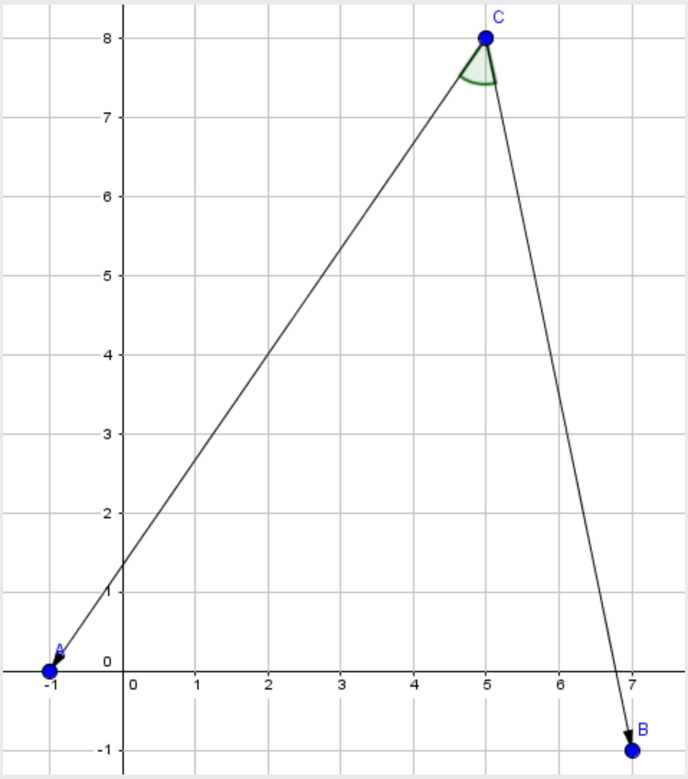
Bestem $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$ og $\angle ACB$.

Løsningsforslag a)

$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = [7-5, -1-8] = [2, -9]$

$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = [-1-5, 0-8] = [-6, -8]$

$\angle ACB$ er vinkelen mellom de to vektorene $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ og $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$



Vi bruker formelen over for å regne ut vinkelen, vi lar $v = \angle ACB$.

$$\left|\overrightarrow{CB}\right|\left|\overrightarrow{CA}\right|\cos v = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$$
$$|[2,-9]||[-6,-8]|\cos v = [2,-9]\cdot[-6,-8]$$
$$\sqrt{2^2+(-9)^2}\sqrt{(-6)^2+(-8)^2}\cdot\cos v = 2\cdot(-6)+(-9)\cdot(-8)$$
$$\sqrt{85}\sqrt{100}\cdot\cos v = -12+72$$
$$\frac{10\sqrt{85}\cdot\cos v}{10\sqrt{85}} = \frac{60}{10\sqrt{85}}$$
$$v = \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{85}}\right) \approx 49,4^\circ$$

Vinkelen $\angle ACB$= $49,4^\circ$

Svar: $\overrightarrow{CB} = [2,-9]$, $\overrightarrow{CA} = [-6,-8]$ og $\angle ACB$=$49,4^\circ$.

b)
Bestem arealet til ΔABC.

Løsningsforslag b)

Vi vet allerede at $\angle ACB$=$49,4^\circ$, så det gjenstår å regne ut lengden av vektorene $\overrightarrow{CB} = [2,-9]$ og $\overrightarrow{CA} = [-6,-8]$.

$$\left|\overrightarrow{CB}\right| = \left|[2,-9]\right| = \sqrt{2^2+(-9)^2} = \sqrt{85}$$
$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \left|[-6,-8]\right| = \sqrt{(-6)^2+(-8)^2} = \sqrt{100} = 10$$

Derfor får vi et uttrykk for arealet
$$T = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\sin v$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{85}\cdot 10\cdot\sin 49,4^\circ = 35$$

Svar: Arealet til ΔACB er 35.

c)

Bruk vektorregning til å bestemme koordinatene til et punkt E på x-aksen slik at $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{AB}$

Løsningsforslag c)

Vi starter med at E er på formen $(x, 0)$, da får vi

$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \left[x - 5, 0 - 8\right] = \left[x - 5, -8\right]$

Vi trenger også

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left[7 - \left(-1\right), -1 - 0\right] = \left[8, -1\right]$

Til slutt bruker vi at skalarproduktet er lik 0

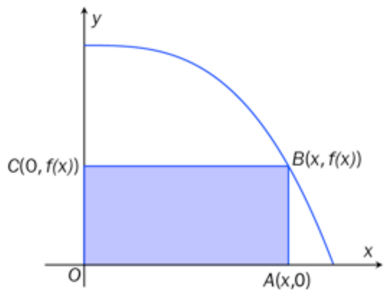
$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{CE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= 0 \\
[x - 5, -8] \cdot [8, -1] &= 0 \\
(x - 5) \cdot 8 + (-8) \cdot (-1) &= 0 \\
8x - 40 + 8 &= 0 \\
\frac{8x}{8} &= \frac{32}{8} \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

Svar: $\underline{\underline{E(4,0)}}$

Oppgave 3 (5 poeng) Nettkode: E-4D64

På figuren nedenfor ser du grafen til funksjonen f gitt ved

$f(x) = 4 - 0{,}125x^3 \quad , \quad 0 < x < 2\sqrt[3]{4}$



Rektangelet $OABC$ er laget slik at B ligger på grafen til f.

a)
Vis at arealet G til rektangelet kan skrives som

$G(x) = 4x - 0{,}125x^4$

Løsningsforslag a)

Lengden av rektangelet er lik lengden fra O til A, som er lik $x - 0 = x$. Bredden er lik lengden fra C til O, som er lik $f(x) - 0 = f(x)$. Derfor blir arealet (lengde·bredde)

$$G(x) = x \cdot f(x) = x\left(4 - 0{,}125x^3\right) = 4x - 0{,}125x^4$$

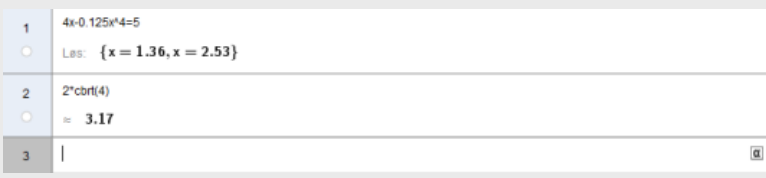
b)
Bestem x slik at rektangelet får areal lik 5,0.

Løsningsforslag b)

Likningen vi får ser slik ut

$$G(x) = 5$$
$$4x - 0{,}125x^4 = 5$$

Dette er en fjerdegradslikning, som vi trenger hjelp med å løse. Her kan vi ta ibruk CAS.



Vi løser likningen $4x - 0{,}125x^4 = 5$, og passer på at løsningene ligger mellom 0 og

$2\sqrt[3]{4} \approx 3,17$

Vi leser av de to løsningene $x = 1,36$ og $x = 2,53$.

Svar: $x = 1,36$ og $x = 2,53$.

c)

Bestem det største arealet rektangelet kan ha.

Løsningsforslag c)

Ved regning:

Vi starter med å derivere G

$$G'(x) = \left(4x - 0,125x^4\right)' = 4 - 0,125 \cdot 4x^3 = 4 - 0,5x^3$$

Deretter løser vi likningen

$$\begin{aligned} G'(x) &= 0 \\ 4 - 0,5x^3 &= 0 \\ \frac{0{,}5x^3}{0{,}5} &= \frac{4}{0{,}5} \\ \sqrt[3]{x^3} &= \sqrt[3]{8} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Dette betyr at G har et ekstremalpunkt i $x = 2$. Merk at dette er et toppunkt fordi G går mot 0 i endepunktene, og er positiv ellers.

Det største arealet rektangelet kan ha er derfor

$$G(2) = 4 \cdot 2 - 0,125 \cdot 2^4 = 8 - 0,125 \cdot 16 = 8 - 2 = 6$$

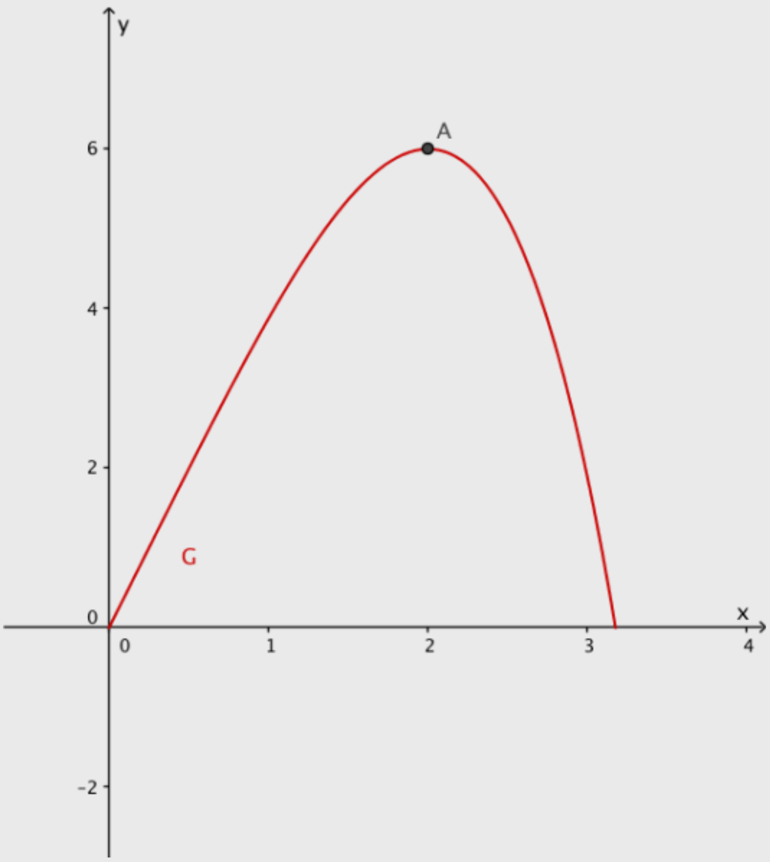
Grafisk:

Vi tegner opp G med graftegner med kommandoen

Skriv inn: Funksjon[4x-0.125x^4, 0, 2*cbrt(4)]

Så gir vi nytt navn til funksjonen: G
Til slutt finner vi toppunktet med kommandoen

Skriv inn: Ekstremalpunkt[G]



Vi leser av toppunktet $(2,6)$, og konkluderer med at det største arealet rektangelet kan ha er 6.

Svar: Det største arealet rektangelet kan ha er 6.

Oppgave 4 (8 poeng) Nettkode: E-4D68

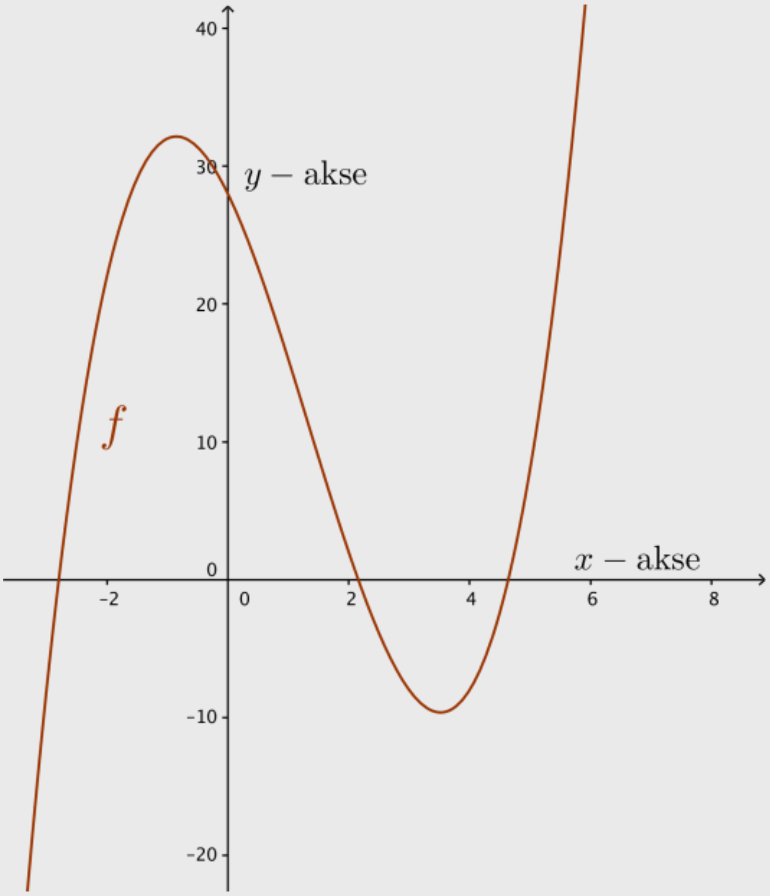
Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 9x + 28 \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

a)

Bruk graftegner til å tegne grafen til f.

Løsningsforslag a)



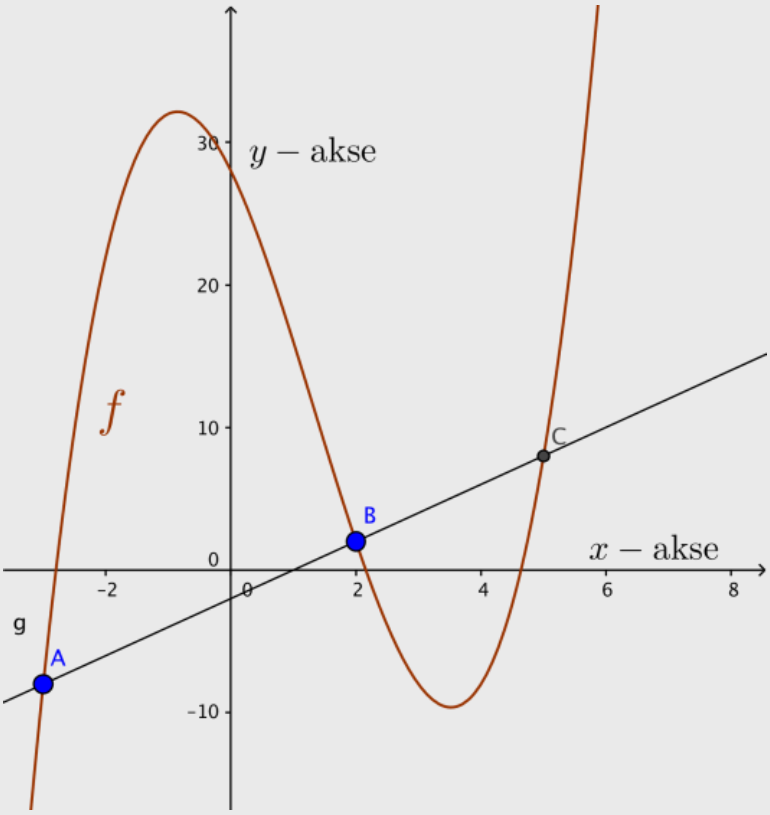
En linje skjærer grafen til f i punktene $(-3, -8)$ og $(2, 2)$.

b)

En linje skjærer grafen til f i punktene $(-3, -8)$ og $(2, 2)$.

Bestem det tredje skjæringspunktet mellom grafen til f og linjen. Hva blir summen av x-koordinatene til de tre skjæringspunktene?

Løsningsforslag b)



Vi leser av $C(5,8)$.

Summen av x-koordinatene til de tre skjæringspunktene blir

$$-3 + 2 + 5 = 4$$

Svar: $C(5,8)$ og summen av x-koordinatene til de tre skjæringspunktene er lik 4.

c)

Funksjonen g er gitt ved

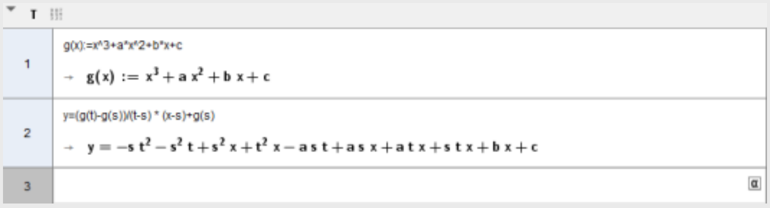
$$g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

En linje l går gjennom punktene $(s,\ g(s))$ og $(t,\ g(t))$.

Bruk CAS til å bestemme likningen for linjen l, uttrykt ved s , t , a , b og c .

Løsningsforslag c)

Vi starter med å definere $g(x)$ i CAS



Vi ser at likningen for linjen ℓ, uttrykt ved s, t, a, b og c er gitt ved

$$y = -st^2 - s^2t + s^2x + t^2x - ast + asx + atx + stx + bx + c$$

$$= \left(s^2 + t^2 + as + at + st + b\right)x + \left(-st^2 - s^2t - ast + c\right)$$

Svar: Likningen for linjen ℓ, uttrykt ved s, t, a, b og c er gitt ved

$$y = \left(s^2 + t^2 + as + at + st + b\right)x + \left(-st^2 - s^2t - ast + c\right)$$

d)

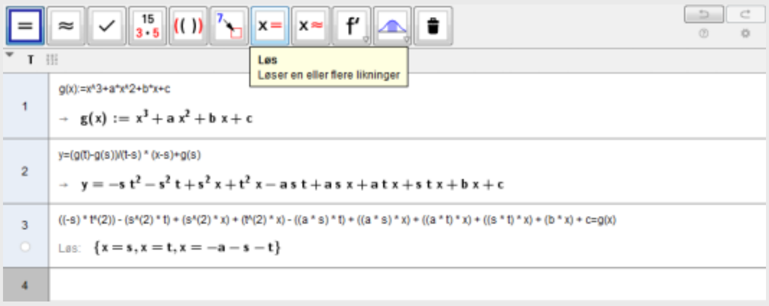
Bruk CAS til å bestemme x-koordinaten til det tredje skjæringspunktet mellom grafen til g og linjen l. Bestem summen av x-koordinatene til de tre skjæringspunktene.

Løsningsforslag d)

Som over, så skriver vi for ordens skyld α for stigningstallet og β for konstantleddet i likningen til ℓ. Vi skal nå løse likningen

$$\alpha x + \beta = x^3 + ax^2 + bx + c$$

Dette kan vi få til i CAS ved å kopiere uttrykket vi fant i **c)** ($y = -st^2 - s^2t + s^2x + t^2x - ast + asx + atx + stx + bx + c$), og sette høyresiden lik $g(x)$. Deretter trykker vi på **Løs ($x =$)**



Vi ser at vi ender opp med de tre løsningene

$$\{\mathbf{x} = \mathbf{s}, \mathbf{x} = \mathbf{t}, \mathbf{x} = -\mathbf{a} - \mathbf{s} - \mathbf{t}\}$$

Legger vi disse sammen får vi

$$s + t + (-a - s - t) = -a$$

Svar: Summen av x-koordinatene til de tre skjæringspunktene er $-a$.