REA3022 2013 Vår

Eksamenstid:

5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.

- Hippokrates (Utdanningsdirektoratet)
- Alle grafer og figurer (Utdanningsdirektoratet)

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng) Nettkode: E-4CWU

Formlene for arealet A av en sirkel og volumet V av en kule med radius r er gitt ved

$A(r) = \pi r^2$ og $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

Bestem $A'(r)$ og $V'(r)$.

Løsningsforslag

1. $A'\left(r\right) = \left(\pi r^2\right)' = \pi \cdot 2r = 2\pi r$
2. $V'\left(r\right) = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2$

Svar: $A'\left(r\right) = 2\pi r$ og $V'\left(r\right) = 4\pi r^2$.

Oppgave 2 (3 poeng) Nettkode: E-4CWW

Deriver funksjonene

a)

$g(x) = 3\ln\left(x^2 - 1\right)$

Løsningsforslag a)

Siden vi vet hvordan vi kan derivere $u(x) = x^2 - 1$ og $g(u) = 3\ln u$, $\left(x^2 - 1\right)' = 2x$ og $\left(3\ln u\right)' = \frac{3}{u}$, begynner vi med å skrive

$$g(x) = 3\ln(x^2 - 1) = 3\ln(u(x)) = g(u(x))$$

Ved å benytte kjerneregelen for derivasjon, som sier at

$$g(u(x)))' = u'(x)g'(u)$$

finner vi da at

$$g'\left(x\right) = u'\left(x\right)g'\left(u\right) = \left(x^2 - 1\right)'\left(3\ln u\right)' = 2x \cdot \left(\frac{3}{u}\right) = 2x \cdot \frac{3}{x^2 - 1} = \frac{6x}{x^2 - 1}$$

Svar:

$$g'\left(x\right) = \frac{6x}{x^2 - 1}$$

b)

$h(x) = \frac{2x^2}{e^x}$

Løsningsforslag b)

Vi bruker brøkregelen for derivasjon, med $u = 2x^2$, og $v = e^x$.

$$h'\left(x\right) = \left(\frac{2x^2}{e^x}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$= \frac{\left(2x^2\right)' \cdot e^x - \left(2x^2\right) \cdot \left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2} = \frac{4x \cdot e^x - 2x^2 \cdot e^x}{e^x \cdot e^x}$$

$$= \frac{(2-x) \cdot 2x \cdot e^x}{e^x \cdot e^x}$$

$$= \frac{(2-x) \cdot 2x}{e^x}$$

Svar: $\underline{\underline{h'\left(x\right) = \frac{(2-x) \cdot 2x}{e^x}}}$

Oppgave 3 (5 poeng) Nettkode: E-4CWZ

Polynomfunksjonen P er gitt ved

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

a)
Vis at $P(1) = 0$

Løsningsforslag a)

Vi setter inn $x = 1$ i $P(x)$

$$P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

Svar: $\underline{\underline{P(1) = 0}}$

b)
Bruk blant annet polynomdivisjon til å faktorisere $P(x)$ i førstegradsfaktorer.

Løsningsforslag b)

For å finne Q, gjør vi polynomdivisjonen

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad -5x^2 + 11x - 6 \\
\quad \underline{-(-5x^2 + 5x)} \\
\qquad 6x - 6 \\
\qquad \underline{-(6x - 6)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Å faktorisere $x^2 - 5x + 6$ gjør vi, ved å finne nullpunktene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\left(-5\right) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

Derfor er $x^2 - 5x + 6 = \left(x - 3\right)\left(x - 2\right)$, og P kan faktoriseres

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Svar:

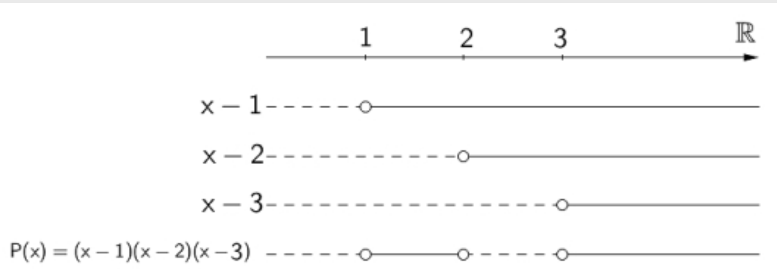
$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

c)

Løs ulikheten $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leq 0$

Løsningsforslag c)

Fortegnssjemaet til P ser slik ut:



Vi ser at P er mindre eller lik 0 i intervallet $\langle \leftarrow, 1\right] \cup \left[2, 3\right]$, så vi har løsningen

$$L = \langle \leftarrow, 1] \cup [2, 3]$$

Svar:

$L = \langle \leftarrow, 1] \cup [2, 3]$

Oppgave 4 (2 poeng) Nettkode: E-4CX3

Skriv så enkelt som mulig

$\ln\left(a^2 \cdot b\right) - 2\ln\ a - \ln\left(\frac{1}{b}\right)$

Løsningsforslag

Vi kan ta for oss de tre leddene $\ln\left(a^2 \cdot b\right)$, $2\ln a$ og $\ln\left(\frac{1}{b}\right)$ hver for seg

1. $\ln\left(a^2 \cdot b\right) = \ln\left(a^2\right) + \ln(b) = 2\ln(a) + \ln(b) \qquad (1)\ \text{og}\ (2)$

2. $2\ln a$ er allerede på den ønskede formen

3. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(1) - \ln(b) = -\ln(b) \qquad (3)$

Tallene i parentes på enden forteller hvilken logaritmeregel vi brukte.

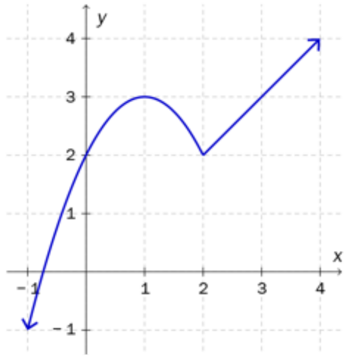
Til slutt setter vi alt sammen

$$\begin{aligned}
&\ln\left(a^2 \cdot b\right) - 2\ln a - \ln\left(\frac{1}{b}\right)\\
&= (2\ln a + \ln b) - 2\ln a - (-\ln b)\\
&= 2\ln a + \ln b - 2\ln a + \ln b\\
&= 2\ln b
\end{aligned}$$

Svar: $2\ln b$

Oppgave 5 (2 poeng) Nettkode: E-4CX6

Figuren nedenfor viser grafen til en funksjon f der $D_f = \langle -1, 4\rangle$



Avgjør for hvilke x-verdier f er kontinuerlig, og for hvilke x-verdier f er deriverbar.

Løsningsforslag

Funksjonen f er kontinuerlig i $a \in D_f$ hvis $\lim\limits_{x-a\to\infty} f(x) = f(a)$. Tilsynelatende gjelder dette alle punkter i D_f. Uansett hvilket punkt vi betrakter på grafen, vil y-koordinaten endre seg gradvis når vi beveger oss gradvis til nærliggende punkter på grafen. (Legg merke til at det ikke er relevant å skrive at grafen er sammenhengende, for det finnes funksjoner med sammenhengende graf som ikke er kontinuerlige.) Det ser ut til at er kontinuerlig i alle $x \in D_f$.

Funksjonen f er deriverbar i $x \in D_f$ hvis og bare hvis $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ eksisterer. Differensekvotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ uttrykker stigningstallet til linja gjennom punktene $(x,f(x))$ og $(x+h,f(x+h))$ på grafen til f. Den deriverte eksisterer altså i x hvis stigningstallene til linjene gjennom nevnte punkter stabiliserer seg når $h \to 0$. Grafisk vises dette ved at grafen har entydig tangent i $(x,f(x))$. For vår f, gjelder dette alle $x \in D_f$ unntatt $x = 2$. For $x = 2$ ser det ut til at

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 1$$

mens

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = -2$$

Dermed finnes ikke

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

Svar: f er kontinuerlig alle $x \in D_f$, og deriverbar i alle $x \in D_f \backslash \{2\}$.

Oppgave 6 (3 poeng) Nettkode: E-4CX8

En funksjon f er gitt ved

$f(x) = x^3 + 6x^2 - 2$

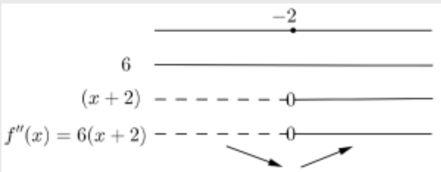
Vis at grafen til f har en vendetangent i punktet $(-2, f(-2))$ med likning $y = -12x - 10$

Løsningsforslag

For å dobbeltderivere f, starter vi med å derivere funksjonen, for så å derivere den deriverte

1. $f'(x) = \left(x^3 + 6x^2 - 2\right)' = 3x^2 + 6 \cdot 2x = 3x^2 + 12x$
2. $f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(3x^2 + 12x\right)' = 6x + 12$

Vi må sjekke at $f''(x)$ skifter fortegn ved $x = -2$. Dette sjekkes ved for eksempel å lage fortegnsskjema for $f''(x)$. Vi skriver $f''(x) = 6x + 12 = 6(x + 2)$



Så vendepunktet finner vi ved å løse likningen

$f''(x) = 0$

$6x + 12 = 0$

$\frac{6x}{6} = \frac{-12}{6}$

$x = -2$

Derfor har f et vendepunkt i

$$(-2, f(-2)) = (-2, (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 2) = (-2, -8 + 24 - 2) = (-2, 14)$$

Vi skal nå finne tangenten til f i punket $(-2, 14)$. La denne linja ha likningen

$$y = ax + b$$

Vi vet at stigningstallet til tangenten er lik den deriverte i det punktet. Derfor

$$a = f'(-2) = 3(-2)^2 + 12(-2) = 12 - 24 = -12$$

For å finne b bruker vi ettpunktsformelen

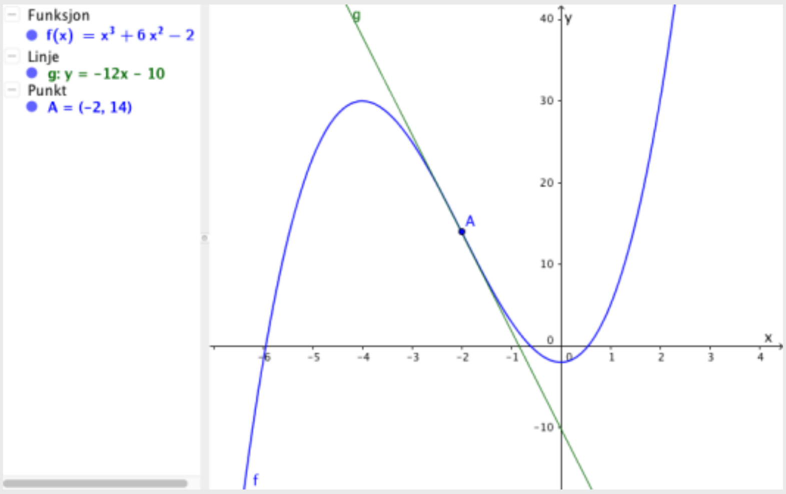
$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

når linja går igjennom (x_0, y_0). I vårt tilfelle går linja gjennom punktet $(-2, 14)$ og $a = -12$

$$y - 14 = -12(x - (-2))$$
$$y - 14 = -12(x + 2)$$
$$y = -12x - 24 + 14$$
$$y = -12x - 10$$

Likningen til vendetangenten er derfor gitt ved

$$y = -12x - 10$$



Svar: $y = -12x - 10$

Oppgave 7 (3 poeng) Nettkode: E-4CXA

Vektorene $\vec{a} = [2,\ 3]$, $\vec{b} = [-6,\ 4]$ og $\vec{c} = [3,\ 11]$ er gitt.

a)

Undersøk om $\vec{a} \perp \vec{b}$

Løsningsforslag a)

Vi sjekker derfor skalarproduktet mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left[2, 3\right] \cdot \left[-6, 4\right] = 2 \cdot \left(-6\right) + 3 \cdot 4 = -12 + 12 = 0$$

og vi konkluderer med at $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Svar: Det stemmer at $\vec{a} \perp \vec{b}$.

b)

Bestem ved regning to tall k og t slik at $\vec{c} = k\vec{a} + t\vec{b}$

Løsningsforslag b)

$$\vec{c} = k\vec{a} + t\vec{b}$$
$$[3, 11] = k[2, 3] + t[-6, 4]$$
$$[3, 11] = [2k, 3k] + [-6t, 4t]$$
$$[3, 11] = [2k - 6t, 3k + 4t]$$

For at vektoren på høyre side av likhetstegnet skal være lik den på venstre side, må

$$\begin{cases} 3 = 2k - 6t \\ 11 = 3k + 4t \end{cases}$$

Altså har vi et likningssett med to ukjente, som vi kan løse med (for eksempel) addisjonsmetoden.

$$\begin{cases} 3 \cdot (-3) = (2k - 6t) \cdot (-3) \\ \quad 11 \cdot 2 = (3k + 4t) \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 = -6k + 18t \\ \quad 22 = 6k + 8t \end{cases}$$

Legger vi disse sammen får vi

$$\begin{aligned} -9 + 22 \quad &= (-6k + 18t) + (6k + 8t) \\ \tfrac{13}{26} \quad &= \tfrac{26t}{26} \\ 13 &= 26t \\ t &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

For å finne k setter vi $t = 0,5$ inn i (for eksempel) inn i den første likningen. Legger vi disse sammen får vi

$$\begin{aligned} 3 \quad &= 2k - 6t \\ 3 \quad &= 2k - 6 \cdot 0,5 \\ 2k \quad &= 3 + 3 \\ \tfrac{2k}{2} \quad &= \tfrac{6}{2} \\ k \quad &= 3 \end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{t = 0,5 \text{ og } k = 3}}$

Oppgave 8 (4 poeng) Nettkode: E-4CXE

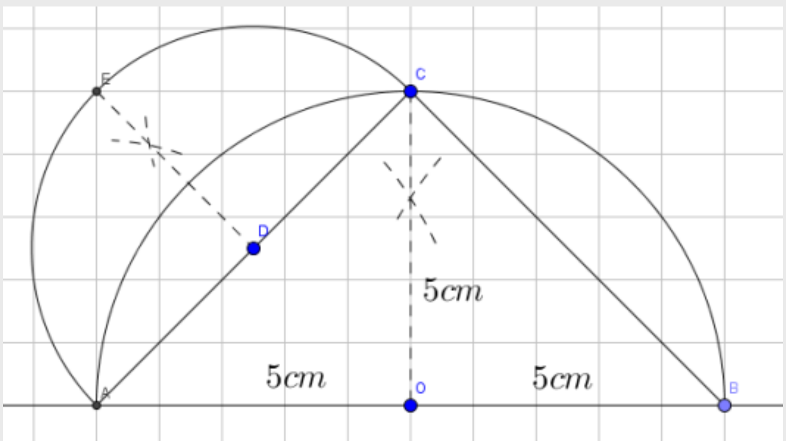
> Hippokrates fra Khios (ca. 470–410 f.Kr.) var trolig den første greske matematikeren som skrev en lærebok i geometri, 100 år før Euklid.
>
> Grekerne forsøkte å konstruere et kvadrat som hadde like stort areal som en sirkel (*sirkelens kvadratur*).
>
> *Hippokrates-månen* (i blå farge nedenfor) var en del av dette forsøket.
>
> Kilde: Proclus, *Kommentar til Euklid I*

På figuren nedenfor er ACB en halvsirkel med sentrum i O, og AEC er en halvsirkel med sentrum i D. $\angle CAB = \angle ABC = 45^{\circ}$

a)

Konstruer figuren nedenfor når du setter $r = 5{,}0$ cm . Ta med konstruksjonsforklaring.

Løsningsforslag a)



Framgangsmåte

1. Tegn en linje og marker A og B med avstand $2r = 10$cm
2. Konstruer midtnormalen til AB, og marker O

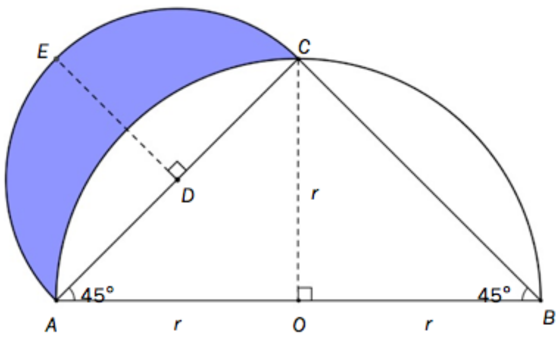
   Tegn en halvsirkel med sentrum i O, og radius $r = AO = 5$ cm

4. Midtnormalen treffer halvsirkelen i punktet C
5. Trekk linjestykkene AC og BC
6. Konstruer midtnormalen til AC, og midtpunktet D
7. Tegn en halvsirkel med sentrum i D (ut ifra ΔABC), og radius AD
8. Midtnormalen treffer halvsirkelen i punktet E

b)

På figuren nedenfor har Hippokrates-månen blå farge.

Vis ved regning at arealet av Hippokrates-månen er lik arealet av ΔAOC når radien i halvsirkelen ACB er r.



Løsningsforslag b)

Vi skal vise at $M = T$. Men dersom vi legger til S på begge sider, $M + S = T + S$, tilsvarer det at vi skal vise at arealet av halvsirkelen ut fra AC har likt areal som kvartsirkelen AOC.

Arealet av kvartsirkelen.

$$\text{T+S} = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$$

Arealet av halvsirkelen.

$$\text{M+S} = \frac{\pi \cdot \text{AD}^2}{2}$$

Så vi trenger å finne lengden AD. Først merker vi at $AD = \frac{AC}{2}$, siden D er midtpunktet på AC. Deretter bruker vi Pytagoras for å finne AC

$$AO^2 + OC^2 = AC^2$$

$$AC = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2} \cdot r$$

Derfor får vi at $AD = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} r$, og vi får

$$\text{M+S} = \frac{\pi \cdot \text{AD}^2}{2} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2} \cdot r}{2}\right)^2}{2} = \frac{\frac{\pi \cdot 2r^2}{4}}{2} = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$$

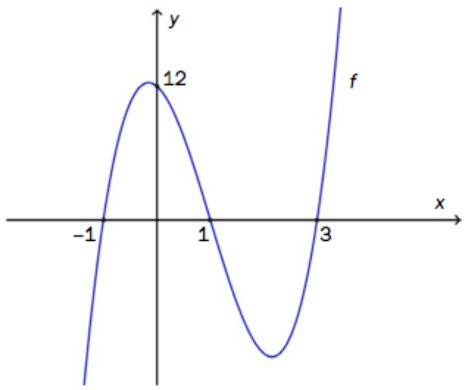
Og vi ser at de to figurene har det samme arealet.

Svar: De to figurene har det samme arealet.

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (7 poeng) Nettkode: E-4CXK

Figuren nedenfor viser grafen til en tredjegradsfunksjon f.



a)

Forklar at $f(x)$ er delelig med $(x-1)$, $(x+1)$ og $(x-3)$.

Begrunn at vi da kan skrive

$f(x) = a\left(x^2-1\right)(x-3)$, der a er en konstant.

Bestem a når punktet $(0,\ 12)$ ligger på grafen til f .

Løsningsforslag a)

Fordi f har nullpunktene $x=-1$, $x=1$ og $x=3$ kan vi skrive

$$f(x) = (x-(-1))(x-1)(x-3)g(x) = (x+1)(x-1)(x-3)g(x)$$

der g er tre lavere enn graden til f. Men det betyr at graden til g er 0, som betyr at $g(x)=a$ er en konstant.

$$f(x) = a(x+1)(x-1)(x-3) = a(x^2-1)(x-3)$$

Siden f går igjennom punktet $(0, 12)$, betyr det at

$$\begin{aligned} f(0) &= 12 \\ a(0^2-1)(0-3) &= 12 \\ 3a &= 12 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

Svar: Over har vi forklart hvorfor
$f(x) = a(x+1)(x-1)(x-3) = a(x^2-1)(x-3)$ og $a = 4$.

b)
Bestem likningen til tangenten i punktet $(0, 12)$.

Løsningsforslag b)

Siden vi trenger å bruke $f'(0)$, begynner vi med å regner ut den deriverte av f. Først kan det være greit å gange ut parentesene som utgjør f.

$$f(x) = 4(x^2-1)(x-3) = 4(x^3-3x^2-x+3) = 4x^3-12x^2-4x+12$$

Deretter deriverer vi f

$$f'(x) = 4\cdot 3x^2 - 12\cdot 2x - 4 = 12x^2-24x-4$$

Vi ser nå at stigningstallet til likningen til tangenten gjennom punktet $(0, 12)$ er

$$a = f'(0) = 12\cdot 0^2 - 24\cdot 0 - 4 = -4$$

Konstantleddet er akkurat der linja krysser y-aksen, men da vi vet at linja går gjennom punktet $(0, 12)$, vet vi at linja krysser y-aksen i $y = 12$. Så konstantleddet er $b = 12$.

Svar: Likningen til tangenten i punktet $(0, 12)$ er gitt ved

$$y = -4x + 12$$

c)

Denne tangenten skjærer grafen til f i et annet punkt.

Bestem ved regning koordinatene til dette punktet.

Løsningsforslag c)

Vi har likningen

$$4(x+1)(x-1)(x-3) \quad = -4(x-3)$$

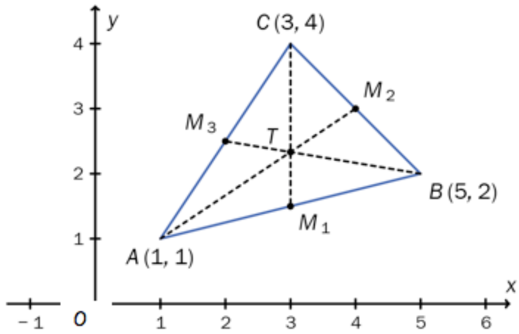
Vi vet at linjen skjærer f i $x = 0$ og ett annet sted. Hvis vi setter $x = 3$ i likningen, ser vi at både venstre og høyre side er lik 0, så vi har likhet. Derfor skjærer linjen og f hverandre i punktet

$$(3, f(3)) = (3, 0)$$

Svar: Tangenten skjærer grafen til f i punktet $(3, 0)$.

Oppgave 2 (6 poeng) Nettkode: E-4CXP

Se skissen nedenfor.



a)

Midtpunktene på sidekantene i ΔABC er M_1 , M_2 og M_3.

Vis ved regning at M_1 har koordinatene $\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$. Bestem koordinatene til M_2 og M_3 ved regning.

Løsningsforslag a)

For å regne ut koordinatene til M_1, kan vi finne posisjonsvektoren $\vec{OM_1}$. Vi har nemlig

$$\vec{OM_1} = \vec{OA} + \vec{AM_1} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

Fordi $\vec{OA} = \left[1, 1\right]$ og $\vec{AB} = \left[5-1, 2-1\right] = \left[4, 1\right]$, kan vi nå regne ut

$$\vec{OM_1} = \left[1, 1\right] + \frac{1}{2}\left[4, 1\right] = \left[1, 1\right] + \left[2, \frac{1}{2}\right] = \left[1+2, 1+\frac{1}{2}\right] = \left[3, \frac{3}{2}\right]$$

Fordi $\vec{OM_1} = \left[3, \frac{3}{2}\right]$ vet vi at $M_1 = \left(3, \frac{3}{2}\right)$.

Med samme tankegang finner vi M_2 og M_3.

$$\begin{aligned}\vec{OM_2} &= \vec{OB} + \vec{BM_2} = \vec{OB} + \tfrac{1}{2}\vec{BC} \\ &= [5, 2] + \tfrac{1}{2}[-2, 2] = [5, 2] + [-1, 1] = [5-1, 2+1] = [4, 3]\end{aligned}$$

Som gir at $M_2 = (4, 3)$.

$$\begin{aligned}\vec{OM_3} &= \vec{OC} + \vec{CM_3} = \vec{OC} + \tfrac{1}{2}\vec{CA} \\ &= [3, 4] + \tfrac{1}{2}[-2, -3] = [3, 4] + \left[-1, -\tfrac{3}{2}\right] = \left[3-1, 4-\tfrac{3}{2}\right] = \left[2, \tfrac{5}{2}\right]\end{aligned}$$

Som gir at $M_3 = \left(2, \frac{5}{2}\right)$.

Svar: $M_1 = \left(3, \frac{3}{2}\right)$, $M_2 = (4, 3)$ og $M_3 = \left(2, \frac{5}{2}\right)$.

b)

Bestem en parameterframstilling til linjen gjennom A og M_2 og en parameterframstilling til linjen gjennom C og M_1.

Løsningsforslag b)

Vi ser at linja vi er ute etter går igjennom $A(1,1)$ og er parallell med vektoren

$$\vec{AM_2} = \left[4 - 1, 3 - 1\right] = \left[3, 2\right]$$

Så hvis vi bruker formelen gitt over blir parameterframstillingen av linjen

$$\ell_A : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

Tilsvarende finner vi linja gjennom C og M_1 der $M_1 = \left(3, \frac{3}{2}\right)$. Den går gjennom punktet $C(3,4)$, og er parallell med vektoren

$$\vec{CM_1} = \left[3 - 3, \frac{3}{2} - 4\right] = \left[0, -\frac{5}{2}\right]$$

Så hvis vi bruker formelen gitt over blir parameterframstillingen av linjen

$$\ell_C : \begin{cases} x = 3 + 0t = 3 \\ y = 4 - \frac{5}{2}t \end{cases}$$

Svar: Parameterframstillingen av linjen er

$$\ell_C : \begin{cases} x = 3 + 0t = 3 \\ y = 4 - \frac{5}{2}t \end{cases}$$

c)
Tyngdepunktet T i trekanten er skjæringspunktet mellom medianene.

Bestem koordinatene til T .

Løsningsforslag c)

Vi ser at ℓ_C har alltid x-koordinat lik 3, så skjæringspunktet har x-koordinat lik 3. Hvis vi kan finne hvilken t-verdi som gir at ℓ_A har x-verdi lik 3, har vi funnet skjæringspunktet til linjene.

$$x = \quad 1 + 3t = 3$$
$$\frac{3t}{3} = \frac{2}{3}$$
$$t = \frac{2}{3}$$

Når $t = \frac{2}{3}$, får vi $y = 1 + 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3}$.

Svar: T=$\left(3, \frac{7}{3}\right)$

Oppgave 3 (7 poeng) Nettkode: E-4CXT

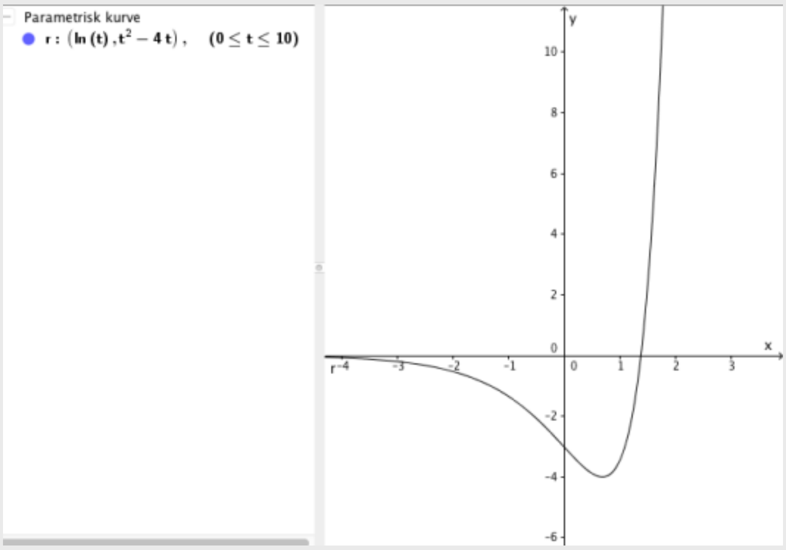
En partikkel har posisjonsvektoren

$$\vec{r}(t) = [\ln t,\ t^2 - 4t], \quad t > 0$$

a)

Tegn grafen til $\vec{r}$ og bestem skjæringspunktene med koordinataksene ved regning

Løsningsforslag a)



$\vec{r}$ krysser x-aksen når y-koordinaten er lik 0, altså vi løser likningen

$$\begin{aligned} t^2 - 4t &= 0 \\ t(t-4) &= 0 \\ t = 0 \quad &\text{eller} \quad t = 4 \end{aligned}$$

Siden vi får oppgitt i oppgaven at $t > 0$ er kun $t = 4$ gyldig løsning. Da får vi punktet $(\ln 4, 0)$.

$\vec{r}$ krysser y-aksen når x-koordinaten er lik 0, altså vi løser likningen

$$\begin{aligned} \ln t &= 0 \\ e^{\ln t} &= e^0 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

$t = 1$ er en gyldig løsning. Da får vi punktet $\left(0, 1^2 - 4 \cdot 1\right) = \left(0, -3\right)$.

Svar: $\vec{r}$ krysser x-aksen i $(\ln 4, 0)$ og y-aksen $(0, -3)$.

b)

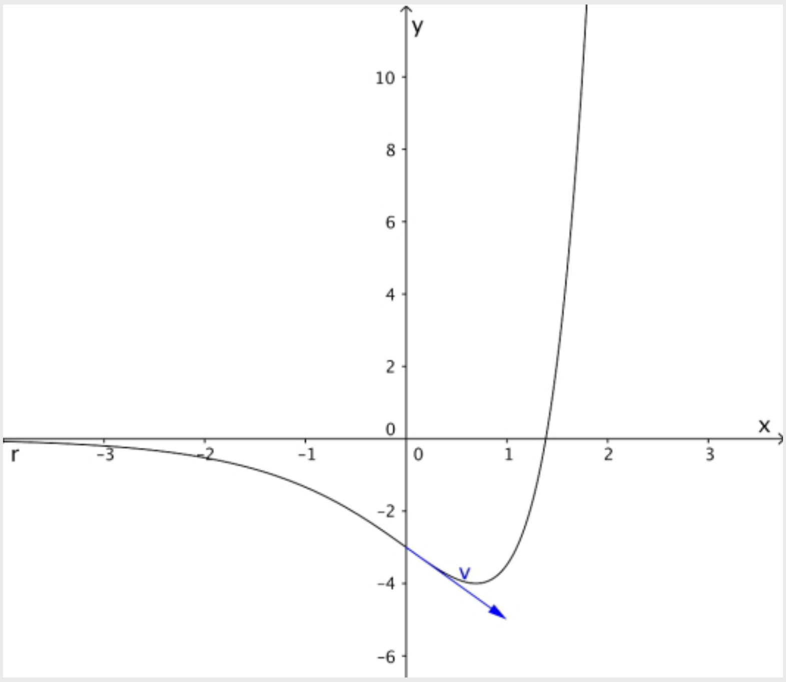
Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og bruk denne til å bestemme eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til $\vec{r}$. Tegn inn $\vec{v}(1)$ på grafen.

Løsningsforslag b)

Vi deriverer $\vec{r}$

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \left(\left[\ln t, t^2 - 4t\right]\right)' = \left[\left(\ln t\right)', \left(t^2 - 4t\right)'\right] = \left[\frac{1}{t}, 2t - 4\right]$$

Dersom $\vec{r}$ har et ekstremalpunkt vil fartskomponenten i y retning være null i dette (disse) punktet. Så vi lurer på når $2t - 4 = 0$. Dette gir at $t = 2$, og punktet på grafen blir $\left[\ln 2, 2^2 - 4 \cdot 2\right] = \left[\ln 2, -4\right]$. Dette er et bunnpunkt.



Når vi skal tegne inn $\vec{v}(1)$ på grafen trenger vi først å vite startpunktet til vektoren.

Siden $t = 1$, blir dette $\vec{r}(1) = \left[\ln 1, 1^2 - 4 \cdot 1\right] = \left[0, -3\right]$. Dessuten har vi $\vec{v}(1) = \left[\frac{1}{1}, 2 \cdot 1 - 4\right] = \left[1, -2\right]$.

Svar: $[\ln 2, -4]$ og $\vec{v}(t) = \left[\frac{1}{t}, 2t - 4\right]$

c)

Vis at akselerasjonsvektoren er $\vec{a}\,(t) = \left[-\frac{1}{t^2}, 2\right]$. Bestem $\vec{a}\,(t)$ når $t \to \infty$.

Kommenter svaret.

Løsningsforslag c)

Vi deriverer $\vec{v}$

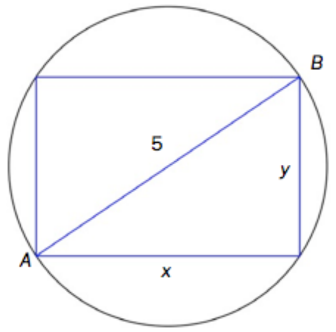
$$\vec{a}\left(t\right) = \vec{v}'\left(t\right) = \left(\left[\frac{1}{t}, 2t - 4\right]\right)' = \left[\left(\frac{1}{t}\right)', \left(2t - 4\right)'\right] = \left[-\frac{1}{t^2}, 2\right]$$

Vi ser at når $t \to \infty$, så vil $-\frac{1}{t^2} \to 0$. Så vi ser at akselerasjonen i x-retning går mot 0, mens i y-retning er akselerasjonen konstant. Selv om $\lim_{t \to \infty} a\,(t) = [0,2]$ vil kurven gå gjennom punkter med vilkårlig stor x - koordinat siden $\lim_{t \to \infty} \ln\ t = \infty$.

Svar: $\lim_{t \to \infty} a\,(t) = [0,2]$

Oppgave 4 (8 poeng) Nettkode: E-4CXY

Et rektangel med sider x og y er innskrevet i en sirkel med diameter $AB = 5$.



a)
Vis at arealet T av rektangelet er gitt ved

$$T(x) = x \cdot \sqrt{25 - x^2}$$

Forklar hvilke verdier x kan ha.

Løsningsforslag a)

Som sagt, har vi at
$$T(x) = x \cdot y$$

Og vi vil erstatte y med et uttrykk for x. Siden det er et rektangel vi jobber med, vet vi at trekanten med sidelengder AB, x og y er en *rettvinklet trekant* med *kateter* x og y, og *hypotenus* AB. Derfor vet vi

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \mathrm{AB}^2 \\ x^2 + y^2 &= 5^2 \\ y^2 &= 25 - x^2 \\ y &= \sqrt{25 - x^2} \end{aligned}$$

Så erstatter vi y med $\sqrt{25 - x^2}$ i uttrykket for arealet

$$\begin{aligned} T(x) &= x \cdot y \\ T(x) &= x \cdot \sqrt{25 - x^2} \end{aligned}$$

som var det vi ville fram til.

Når det kommer til hvilke verdier x kan ha, er våre eneste begrensinger at x og y må være positive tall.
Nedre grense: $0 < x$

Øvre grense:

$$
\begin{aligned}
0 &< y \\
0 &< \sqrt{25-x^2} \\
0^2 &< \left(\sqrt{25-x^2}\right)^2 \\
0 &< 25-x^2 \\
\sqrt{x^2} &< \sqrt{25} \\
x &< 5
\end{aligned}
$$

Vi ser at x kan ha verdiene $0 < x < 5$.

Svar: x kan ha verdiene $0 < x < 5$.

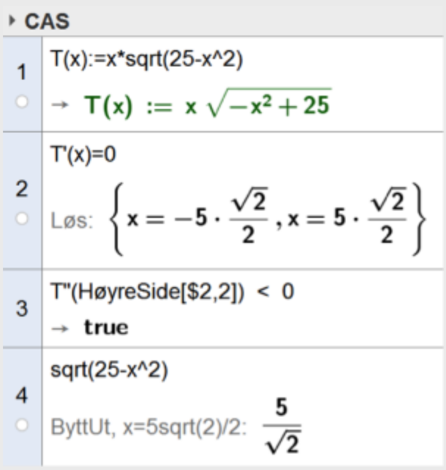
b)

Bestem x og y når arealet er størst mulig.

Kommenter svaret.

Løsningsforslag b)

Vi skal maksimere $T(x)$. For å gjøre det, gjør vi følgende beregninger i CAS i *GeoGebra*:



I celle 1 definerer vi funksjonen T. Celle 2 beregner *nullpunktene* til den deriverte. Vi ser at det negative nullpunktet er irrelevant for oppgaven. For å se at T har *toppunkt* for $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, bruker vi andrederiverttesten. Celle 3 viser at $T''\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) < 0$, så vi har et maksimalpunkt. Til sist beregnes verdien av y som blir lik x(forkort uttrykket for x med $\sqrt{}$. Det største rektanglet er altså et kvadrat.

2

Når oppgaven løses grafisk, blir det bare et kvadrat opptil viss avrunding. Derfor har vi valgt å løse denne oppgave ved regning. Den grafiske løsningen kan du se under alternativ løsning.

ALTERNATIV LØSNING

Svar: Arealet er størst når $x = y = 3.54$.

c)

Vis at omkretsen til rektangelet er gitt ved

$$O(x) = 2 \cdot \sqrt{25 - x^2} + 2x$$

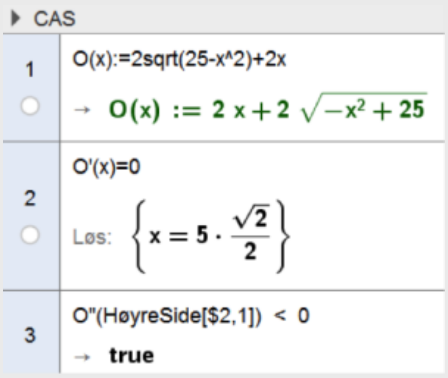
Bruk $O'(x)$ og bestem x når omkretsen er størst mulig.

Kommenter svaret.

Løsningsforslag c)

Omkretsen er summen av lengdene til sidene i firkanten. To av sidene har lengde x, de to andre sidene har lengde $y = \sqrt{25 - x^2}$. Dermed blir omkretsen , så derfor får vi$O(x) = 2y + 2x = 2\sqrt{25 - x^2} + 2x,$ slik om vi skulle vise.

For å finne x-verdien som gir størst omkrets, gir vi følgende kommandoer i CAS:



Som i deloppgave b), viser her celle 2 og 3 at $O(x)$ har maksimalpunkt $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Dette er samme rektangel som ga maksimalt areal, så det er kvadratet som har både størst areal og størst omkrets.

Svar: Omkretsen er størst når $x = 3.54$.

Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4CY2

Vi har røde og svarte kuler i en eske. Vi skal trekke tilfeldig to kuler uten tilbakelegging. Vi definerer følgende hendelser:

A: Vi trekker to kuler med ulik farge.

B: Vi trekker to kuler med samme farge.

Anta at vi har 6 røde og 4 svarte kuler i esken.

a)
Bestem $P(A)$.

Løsningsforslag a)

Hendelsen A består av *utfallene* RS eller SR, så $P(A) = P(RS) + P(SR)$. Da har vi at

1. $P(RS) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{4}{5 \cdot 3} = \frac{4}{15}$
2. $P(SR) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{4}{5 \cdot 3} = \frac{4}{15}$

Siden $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, når $A \cup B = \emptyset$ (som er tilfellet når vi har to utfall), får vi $P(A) = P(RS) + P(SR) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$.

Svar: $P(A) = \frac{8}{15}$

b)
Bestem $P(B)$.

Løsningsforslag b)

Vi sier at A og B er komplementære hendelser, og vi har følgende uttrykk (følger av uttrykket over)$P\left(A\right) + P\left(B\right) = 1 - P\left(A\right) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{15}{15} - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$

Svar: $P(B) = \frac{7}{15}$

c)
Anta at vi har 6 røde og et ukjent antall svarte kuler i esken, og at hendelsene A og B skal ha lik sannsynlighet.

Hvor mange svarte kuler kan det være i esken?

Løsningsforslag c)

Vi skal undersøke hva x må være for at $P(A) = P(B)$. På samme måte som i **a)** får vi at$P(A) = P(RS) + P(SR) = \frac{6}{6+x} \cdot \frac{x}{5+x} + \frac{x}{6+x} \cdot \frac{6}{5+x} = \frac{12x}{(6+x)(5+x)}$ og med samme tankegang finner vi
$P(B)P(B) = P(RR) + P(SS) = \frac{6}{6+x} \cdot \frac{5}{5+x} + \frac{x}{6+x} \cdot \frac{x-1}{5+x} = \frac{30+x^2-x}{(6+x)(5+x)}$ Setter vi disse lik hverandre får vi likningen

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(B) \\
\frac{12x}{(6+x)(5+x)} &= \frac{30+x^2-x}{(6+x)(5+x)} \quad \left| \cdot \left(6+x\right)\left(5+x\right)\right. \\
12x &= 30 + x^2 - x \\
0 &= x^2 - 13x + 30
\end{aligned}
$$

Denne *andregradslikningen* kan vi løse med *abc-formelen*

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-\left(-13\right) \pm \sqrt{(-13)^2-4\cdot 1\cdot 30}}{2\cdot 1} \\
&= \frac{13 \pm \sqrt{169-120}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{13 \pm 7}{2} \\
x_1 &= \frac{13+7}{2} = 10 \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{13-7}{2} = 3
\end{aligned}
$$

Derfor har vi de to løsningene av antall svarte kuler $x = 3$ og $x = 10$.

Svar: Med både 3 og 10 svarte kuler har hendelsene A og B lik sannsynlighet.

Oppgave 6 (2 poeng) Nettkode: E-4CY6

Løs likningen

$n^2 \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{\lg\, x} = x^2 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$

Løsningsforslag

Når vi deler på n^2 på begge sider av likningen, så man får likningen på formen

$$\left(\frac{x}{n}\right)^{\lg x} = \left(\frac{x}{n}\right)^2$$

Vi ser at på begge sider har vi $\frac{x}{n}$ opphøyd i noe. Så med mindre $\frac{x}{n}$ er lik 1, -1 eller 0, kan vi konkludere med at eksponenten på venstre side er lik eksponenten på høyre side.

Først ser vi at $\frac{x}{n} = -1$ og $\frac{x}{n} = 0$ fører til at $x = -n$ og $x = 0$, som ikke går fordi $\lg x$ er kun definert for positive$x$-verdier.

$\frac{x}{n} = 1$ gir $x = n$, som er en løsning.

Dersom eksponentene er lik hverandre har vi $\lg x = 2$ som gir $x = 100$, som er den andre løsningen.

Svar: $x = n$ eller $x = 100$.