www.matematikk.org

Eksamensoppgavesettet er utarbeidet av Utdanningsdirektoratet. Avvik fra det originale eksamenssettet er eventuelle spesifiseringer og illustrasjoner. Løsningsforslagene i sin helhet er utarbeidet av matematikk.org.

Nettkoden som står til høyre for oppgavetittelen brukes i søkefeltet på www.matematikk.org for å åpne oppgaven og se utfyllende løsningsforslag.

Våre samarbeidspartnere:

AkerBP PGS

REA3022 2013 Høst

Eksamenstid:

5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.

- Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng) Nettkode: E-4CVE

Deriver funksjonene

a)

$f(x) = 2 \cdot e^{3x}$

Løsningsforslag a)

Siden vi vet hvordan vi kan derivere $u(x) = 3x$ og $f(u) = 2 \cdot e^u$, $(3x)' = 3$ og $(2 \cdot e^u)' = 2 \cdot e^u$, begynner vi med å skrive

$$f(x) = 2 \cdot e^{3x} = 2 \cdot e^u = f(u(x))$$

Ved å benytte kjerneregelen for derivasjon, som sier at

$(f(u(x)))' = u'(x) f'(u)$

finner vi da at

$$f'(x) = u'(x) f'(u) = (3x)'(2 \cdot e^u)' = 3 \cdot (2 \cdot e^u) = 3 \cdot 2 \cdot e^{3x} = 6 \cdot e^{3x}$$

Svar:

$$\underline{\underline{f'(x) = 6 \cdot e^{3x}}}$$

b)

$g(x) = 2x \cdot \ln(3x)$

Løsningsforslag b)

Vi setter $u = 2x$ og $v = \ln(3x)$, da blir

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2x \cdot \ln(3x))' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \\ &= (2x)' \cdot \ln(3x) + 2x \cdot (\ln(3x))' = 2 \cdot \ln(3x) + 2x \cdot (\ln(3x))' \end{aligned}$$

Det gjenstår å regne ut $(\ln(3x))'$. Hvis vi setter $u(x) = 3x$ og bruker kjerneregelen, så blir uttrykket

$$\left(\ln\left(u\left(x\right)\right)\right)' = u'\left(x\right)\frac{1}{u(x)} = \left(3x\right)'\frac{1}{3x} = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

Når vi vet dette får vi

$$g'(x) = 2 \cdot \ln(3x) + 2x \cdot (\ln(3x))'$$
$$= 2 \cdot \ln(3x) + 2x \cdot \frac{1}{x}$$
$$= 2 \cdot \ln(3x) + 2$$

Svar: $\underline{\underline{g'(x) = 2 \cdot \ln(3x) + 2}}$

c)

$h(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

Løsningsforslag c)

Vi bruker brøkregelen for derivasjon, med $u = 2x - 1$, og $v = x + 1$.

$$h'(x) = \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$
$$= \frac{(2x-1)' \cdot (x+1) - (2x-1) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2 \cdot (x+1) - (2x-1) \cdot 1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{3}{(x+1)^2}$$

Svar: $\underline{\underline{h'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}}}$

Oppgave 2 (3 poeng) Nettkode: E-4CVI

Polynomfunksjonen P er gitt ved

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

a)
Vis at divisjonen $P(x) : (x-1)$ går opp, uten å utføre divisjonen.

Løsningsforslag a)

Vi trenger altså å sjekke om $P(1) = 0$.

$$P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

Altså kan vi konkludere med at divisjonen går opp.

Svar: Divisjonen går opp siden $P(1) = 0$.

b)
Utfør polynomdivisjonen og løs ulikheten $P(x) \geq 0$.

Løsningsforslag b)

Vi starter med å utføre polynomdivisjonen.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-1) = x^2 - 5x + 6 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
-5x^2 + 11x - 6 \\
\underline{-(-5x^2 + 5x)} \\
6x - 6 \\
\underline{-(6x - 6)} \\
0
\end{array}
$$

Videre bruker vi nullpunktsmetoden til å faktorisere $x^2 - 5x + 6$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a} \\
&= \frac{-\left(-5\right) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\
&= \frac{5 \pm 1}{2}
\end{aligned}
$$

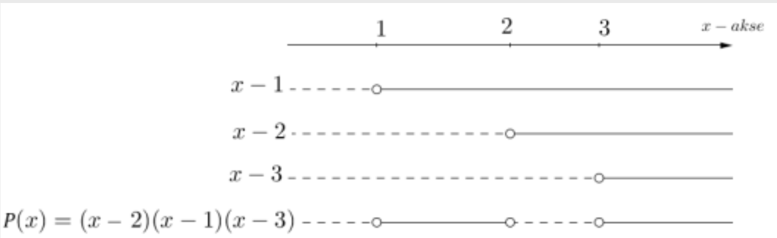
$$x_1 = \frac{5+1}{2} \quad x_2 = \frac{5-1}{2}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 2$$

Derfor kan vi faktorisere $x^2 - 5x + 6 = \left(x - 2\right)\left(x - 3\right)$ og derfor

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

vi kan tegne opp fortegnssjemaet til P



Vi ser at P er større eller lik null fra og med $x = 1$ til og med $x = 2$ og fra og med $x = 3$ og utover. Vi får løsningen $L = \left[1, 2\right] \cup \left[3, \rightarrow\right\rangle$.

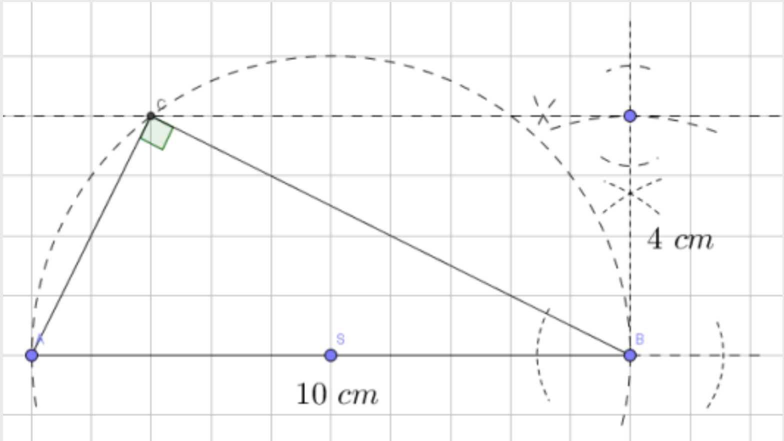
Svar: Polynomdivisjonen gir $P\left(x\right) : \left(x - 1\right) = x^2 - 5x + 6$ og ulikheten $P(x) \geq 0$ har løsning $L = \left[1, 2\right] \cup \left[3, \rightarrow\right\rangle$.

Oppgave 3 (2 poeng) Nettkode: E-4CVL

I ΔABC er $AB = 10{,}0$ cm og $\angle C = 90^\circ$. Høyden h fra C til AB er $4{,}0$ cm.

Konstruer ΔABC gitt at BC er den lengste kateten. Forklar hva du har gjort.

Løsningsforslag



Framgangsmåte:

1. Tegn en linje, og marker punktene A og B med 10 cm avstand. Marker også S, midpunktet på AB.
2. Tegn en halvsirkel med sentrum i S der AB er diameter. På denne halvsirkelen skal C ligge.
3. At C har avstand 4 cm til AB kan vi få til ved å konstruere en linje, parallell til AB, med avstand 4 cm til AB.
4. Konstruer en 90° vinkel i B (kan også gjøres i A) og marker et punkt på vikelbeinet ut fra AB, med avstand 4 cm.
5. Kostruer en ny 90° vinkel i dette punktet og trekk denne linja.
6. Denne linja treffer sirkelen i to punkter. Markere det punktet som ligger lengst unna B. Kall punktet C.
7. Trekk linjestykkene AC og BC.

Oppgave 4 (2 poeng) Nettkode: E-4CVN

En elev skulle løse en likning og begynte slik:

$2^{3x-1} = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$

$2^{3x-1} = 4 \cdot 2^2$

Fullfør løsningen av likningen.

Løsningsforslag

Vi vet at, at $a^n a^m = a^{n+m}$ og $\log(a^n) = n \cdot \log(a)$. Med disse kan vi løse likningen.

$$\begin{aligned}
2^{3x-1} &= 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 \\
\updownarrow & \quad \updownarrow \\
2^{3x-1} &= 4 \cdot 2^2 \\
\updownarrow & \quad \updownarrow \\
2^{3x-1} &= 2^2 \cdot 2^2 \\
\updownarrow & \quad \updownarrow \\
2^{3x-1} &= 2^{2+2} \\
\updownarrow & \quad \updownarrow \\
2^{3x-1} &= 2^4 \\
\updownarrow & \quad \updownarrow \\
\log\left(2^{3x-1}\right) &= \log\left(2^4\right) \\
\updownarrow & \quad \updownarrow \\
(3x-1)\log(2) &= 4\log(2) \\
\updownarrow & \quad \updownarrow \\
\frac{(3x-1)\log(2)}{\log(2)} &= \frac{4\log(2)}{\log(2)} \\
\updownarrow & \quad \updownarrow \\
3x-1 &= 4 \\
\updownarrow & \quad \updownarrow \\
3x &= 4+1 \\
\updownarrow & \quad \updownarrow \\
\frac{3x}{3} &= \frac{5}{3} \\
\updownarrow & \quad \updownarrow \\
x &= \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Etter mange regneoperasjoner, er vi endelig i mål! Setter vi $x = \frac{5}{3}$ inn i likningen igjen så setter vi svaret på prøve, altså vi skjekker at begge sider av likhetstegnet blir det samme:

Venstreside:

$$2^{3\cdot\frac{5}{3}-1} = 2^{5-1} = 2^4 = 16$$

Høyreside:

$$4 \cdot 2^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

Begge sider er likt! $x = \frac{5}{3}$ er løsning på likningen.

Svar: $\underline{\underline{x = \frac{5}{3}}}$

Oppgave 5 (4 poeng) Nettkode: E-4CVP

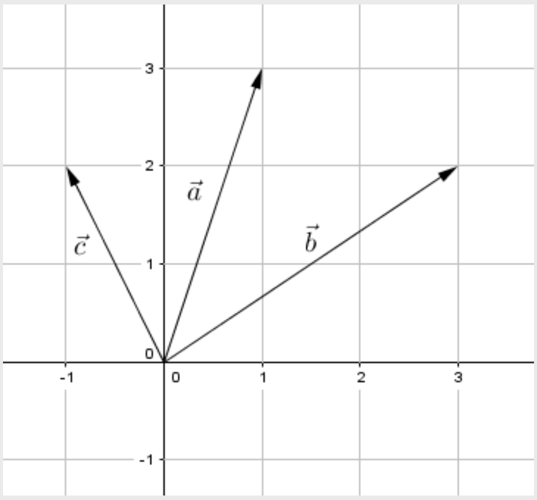
Vi har gitt vektorene $\overrightarrow{a} = [1, 3]$, $\overrightarrow{b} = [3, 2]$ og $\overrightarrow{c} = [-1, 2]$.

a)

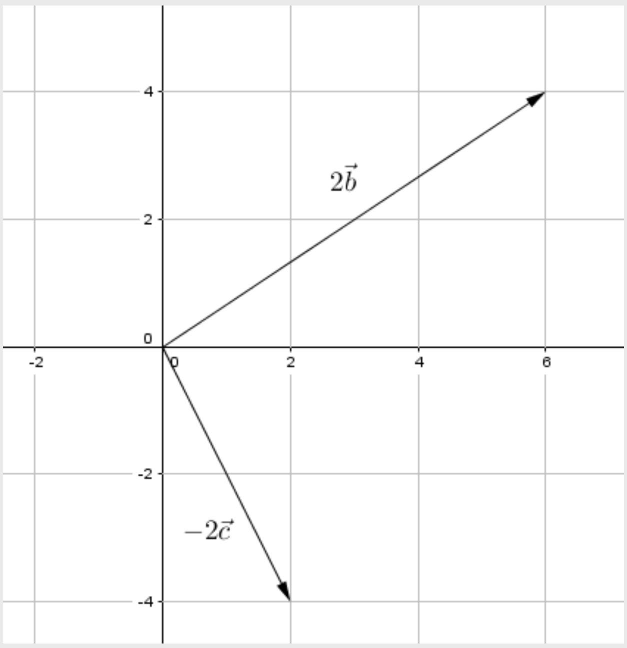
Tegn vektorene $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ og $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{c}$ i et koordinatsystem.

Løsningsforslag a)

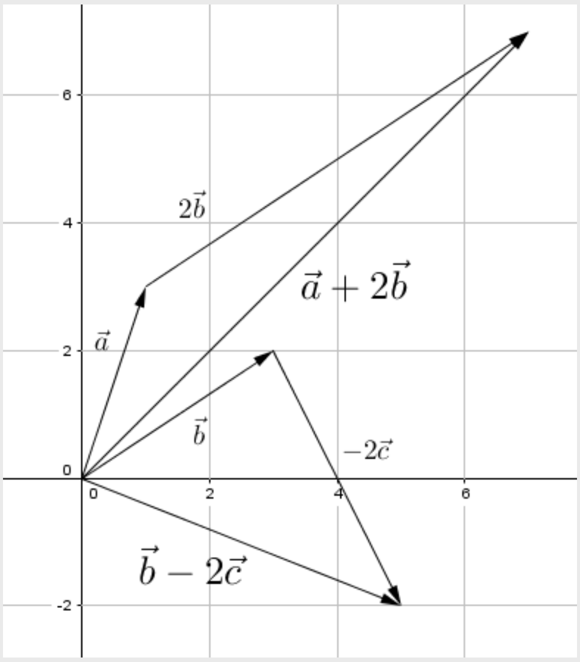
1) Vi tegner opp vektorene $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ i et koordinatsystem.



2) Fordi vi skal tegne opp $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ og $\vec{v} = \vec{b} - 2\vec{c}$, trenger vi $2\vec{b}$ og $-2\vec{c}$ (merk at $\vec{v} = \vec{b} - 2\vec{c} = \vec{b} + \left(-2\vec{c}\right)$)



Vi legger sammen riktige vektorer og får:



b)

Avgjør ved regning om $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Løsningsforslag b)

Vi regner ut vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$

$$\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}=[1,3]+2\cdot[3,2]=[1,3]+[6,4]=[7,7]$$

$$\vec{v}=\vec{b}-2\vec{c}=[3,2]-2\cdot[-1,2]=[3,2]+[2,-4]=[5,-2]$$

Så finner vi skalarproduktet

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=[7,7]\cdot[5,-2]=7\cdot 5+7\cdot(-2)=35-14=21\neq 0$$

Siden skalarproduktet ikke er 0, er heller ikke $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Svar: Vektorene står *ikke* normalt på hverandre.

Oppgave 6 (5 poeng) Nettkode: E-4CVS

En funksjon f er gitt ved

$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$, $D_f \in \mathbb{R}$

a)
Bestem $f'(x)$ og $f''(x)$.

Løsningsforslag a)

Vi starter med å regne ut den deriverte av f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-\tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2\right)' \\ &= -\tfrac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x \\ &= -x^2 + 4x \end{aligned}$$

Så skal vi regne ut den dobbeltderiverte av f

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f')' \\ &= \left(-x^2 + 4x\right)' \\ &= -2x + 4 \end{aligned}$$

Svar: $f'(x) = -x^2 + 4x$ og $f''(x) = -2x + 4$.

b)

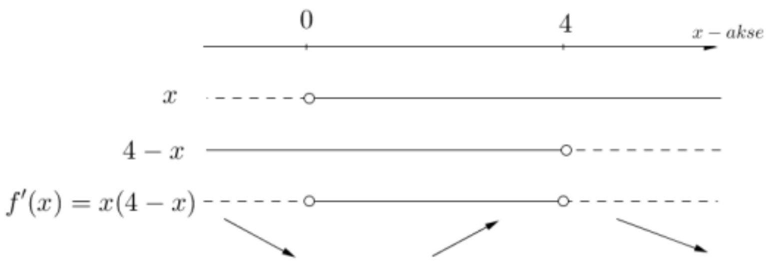
Bestem koordinatene til eventuelle topp-, bunn- og vendepunkter på grafen til f.

Løsningsforslag b)

For å tegne fortegnssjemaet til f', må vi først faktorisere f'

$$\begin{aligned} f' &= -x^2 + 4x \\ &= x(4 - x) \end{aligned}$$

Så når vi tegner opp fortegnssjemaet til f', må vi tegne fortegnslinjene til x og $4 - x$



Vi ser at f synker fram til $x = 0$, der har f et bunnpunkt. Videre stiger f til $x = 4$, hvor f har et toppunkt, hvorpå f synker. Alstå har vi følgende ekstremalpunkter:

1. Bunnpunkt: $(0, f(0)) = (0, 0)$
2. Toppunkt: $\left(4, f\left(4\right)\right) = \left(4, -\frac{1}{3} \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2\right) = \left(4, \frac{32}{3}\right)$

Vi skal nå finne vendepunktet til f. Vi vil løse likningen $f''\left(x\right) = 0$

$$\begin{aligned} f''\left(x\right) &= 0 \\ -2x + 4 &= 0 \\ \frac{-2x}{-2} &= \frac{-4}{-2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Vi sjekker at $f''(x)$ skifter fortegn for $x = 2$ og kan konkludere med at vi har et vendepunkt i punktet $\left(2, f\left(2\right)\right) = \left(2, -\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2\right) = \left(2, \frac{16}{3}\right)$.

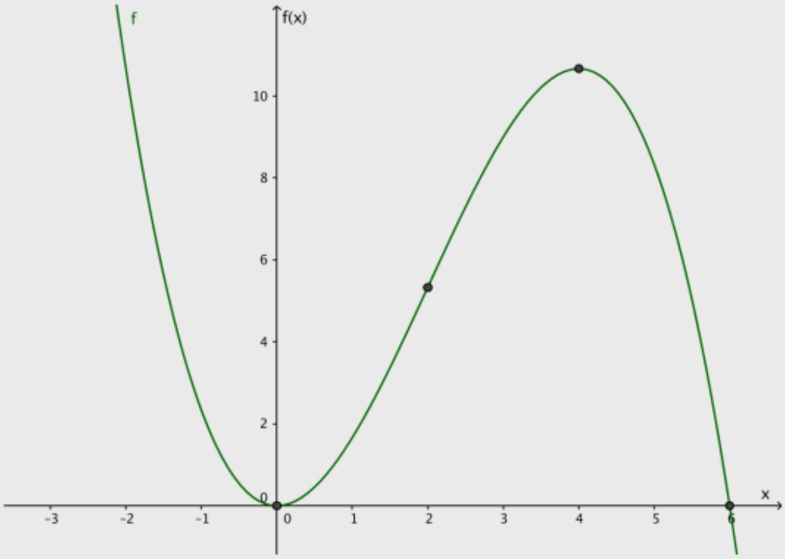
Svar: Vi har følgende punkter:

1. Bunnpunkt: $(0, 0)$
2. Toppunkt: $\left(4, \frac{32}{3}\right)$
3. Vendepunkt $\left(2, \frac{16}{3}\right)$

c)
Lag en skisse av grafen til f. Bruk denne til å avgjøre for hvilke x-verdier $f'(x) > 0$ og samtidig $f''(x) < 0$.

Løsningsforslag c)

Vi tegner opp grafen til f



Vi ser på grafen at $f'(x) > 0$, altså at f stiger mellom bunnpunktet til f og toppunktet til f, altså i intervallet $\langle 0, 4\rangle$.
Vi ser på grafen at $f''(x) < 0$, altså at grafen til f er konkav etter vendepunktet til f, altså i intervallet $\langle 2, \rightarrow\rangle$.

Svar: Fordi $f'(x) > 0$ i intervallet $\langle 0, 4\rangle$ og $f''(x) < 0$ i intervallet $\langle 2, \rightarrow\rangle$, er x element i $\langle 2, 4\rangle$.

Oppgave 7 (3 poeng) Nettkode: E-4CVW

To sirkler S_1 og S_2 er gitt ved

$S_1 \;:\; x^2 + y^2 = 25$

$S_2 \;:\; (x-a)^2 + y^2 = 9$

a)
Tegn sirklene i et koordinatsystem når $a = 6$.

Løsningsforslag a)

Vi kan skrive om sirklene til formen gitt over

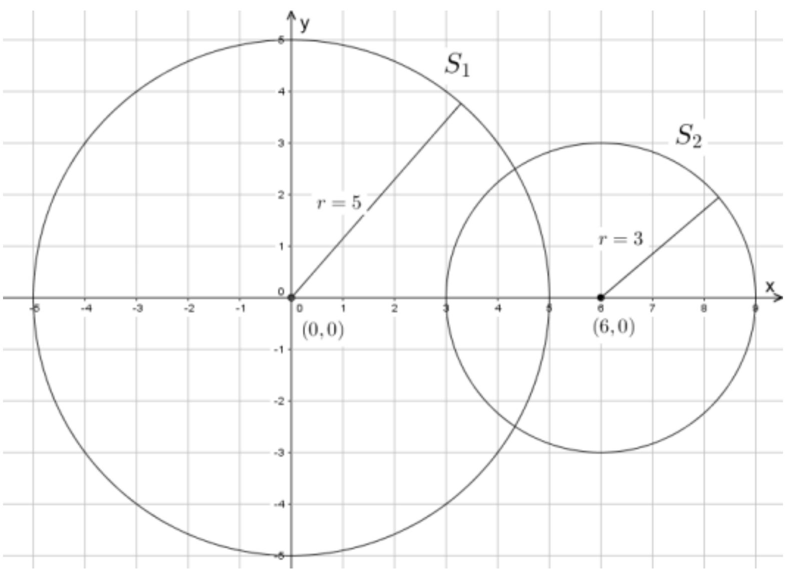
$$S_1 \;:\; (x-0)^2 + (y-0)^2 = 5^2$$
$$S_2 \;:\; (x-6)^2 + (y-0)^2 = 3^2$$

Derfor ser vi at

1. S_1 har sentrum i punktet $(0,0)$ og har radius $r = 5$
2. S_2 har sentrum i punktet $(6,0)$ og har radius $r = 3$

Vi kan nå tegne opp de to sirklene i et koordinatsystem.

Svar:



b)
For hvilke verdier av a vil sirklene tangere hverandre?

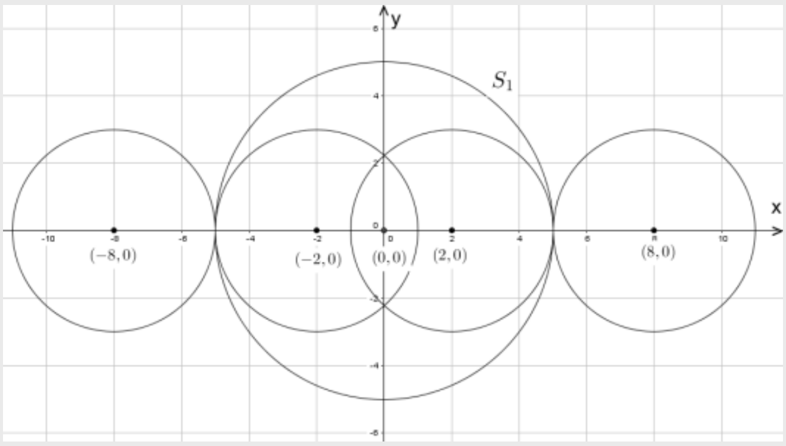
Løsningsforslag b)

Siden S_2 alltid har radius $r = 3$, og sentrum som ligger på x-aksen, har vi de to mulighetene:

1. Sirklene tangerer hverandre i punktet $(-5, 0)$
2. Sirklene tangerer hverandre i punktet $(5, 0)$

Dersom to sirkeler tangerer hverandre i ett punkt, har vi to muligheter. Enten ligger hele den minste sirkelen *inne* i den største sirkelen, eller ligger sirklene *utenfor* hverandre.

Vi har derfor fire muligheter



Vi ser at vi har de fire mulighetene for sentrum av S_2

1. $(-8, 0)$
2. $(-2, 0)$
3. $(2, 0)$
4. $(8, 0)$

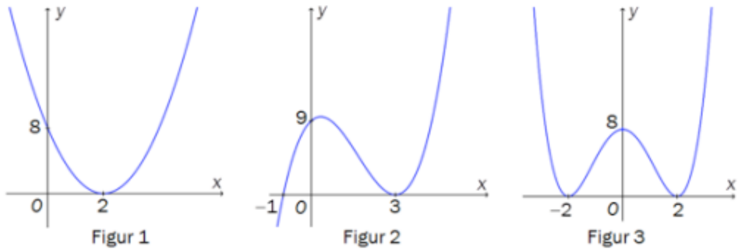
Derfor er de fire verdiene for a, slik at sirklene tangerer hverandre: $a = -8$, $a = -2$, $a = 2$ og $a = 8$.

Svar: De fire verdiene for a, slik at sirklene tangerer hverandre: $a = -8$, $a = -2$, $a = 2$ og $a = 8$.

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng) Nettkode: E-4CW0

Når grafen til en polynomfunksjon tangerer x-aksen i $x = a$, har funksjonen minst to like (sammenfallende) nullpunkter i $x = a$.



a)

Grafen til en andregradsfunksjon f er vist på figur 1. Grafen tangerer x-aksen i $x = 2$.

Forklar at $f(x) = 2 \cdot (x-2)^2$

Løsningsforslag a)

På grunn av nullpunktsfaktorisering nevnt over, vet vi at vi kan faktorisere

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x-2)^2$$

fordi f har bare ett nullpunkt $x_1 = x_2 = 2$. Dessuten vet vi at $f(0) = 8$, og da kan vi finne a

$$\begin{aligned} f(0) &= 8 \\ a(0-2)^2 &= 8 \\ 4a &= 8 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Derfor ser vi at at $f(x) = 2 \cdot (x-2)^2$.

Svar: $\underline{\underline{f(x) = 2 \cdot (x-2)^2}}$

b)
Grafen til en tredjegradsfunksjon g er vist på figur 2. Grafen tangerer x-aksen i $x = 3$.

Forklar at funksjonsuttrykket til g kan skrives på formen $g(x) = k \cdot (x-3)^2 \cdot (x+1)$

Bestem k.

Løsningsforslag b)

Med alt dette i bakhodet er oppgaven enkel! Vi ser at g har et nullpunkt i $x = -1$, og et nullpunkt i $x = 3$ som også er et bunnpunkt. Derfor vet vi at det er et dobbelt nullpunkt i $x = 3$, og vi kan skrive funksjonen

$$g(x) = k \cdot (x-(-1)) \cdot (x-3)^2 = k \cdot (x+1) \cdot (x-3)^2$$

Vi ser også at $g(0) = 9$

$$\begin{aligned} g(0) &= k \cdot (0+1) \cdot (0-3)^2 = 9k = 9 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{k = 1}}$

c)
Grafen til en fjerdegradsfunksjon h er vist på figur 3. Grafen tangerer x-aksen i $x = -2$ og i $x = 2$.

Bestem funksjonsuttrykket $h(x)$.

Løsningsforslag c)

h har dobble nullpunkter i $x = -2$ og $x = 2$. Derfor kan vi skrive h på formen

$$h(x) = k \cdot (x-(-2))^2 \cdot (x-2)^2 = k \cdot (x+2)^2 \cdot (x-2)^2$$

Merk at vi nå har et fjerdegradsuttrykk, så h kan ikke ha flere nullpunkter, eller ha nullpunkter av høyere grad. Det gjenstår bare å finne k. Som før bruker vi at $h(0) = 8$

$$\begin{aligned} h(0) &= k \cdot (0+2)^2 \cdot (0-2)^2 = 16k = 8 \\ k &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{h(x) = \tfrac{1}{2} \cdot (x+2)^2 \cdot (x-2)^2}}$

Oppgave 2 (4 poeng) Nettkode: E-4CW4

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}\ , \quad D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

a)

Bestem asymptotene til f. Tegn grafen til f med asymptoter.

Løsningsforslag a)

Den vertikal asymptoten finner vi der nevneren til funksjonen blir null

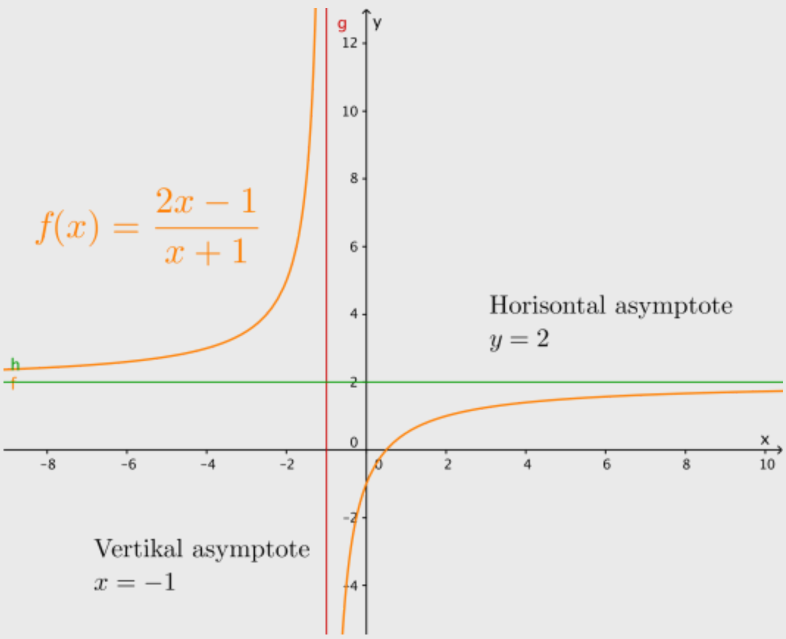
$$\begin{aligned} x+1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Siden telleren er ulik 0 for $x=-1$, blir $x=-1$ likningen for den vertikale asymptoten.

Den horisontale asymptoten finner vi ved å la $x \to \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f\left(x\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \\ &= \frac{2-0}{1+0} = 2 \end{aligned}$$

Derfor er likningen til den horisontale asymptoten gitt ved $y = 2$. Vi tegner opp grafen med asymptotene.



Svar: Den vertikale asymptoten er gitt ved $x = -1$ og den horisontale asymptoten er gitt ved $y = 2$.

b)

Funksjonen g er gitt ved

$g\,(x) = x - 1 \ \ , \quad D_f = \mathbb{R}$

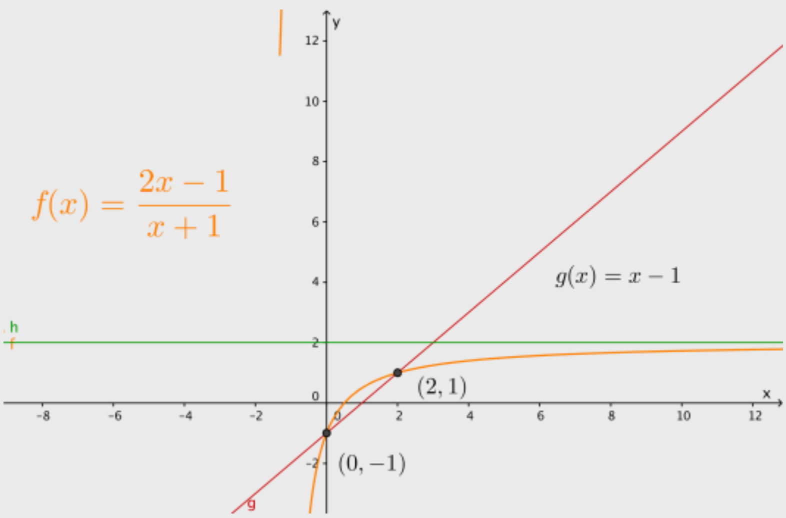
Bestem skjæringspunktene mellom grafene til f og g ved regning.

Løsningsforslag b)

Vi løser likningen under forutsetningen av at x er forskjellig fra 0.

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
\tfrac{2x-1}{x+1} &= x - 1 \quad | \cdot (x+1) \\
\tfrac{2x-1}{x+1} \cdot \big(x+1\big) &= (x-1)\cdot(x+1) \\
2x - 1 &= x^2 - 1 \\
x^2 - 2x &= 0 \\
x(x-2) &= 0 \\
x = 0 \quad \text{eller} \quad & x = 2
\end{aligned}$$

Vi vet nå for hvilke x-verdier grafene krysser hverandre. Det neste er nå å finne for hvilke y-verdier grafene krysser hverandre. Fordi i skjæringspunktet har de to grafene lik y-verdi, holder det å regne ut y-verdiene til g, som er lettere å regne ut.
$g(0) = 0 - 1 = -1$ og $g(2) = 2 - 1 = 1$



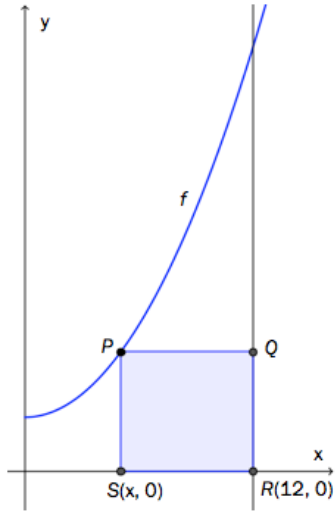
Svar: Skjæringspunktene mellom grafen til f og g er punktene $(0, -1)$ og $(2, 1)$.

Oppgave 3 (6 poeng) Nettkode: E-4CW8

Figuren til høyre viser grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = x^2 + 21 \quad , \quad x \in \langle 0, \rightarrow \rangle$$

Rektangelet $PSRQ$ lages slik at P ligger på grafen til f, punktene S og R ligger på x-aksen, og R og Q har førstekoordinat $x = 12$. Punktet S ligger mellom origo og R.



a)

Forklar at arealet av rektanglet $PSRQ$ kan skrives som

$$A(x) = -x^3 + 12x^2 - 21x + 252 \quad , \quad x \in \langle 0, 12 \rangle$$

Løsningsforslag a)

Lengden av rektangelet er lik lengden fra S til R, som er lik $12 - x$. Bredden er lik lengden fra S til P, som er lik $f(x) - 0 = f(x)$. Derfor blir arealet (lengde·bredde)

$$\begin{aligned} A(x) &= (12 - x) \cdot f(x) = (12 - x)(x^2 + 21) \\ &= 12x^2 + 12 \cdot 21 - x^3 - 21x \\ &= -x^3 + 12x^2 - 21x + 252 \end{aligned}$$

Det gjenstår bare å forklare hvilke x-verdier A kan ta. Vi vet at $x > 0$, ettersom det er gitt i definisjonen av f. Dessuten kan ikke x overskride 12, siden punktet S ligger mellom origo og R.

b)
Bestem $A'(x)$ og bruk denne til å bestemme største og minste verdi som arealet av rektanglet kan ha.

Løsningsforslag b)

Vi starter med å derivere A

$$\begin{aligned} A' &= \left(-x^3 + 12x^2 - 21x + 252\right)' \\ &= -3x^2 + 12 \cdot 2x - 21 \\ &= -3x^2 + 24x - 21 \end{aligned}$$

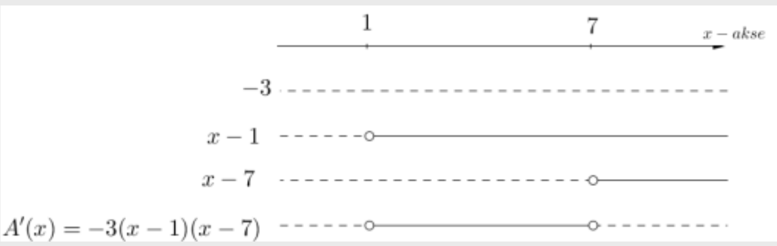
For å tegne fortegnsskjema til A', må vi først faktorisere A'. Da kan vi tegne fortegnslinjene til faktorene som utgjør A'. Siden A' er et andregradsuttrykk, kan vi bruke abc-formelen og nullpunktsfaktorisere $-3x^2 + 24x - 21 = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a} \\ &= \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-21)}}{2 \cdot (-3)} \\ &= \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 252}}{-6} \\ &= \frac{-24 \pm \sqrt{324}}{-6} \\ &= \frac{-24 \pm 18}{-6} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-24+18}{-6} \quad x_2 = \frac{-24-18}{-6}$$

$$x_1 = \frac{-6}{-6} = 1 \quad x_2 = \frac{-42}{-6} = 7$$

Denne utregningen kan du også gjøre digitalt. Derfor kan vi faktorisere $A'\left(x\right) = -3\left(x-1\right)\left(x-7\right)$ og vi kan tegne opp fortegnsskjemaet



Vi ser at A' er negativ fram til $x = 1$, altså synker A. Deretter ser vi at A' er positiv fram til $x = 7$, altså stiger$A$. Til slutt ser vi at A' er negativ fra og med $x = 7$, altså synker A. Vi kan konkludere med at A har et bunnpunkt når $x = 1$ og et toppunkt når $x = 7$.

Derfor har rektangelet størst verdi når $x = 7$, da er arealet

$$\begin{aligned} A(7) &= -7^3 + 12 \cdot 7^2 - 21 \cdot 7 + 252 \\ &= -343 + 588 - 147 + 252 \\ &= 350 \end{aligned}$$

Rektangelet har minst verdi når $x = 1$, da er arealet

$$\begin{aligned} A(7) &= -1^3 + 12 \cdot 1^2 - 21 \cdot 1 + 252 \\ &= -1 + 12 - 21 + 252 \\ &= 242 \end{aligned}$$

Denne fremgangsmåten gir topp- og bunnpunkt på grafen, men den sier ikke hva som skjer når x går mot 12. Derfor er det viktig å se på grafen (se under i oppgave **c**). Den viser at arealet går mot 0 når x går mot 12. Derfor finnes det ingen minste verdi.

Vi må også sjekke hva som skjer når x går mot 0. Uttrykket for $A(x)$ viser at $\lim\limits_{x \to 0^+} A(x) = 252$, så arealet er størst når $x = 7$.

Svar: Den største verdien arealet kan ha er 350, og når x går mot 12, går arealet mot 0.

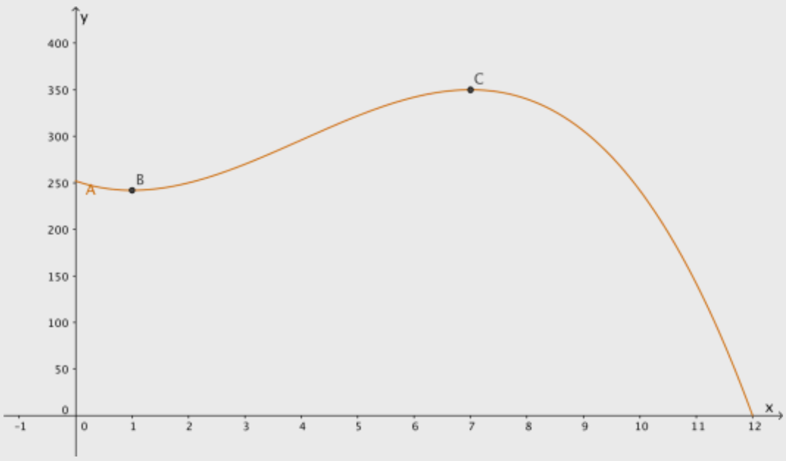
c)

Tegn grafen til A, og kontroller om svarene dine fra oppgave b) stemmer.

Løsningsforslag c)

Framgangsmåte:

1. Vi tegner grafen til A med kommandoen: **funksjon[<funksjon>, <start>, <slutt>]**, der vi bytter ut **<funksjon>** med $-x^3 + 12x^2 - 21x + 252$ og legger inn riktige grenser. Vi setter **<start>** til å være 0 og **<slutt>** til å være 12.
2. Gir nytt navn til funksjonen: A
3. Vi finner ekstremalpunktene med kommandoen: **ekstremalpunkt[<polynom>]**, der vi bytter ut polynom med A.
4. Leser av koordinatene ekstremalpunktene.



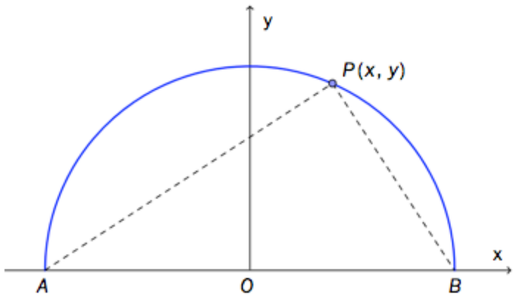
Svar: Vi ser at svarene vi fikk i **b)** stemmer.

Oppgave 4 (4 poeng) Nettkode: E-4CWD

En sirkel med radius r og sentrum i origo er gitt ved

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Punktet $P(x,\, y)$ er et vilkårlig punkt på den øvre halvsirkelen. Se skissen nedenfor.



a)

Bestem koordinatene til punktene A og B uttrykt ved r .

Bestem vektorkoordinatene til $\overrightarrow{PA}$ og $\overrightarrow{PB}$.

Løsningsforslag a)

Vi vet at punktene A og B har avstand r fra origo, og i tillegg ligger de på x-aksen, derfor har vi koordinatene $A(-r, 0)$ og $B(r, 0)$. Siden vi kjenner $P(x, y)$, kan vi regne ut vektorene

1. $\vec{PA} = \left[-r - x, 0 - y\right] = \left[-r - x, -y\right]$
2. $\vec{PB} = \left[r - x, 0 - y\right] = \left[r - x, -y\right]$

Svar: $A(-r, 0)$, $B(r, 0)$, $\vec{PA} = \left[-r - x, -y\right]$ og $\vec{PB} = \left[r - x, -y\right]$

b)

Vis ved vektorregning at $\angle APB = 90^\circ$.

Løsningsforslag b)

Vi regner ut skalarproduktet mellom $\vec{PA} = \left[-r - x, -y\right]$ og $\vec{PB} = \left[r - x, -y\right]$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= [-r - x, -y] \cdot [r - x, -y] \\ &= (-r - x) \cdot (r - x) + y^2 \cdot y \\ &= x^2 - r^2 + y^2 = 0 \end{aligned}$$

Den siste likheten stemmer fordi hvis vi starter med $x^2 + y^2 = r^2$, og flytter r^2 over på andre siden av likhetstegne får vi nettopp likheten over.

Vi har vist at $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$, og derfor vet vi at ∠APB= 90°.

Svar: Vi ser at svarene vi fikk i **b)** stemmer.

Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4CWG

Ved en videregående skole skal elevene velge fag. Hendelsene M og F definerer vi slik:

M : Eleven velger matematikk.

F : Eleven velger fysikk.

Vi får opplyst at $P(M) = 0{,}64$, $P(F) = 0{,}32$ og $P\left(\overline{M \cup F}\right) = 0{,}30$.

a)

Bestem $P(M \cap F)$ og $P\left(M \cap \bar{F}\right)$.

Løsningsforslag a)

Vi fyller ut resten av krysstabellen (bruk summene som står der)

	Matematikk	Ikke matematikk	SUM
$Fysikk$	$0,26$	$0,06$	$0,32$
$Ikke\ Fysikk$	$0,38$	$0,30$	$0,68$
SUM	$0,64$	$0,36$	$1,00$

1. $P(M \cap F)$ betyr sannsynligheten for de som har valgt både matematikk og fysikk. Vi leser av i tabellen og ser at det står $0{,}26$.

2. $P\left(M \cap \bar{F}\right)$ betyr sannsynligheten for de som har valgt matematikk, men ikke fysikk. Vi leser av i tabellen og ser at det står $0{,}38$.

Svar: $P(M \cap F) = 0{,}26$ og $P\left(M \cap \bar{F}\right) = 0{,}38$.

b)

Bestem $P(F|M)$. Undersøk om hendelsene M og F er uavhengige.

Løsningsforslag b)

Siden gunstige er $P(M \cap F)$ og mulige er $P(M)$, får vi regnestykket
$P\left(F\middle|M\right) = \frac{P(M \cap F)}{P(M)} = \frac{0{,}26}{0{,}64} \approx 0,41$

I tillegg sjekker vi om M og F er uavhengige:
Siden $P(F|M) = 0,41$ og $P(F) = 0,32$ er M og F ikke uavhengige.

Svar: $P(F|M) \approx 0{,}41$ og M og F er ikke uavhengige.

c)

Bruk Bayes' setning til å bestemme $P(M|F)$.

Løsningsforslag c)

Vi setter inn tallene i formelen$\mathrm{P(M|F)} = \frac{\mathrm{P(F|M)} \cdot \mathrm{P}(M)}{\mathrm{P(F)}} = \frac{\frac{0{,}26}{0{,}64} \cdot 0{,}64}{0{,}32} \approx 0,81$

Svar: $P(M|F) = 0{,}81$.

Oppgave 6 (8 poeng) Nettkode: E-4CWK

I et koordinatsystem har vi gitt punktene $A(-3,\ -3)$, $B(3,\ 1)$ og $D(-2,\ 2)$.

a)

Bestem $\angle BAD$ og arealet av ΔABD .

Løsningsforslag a)

Vi starter med å regne ut vektorene $\vec{AB}$ og $\vec{AD}$

1. $\vec{AB} = \left[3 - \left(-3\right), 1 - \left(-3\right)\right] = \left[6, 4\right]$
2. $\vec{AD} = \left[-2 - \left(-3\right), 2 - \left(-3\right)\right] = \left[1, 5\right]$

Så trenger vi lengden av vektorene og skalarproduktet imellom dem

1. $\left|\vec{AB}\right| = \left|\left[6, 4\right]\right| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$
2. $\left|\vec{AD}\right| = \left|\left[1, 5\right]\right| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$
3. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \left[6, 4\right] \cdot \left[1, 5\right] = 6 \cdot 1 + 4 \cdot 5 = 26$

Da får vi at

$$
\begin{aligned}
\left|\vec{AB}\right|\left|\vec{AD}\right|\cos\angle BAD &= \vec{AB} \cdot \vec{AD} \\
\sqrt{52} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos\angle BAD &= 26 \\
\cos\angle BAD &= \frac{26}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{26}} \\
\cos\angle BAD &= \frac{26}{\sqrt{2 \cdot 26} \cdot \sqrt{26}} \\
\cos\angle BAD &= \frac{26}{\sqrt{2} \cdot 26} \\
\cos\angle BAD &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\cos\angle BAD &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\
\cos\angle BAD &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\angle BAD &= \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
\angle BAD &= 45^\circ
\end{aligned}
$$

Nå kan vi bruke arealsetningen til å regne ut arealet av trekanten

$$T = \frac{1}{2} \cdot p \cdot q \cdot \sin v$$

$$T = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\right|\left|\vec{AD}\right|\sin\angle BAD$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{52} \cdot \sqrt{26} \cdot \sin\angle 45^\circ$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$T = 13$$

Svar: $\angle BAD = 45\%$ og arealet av ΔABD er 13.

b)

Et punkt C er gitt ved at $DC \parallel AB$ og $\angle ABC = 90^\circ$.

Bestem ved regning koordinatene til C.

Løsningsforslag b)

Siden $\vec{DC}$ er parallell med $\vec{AB}$ får vi $\vec{DC} = s \cdot \vec{AB}$.

$$\vec{AB} = \left[3 - \left(-3\right), 1 - \left(-3\right)\right] = \left[6, 4\right]$$

$$\vec{CD} = \left[-2 - x, 2 - y\right]$$

$$[-2 - x, 2 - y] = s[6, 4]$$

$$-2 - x = 6s \quad \text{og} \quad 2 - y = 4s$$

$$s = \frac{-2-x}{6} \quad \text{og} \quad s = \frac{2-y}{4}$$

$$\frac{-2-x}{6} = \frac{2-y}{4} \quad \Big| \cdot 12$$

$$-4 - 2x = 6 - 3y$$

$$3y - 2x = 10$$

Ut ifra dette har vi fått en sammenheng mellom x-verdien og y-verdien til C.

Siden $\angle$ABC=90° vet vi at $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$. $\vec{BC} = \left[x - 3, y - 1\right]$ så derfor får vi

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$$
$$[6, 4] \cdot [x - 3, y - 1] = 0$$
$$6(x - 3) + 4(y - 1) = 0$$
$$6x - 18 + 4y - 4 = 0$$
$$6x + 4y = 22$$
$$3x + 2y = 11$$

Altså har vi en til sammenheng mellom x-verdien og y-verdien til C. Nå kan vi løse de to som et likningssett.

$$\begin{cases} 3y - 2x = 10 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$$

Her kan vi bruke addisjonsmetoden ved å gange den øverste likningen med 3, og den nederste med 2, for deretter å legge sammen de to likningene (på denne måten blir vi kvitt x).

$$\begin{cases} 9y - 6x = 30 \\ 6x + 4y = 22 \end{cases}$$

Legger vi disse sammen får vi

$$\begin{aligned} 9y - 6x + 6x + 4y &= 30 + 22 \\ 13y &= 52 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Til slutt setter vi $y = 4$ inn i en av de andre likningene for å finne x.

$$\begin{aligned} 9 \cdot 4 - 6x &= 30 \\ 36 - 6x &= 30 \\ 36 - 30 &= 6x \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Svar: C har koordinatene $(1,4)$.

c)

En parameterframstilling for linjen l som går gjennom C og D, er gitt ved

$$l: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

Et punkt E har koordinatene $(s,\ 2s - 2)$.

Bestem ved regning en verdi for s slik at E ligger på l.

Løsningsforslag c)

På grunn av dette har vi likningen

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= y \\ 2(-2 + 3t) - 2 &= 2 + 2t \\ -4 + 6t - 2 &= 2 + 2t \\ 4t &= 8 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

Verdien s slik at E ligger på linja er når $t = 2$, altså når

$$\begin{cases} x = -2 + 3 \cdot 2 = 4 \\ y = 2 + 2 \cdot 2 = 6 \end{cases}$$

Altså er $s = 4$.

Svar: $\underline{\underline{s = 4,\ E(4,6)}}$

d)

Bestem koordinatene til punktet E når $\left|\overrightarrow{AE}\right| = \left|\overrightarrow{BE}\right|$.

Løsningsforslag d)

Vi regner ut utrykkene for de to lengdene hver for seg

$|\vec{\mathrm{AE}}| = |[s-(-3), 2s-2-(-3)]| = |[s+3, 2s+1]|$

$= \sqrt{(s+3)^2 + (2s+1)^2} = \sqrt{s^2+6s+9+4s^2+4s+1} = \sqrt{5s^2+10s+10}$

$\left|\vec{\mathrm{BE}}\right| = \left|\left[s-3, 2s-2-1\right]\right| = \left|\left[s-3, 2s-3\right]\right|$

$= \sqrt{(s-3)^2+(2s-3)^2} = \sqrt{s^2-6s+9+4s^2-2s+9} = \sqrt{5s^2-18s+18}$

Så setter vi disse lik hverandre

$$\begin{aligned}
\sqrt{5s^2+10s+10} &= \sqrt{5s^2-18s+18} \\
\left(\sqrt{5s^2+10s+10}\right)^2 &= \left(\sqrt{5s^2-18s+18}\right)^2 \\
5s^2+10s+10 &= 5s^2-18s+18 \\
5s^2-5s^2+10s+18s &= 18-10 \\
28s &= 8 \\
s &= \tfrac{2}{7}
\end{aligned}$$

Derfor får vi koordinatene $E\left(\frac{2}{7}, -\frac{10}{7}\right)$.

Svar: $E\left(\frac{2}{7}, -\frac{10}{7}\right)$.

Oppgave 7 (2 poeng) Nettkode: E-4CWP

Løs likningen med hensyn på x

$n^2 \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{lg(x)-2} = x^2 \quad , \quad x > 0 \wedge n > 0$

Løsningsforslag

Når vi deler på n^2 på begge sider av likningen, så man får likningen på formen

$$\left(\frac{x}{n}\right)^{\lg(x)-2} = \left(\frac{x}{n}\right)^2$$

Vi ser at på begge sider har vi $\frac{x}{n}$ opphøyd i noe. Så med mindre $\frac{x}{n}$ er lik 1, -1 eller 0, kan vi konkludere med at eksponenten på venstre side er lik eksponenten på høyre side.

Først ser vi at $\frac{x}{n} = -1$ og $\frac{x}{n} = 0$ fører til at $x = -n$ og $x = 0$, som ikke går fordi $x > 0$ og $n > 0$.

$\frac{x}{n} = 1$ gir $x = n$, som er en løsning.

Dersom eksponentene er lik hverandre har vi $\lg(x) - 2 = 2 \Rightarrow \lg(x) = 4$ som gir $x = 10^4 = 10000$, som er den andre løsningen.

Svar: $x = n$ eller $x = 10000$.