Mat1015 2013 Høst

Eksamenstid:

5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:

Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Du skal svare på alle oppgavene.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.

- Fotball: http://www.vg.no/sport/fotball/norsk/artikkel.php?artid=10078823 (12.02.2013)
- Tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng) Nettkode: E-4BQD

I en klasse er det 20 elever. Nedenfor ser du hvor mange dager hver av elevene var borte fra skolen i løpet av et skoleår.

0 3 2 7 2 0 0 11 4 3 28 1 0 3 2 1 1 0 0 32

a)
Bestem gjennomsnitt, median og typetall for elevenes fravær dette skoleåret.

Løsningsforslag a)

For å finne *medianen* flytter vi rundt på tallene i rekken slik at de kommer i stigende rekkefølge.

$$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3\ 4\ 7\ 11\ 28\ 32$$

Medianen av disse tallene, er gjennomsnittet av de to midterste tallene. (Hvis det var et odde antall tall, hadde medianen vært det midterste tallet.) Det er gjennomsnittet av tall nummer 10 og tall nummer 11, siden det er 20 elever. Tall nummer 10 er 2, og tall nummer 11 er også 2, så medianen er 2.

Videre skal vi finne *gjennomsnittet* av tallene. Gjennomsnittet er

$\frac{\text{antall fraværsdager}}{\text{antall elever}}$

Det er 20 elever til sammen. Gjennomsnittet er derfor

$$\frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 + 7 + 11 + 28 + 32}{20} = \frac{100}{20} = 5.$$

(Her har vi telt at det var 3 elever som hadde 1 fraværsdag, 3 som hadde 2 fraværsdager, og så videre.)

Typetallet er det tallet som forekommer flest ganger i datamaterialet. I vårt tilfelle er typetallet 0, som forekommer seks ganger.

Svar: Medianen er 2, gjennomsnittet er 5 og typetallet er 0.

b)
Dersom du skulle presentere et sentralmål for klassens fravær dette skoleåret, ville du da brukt gjennomsnitt eller median? Forklar hvorfor.

Løsningsforslag b)

Svar: To av elevene hadde veldig høyt fravær, som drar *gjennomsnittet* uforholdsmessig opp. *Medianen* tar ikke hensyn til disse, så medianen er å foretrekke over gjennomsnittet. Videre er typetallet 0, og det gir oss ikke noe særlig informasjon. Derfor er medianen sannsynligvis det beste sentralmålet.

Oppgave 2 (1 poeng) Nettkode: E-4BQG

Regn ut og skriv svaret på standardform

$3{,}2 \cdot 10^8 \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-3}$

Løsningsforslag

Vi kan bytte om på rekkefølgen i produktet. Vi vil ha alle tierpotenser for seg selv. Da kan vi skrive tallet som

$$3,2 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 3,2 \cdot 4 \cdot 10^8 \cdot 10^{-3}.$$

Potensreglene sier at vi kan legge sammen eksponenter hvis potensene har samme grunntall. Derfor får vi $10^8 \cdot 10^{-3} = 10^{8-3} = 10^5$. Nå kan vi skrive tallet som $3,2 \cdot 4 \cdot 10^5$, og dette er nesten på standardform. Vi ser at $3,2 \cdot 4 = 12,8$; tallet foran tierpotensen i $12,8 \cdot 10^5$ er *ikke* mellom 1 og 10, så vi må faktorisere ut en tier. Vi ser at $12,8 = 1,28 \cdot 10$, så vi får

$$1,28 \cdot 10 \cdot 10^5 = 1,28 \cdot 10^{1+5} = 1,28 \cdot 10^6,$$

og dette er på standardform.

Svar: $1,28 \cdot 10^6$.

Oppgave 3 (3 poeng) Nettkode: E-4BQI

Skriv så enkelt som mulig

a)

$\left(2^2\right)^{-3} \cdot 4^4$

Løsningsforslag a)

Vi husker at $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$. Når vi skal forenkle potensuttrykk, er det lurt å gjøre om *potensene* slik at de har likt *grunntall*. Vi vet at 4 kan skrives som 2^2, så $4^4 = \left(2^2\right)^4$. Når vi har en potens opphøyd i noe, kan vi multiplisere inn *eksponenten*; derfor får vi $\left(2^2\right)^4 = 2^{2\cdot 4} = 2^8$. På samme måte har vi at $\left(2^2\right)^{-3} = 2^{2\cdot(-3)} = 2^{-6}$. Dermed kan vi skrive uttrykket som følger:

$$\left(2^2\right)^{-3} \cdot 4^4 = 2^{-6} \cdot 2^8.$$

Dette er to potenser med samme grunntall som multipliseres, og da kan vi legge sammen eksponentene. Til slutt får vi

$$2^{-6} \cdot 2^8 = 2^{-6+8} = 2^2 = 4.$$

Svar: 4

b)

$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{\left(2^3\right)^2 \cdot 3^{-1}}{6}$

Løsningsforslag b)

Vi starter med $\left(\frac{3}{2}\right)^2$. Vi kan multiplisere *eksponenten* inn i eksponentene til *telleren* og *nevneren*:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3^1}{2^1}\right)^2 = \frac{3^{1\cdot 2}}{2^{1\cdot 2}} = \frac{3^2}{2^2}.$$

Vi kan få bort brøkstreken ved å multiplisere med 2^{-2} over og under. Da får vi

$$\frac{3^2 \cdot 2^{-2}}{2^2 \cdot 2^{-2}} = \frac{3^2 \cdot 2^{-2}}{2^0} = 3^2 \cdot 2^{-2}.$$

Videre prøver vi å forenkle telleren i brøken, $\left(2^3\right)^2 \cdot 3^{-1}$. Eksponenten kan multipliseres inn, og vi får $2^{3\cdot 2} \cdot 3^{-1} = 2^6 \cdot 3^{-1}$. Vi husker at $6 = 3 \cdot 2$, og derfor kan brøken skrives som

$$\frac{\left(2^3\right)^2 \cdot 3^{-1}}{6} = \frac{2^6 \cdot 3^{-1}}{2 \cdot 3}.$$

Vi kan få bort brøkstreken ved å multiplisere med $2^{-1} \cdot 3^{-1}$ over og under.

$$\frac{2^6 \cdot 3^{-1} \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-1}}{2 \cdot 3 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-1}}.$$

Her er nevneren $2^{1-1} \cdot 3^{1-1} = 1$, så uttrykket over er lik $2^6 \cdot 3^{-1} \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-1}$. Her kan vi legge sammen noen eksponenter, og vi får

$$2^{6-1} \cdot 3^{-1-1} = 2^5 \cdot 3^{-2}.$$

Nå kan vi skrive hele uttrykket slik:

$$\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{\left(2^3\right)^2 \cdot 3^{-1}}{6} = 3^2 \cdot 2^{-2} \cdot 2^5 \cdot 3^{-2}.$$

Vi legger sammen eksponentene til potensene med samme grunntall, og får

$$3^{2-2} \cdot 2^{-2+5} = 3^0 \cdot 2^3 = 2^3 = 8.$$

Svar: $\underline{\underline{2^3 = 8}}$.

Oppgave 4 (2 poeng) Nettkode: E-4BQL

Per satte inn 200 000 kroner i banken 1. januar 2008. Renten har vært 4,65 % per år.

Sett opp et uttrykk som viser hvor mye penger Per har fått i rente i løpet av de fem årene fra 1. januar 2008 til 1. januar 2013.

Løsningsforslag

Her skal vi bruke *vekstfaktoren*. Etter ett år har beløpet økt med $4,65\ \%$, og det nye beløpet i banken er dermed $200\,000\ \mathrm{kr} \cdot 1,0465$. Dette beløpet øker igjen med $4,65\ \%$ det påfølgende året, så beløpet det neste året er $\left(200\,000 \cdot 1,0465\ \mathrm{kr}\right) \cdot 1,0465 = 200\,000 \cdot 1,0465^2\ \mathrm{kr}$. Etter 5 år vil beløpet være $200\,000 \cdot 1,0465^5\ \mathrm{kr}$. *Renten* kan regnes ut ved å trekke fra det opprinnelige beløpet:

$$\text{renter} = \text{sluttbeløp} - \text{startbeløp}.$$

Vi startet med $200\,000\ \mathrm{kr}$, så rentene blir

$$\text{renter} = 200\,000 \cdot 1,0465^5\ \mathrm{kr} - 200\,000\ \mathrm{kr} = 200\,000 \cdot \left(1,0465^5 - 1\right)\ \mathrm{kr}.$$

Svar: $200\,000 \cdot 1,0465^5\ \mathrm{kr} - 200\,000\ \mathrm{kr}$, eller $200\,000 \cdot \left(1,0465^5 - 1\right)\ \mathrm{kr}$.

Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4BQN

Ifølge en undersøkelse kan et 20 måneder gammelt barn i gjennomsnitt 300 ord. Et 50 måneder gammelt barn kan i gjennomsnitt 2100 ord.

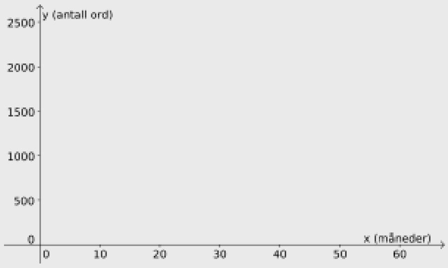
a)

Framstill opplysningene ovenfor som punkter i et koordinatsystem med måneder som enhet langs x - aksen og ord som enhet langs y - aksen.

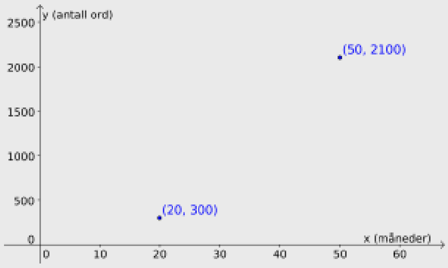
Trekk en rett linje gjennom punktene.

Løsningsforslag a)

Det første vi gjør, er å tegne et *koordinatsystem*. Langs *x-aksen* skal det være måneder, så vi lar aksen gå fra 0 til 60. Siden *y-aksen* representerer antall ord, lar vi den gå fra 0 til 2 500. Vi husker på å sette passende navn på aksene.

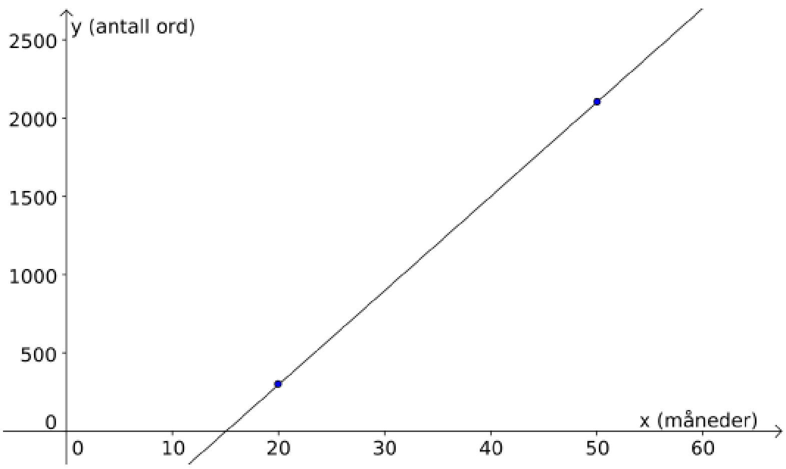


Nå skal vi tegne inn punktene. Et barn på 20 måneder kan i gjennomsnitt 300 ord, og det tilsvarer punktet $(20, 300)$ i koordinatsystemet. Tilsvarende tegner vi inn punktet $(50, 2100)$.



Til slutt tegner vi den rette streken mellom punktene med linjal. Resultatet er vist under.

Svar:



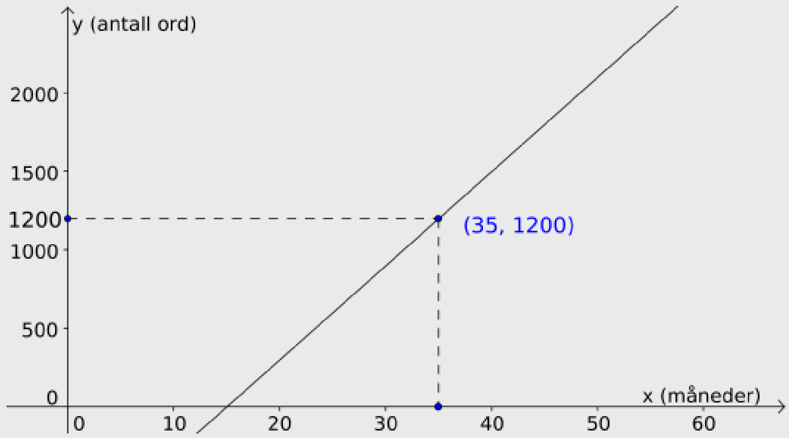
b)

Linjen i oppgave a) kan brukes som modell for sammenhengen mellom et barns alder og hvor mange ord barnet kan.

Bruk linjen til å anslå hvor mange ord et 35 måneder gammelt barn i gjennomsnitt kan.

Løsningsforslag b)

Vi finner $x = 35$ i koordinatsystemet vårt, og går loddrett oppover til vi treffer linjen. Da er *y-koordinaten* et anslag på hvor mange ord et 35 år gammelt barn kan.



Vi ser at $y-$koordinaten til skjæringspunktet er 1200.

Svar: 1200 ord

c)

Bestem et matematisk uttrykk for modellen. Kommenter modellens gyldighetsområde.

Løsningsforslag c)

Funksjonsuttrykket til en rett linje er på formen $y = ax + b$. Vi kan finne dette uttrykket ved å finne *stigningstallet* og *konstantleddet* til *likningen*. Vi vil finne *konstantene* a og b i uttrykket $y = ax + b$. Tallet a er stigningstallet til likningen, og b er konstantleddet. Vi vet at når x øker fra 20 til 50, så øker y fra 300 til 2 100. Det er en økning på $2100 - 300 = 1800$ i y-verdi, og en økning på $50 - 20 = 30$ i x-

verdi. Dermed er stigningstallet til linjen $\frac{1800}{30} = 60$. Vi har altså funnet ut at $a = 60$. Videre skal vi finne konstantleddet (der linjen krysser y-aksen). Vi vet at linjen går gjennom punktet $(20, 300)$, og at linjen synker med 60 hvis vi lar x bli 1 mindre. Hvis vi lar x bli 20 mindre, må y-verdien bli $20 \cdot 60 = 1200$ mindre, som gir en y-verdi på $300 - 1200 = -900$. Derfor går linjen gjennom punktet $(0, -900)$. Siden x-verdien er 0, går linjen gjennom y-aksen her, så konstantleddet er $b = -900$. Dermed har vi funnet ut at likningen til linjen er

$$y = 60 \cdot x - 900.$$

Formelen er ikke gyldig der den gir negative y-verdier, altså der $x < 15$, fordi det ikke er mulig å kunne et negativt antall ord.

Svar: Likningen til linjen er $y = 60 \cdot x - 900$. Grafen gjelder ikke der $y < 0$, altså der $x < 15$.

Oppgave 6 (2 poeng) Nettkode: E-4BQS

Lommepenger (kroner)	Antall elever
$[0{,}300\rangle$	30
$[300{,}600\rangle$	15
$[600{,}900\rangle$	5

Tabellen ovenfor viser hvor mye lommepenger elevene ved en skole får en måned.

Hvor mye får elevene ved skolen i gjennomsnitt i lommepenger denne måneden?

Løsningsforslag

Det er 30 elever som fikk mellom 0 og 300 kroner i lommepenger. Vi antar at elevene fikk lommepenger jevnt fordelt utover dette intervallet, slik at de *gjennomsnittlig* fikk $\frac{300}{2} = 150$ kroner i lommepenger. Tilsvarende antar vi at de 15 elevene som fikk lommepenger i intervallet $[300, 600\rangle$ fikk i gjennomsnitt $\frac{600+300}{2} = 450$, og elevene med lommepenger i intervallet $[600, 900\rangle$ har et gjennomsnitt på $\frac{900+600}{2} = 750$ kroner. Når vi skal regne gjennomsnittet, er dette det samme som å anta at 30 elever fikk 150 kroner, 15 elever fikk 450 kroner og at 5 elever fikk 750 kroner. Gjennomsnittet blir da $\text{gjennomsnitt} = \frac{\text{lommepenger totalt}}{\text{antall elever}} = \frac{30\cdot 150\text{ kr}+15\cdot 450\text{ kr}+5\cdot 750\text{ kr}}{30+15+5}$. Vi vet at $3 \cdot 15 = 45$, og derfor er $30 \cdot 150 = 4\,500$. Vi vet også at $4 \cdot 7,5 = 30$, som betyr at $4 \cdot 750 = 3\,000$; derfor må $5 \cdot 750 = 3\,750$. Vi tar $15 \cdot 450$ for hånd.

```
 2 2
  1 5 · 4 5 0 = 6 7 5 0
  0 0
 7 5
6 0
6 7 5 0
```

Vi regner ut telleren i uttrykket for gjennomsnittet.

```
    2 1
    4 5 0 0
+   6 7 5 0
+   3 7 5 0
= 1 5 0 0 0
```

Nevneren er $30 + 15 + 5 = 50$, så gjennomsnittet blir

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{15\,000\text{ kr}}{50} = \frac{50 \cdot 300\text{ kr}}{50} = 300\text{ kr}.$$

Svar: 300 kroner, gitt at informasjonen er jevnt fordelt i klassene.

Oppgave 7 (2 poeng) Nettkode: E-4BQU

Beskriv en praktisk situasjon der funksjonen f gitt ved $f\,(x) = 300\,000 \cdot 0{,}9^x$ kan brukes som modell.

Løsningsforslag

Funksjonen $f(x) = 300\,000 \cdot 0{,}9^x$ er en *eksponentialfunksjon* som beskriver en størrelse som starter på $300\,000$ og minker med $10\ \%$ når x øker med 1. Dette ser vi fordi $0,9$ er *prosentfaktoren* til $90\ \%$, som er *vekstfaktoren* til $-10\ \%$. Vi er bedt om å finne en praktisk situasjon der dette kan være tilfelle.

Svar: Én situasjon er der $f(x)$ er antall radioaktive isotoper i et stoff etter x år. En annen situasjon er der $f(x)$ er mengden væske i en tank etter x måneder, og at $10\ \%$ av væsken fordamper hver måned. Det kan også tenkes at $f(x)$ er verdien til et produkt (for eksempel en bil) i x år etter man kjøpte den.

Oppgave 8 (4 poeng) Nettkode: E-4BQW

Viktig kommentar: Omforming til og fra binære tall er ikke lenger med i læreplanen for 2P.

a)

Skriv tallene 11, 22 og 44 i totallsystemet.

Løsningsforslag a)

Vi starter med 11. Vi vet at $2^3 = 8$ og at $2^4 = 16 > 11$. Vi kan skrive tallet på formen $11 = 1 \cdot 2^3 + 3$. Derfor består binærformen av 11 av fire sifre, der det første sifferet er 1. Videre kan vi skrive 3 som $3 = 2 + 1 = 2^1 + 2^0$. Totalt kan vi skrive 11 som $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$, som er tallet 1011 i totallsystemet.

Videre prøver vi oss på 22. Vi vet at $2^4 = 16$ er en største toerpotensen som er mindre enn 22. Vi har $22 - 16 = 6$, og 6 kan skrives som $6 = 2^2 + 2^1$, så vi kan skrive 22 som $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1$, eller $1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$. I totallsystemet er dette 10110.

Vi gjør det samme med 44. Vi har at $2^5 = 32$, og $44 - 32 = 12 = 2^3 + 2^2$, så $44 = 2^5 + 2^3 + 2^2$. I totallsystemet er dette 101100.

Svar: $11_{10} = 1011_2$, $22_{10} = 10110_2$, og $44_{10} = 101100_2$.

b)

Formuler en regel for hvordan vi dobler et tall i totallsystemet.

Løsningsforslag b)

I forrige oppgave regnet vi ut at $11_{10} = 1011_2$, $22_{10} = 10110_2$, og $44_{10} = 101100_2$. Hver gang vi doblet tallet, altså hver gang vi multipliserte tallet med 2, la vi bare på en null i totallsystemet. Dette er det samme som å multiplisere med 10 i titallsystemet – vi har at $11 \cdot 10 = 110$, $110 \cdot 10 = 1\,100$, og så videre. Effekten er den samme fordi $2_{10} = 10_2$.

Svar: Hvis man dobler et tall i totallsystemet, legger man til en null på slutten av tallet.

c)

Tallene 121_3 og 120010_3 er skrevet i tretallsystemet.

Hvilket tall i tretallsystemet er tre ganger så stort som tallet 121_3? Hvilket tall i tretallsystemet er en tredjedel av tallet 120010_3?

Løsningsforslag c)

Da vi doblet et tall i totallsystemet, la vi på en 0 på slutten av tallet. På tilsvarende måte kan vi ta bort en 0 hvis vi dividerer med 3. Dette skjer også med multiplikasjon og divisjon med 10 i titallsystemet; $3 \cdot 10 = 30$ og $\frac{610}{10} = 61$. Det er det samme med tretallsystemet og multiplikasjon og divisjon med 3. Hvis vi multipliserer 121_3 med 3 vil vi derfor få 1210_3, og hvis vi dividerer 120010_3 med 3 får vi 12001_3.

Svar: Hvis vi multipliserer 121_3 med 3 får vi 1210_3, og hvis vi dividerer 120010_3 med 3 får vi 12001_3.

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng) Nettkode: E-4BR1

Ovenfor ser du hvor mange utenlandske spillere som spilte i den norske eliteserien hvert år i perioden 2000–2012.

Bestem gjennomsnitt og standardavvik for dette datamaterialet.

Løsningsforslag

Vi bruker Excel. Det første vi gjør er å legge inn all informasjonen fra tabellen. I tabellen under har vi ikke tatt med hvilket år som antallet spillere tilsvarer, for dette er ikke nødvendig informasjon når vi skal regne *gjennomsnitt* og *standardavvik*.

	A	B	C
1	Antall uten-landske spillere	Gjennomsnitt	Standardavvik
2	45		
3	55		
4	62		
5	63		
6	72		
7	80		
8	100		
9	108		
10	117		
11	114		
12	111		
13	94		
14	106		

All informasjonen ligger nå i rutene fra og med A2 til og med A14. For å regne gjennomsnitt, skriver vi

```
=GJENNOMSNITT(A2:A14)
```

og for å finne standardavviket, skriver vi

```
=STDAV.P(A2:A14)
```

Vi bruker STDAV.P fordi vi vil regne ut standardavviket for hele datasettet. Hvis vi hadde brukt STDAV, ville vi fått estimerte verdier basert på utvalg. Nå ser tabellen vår slik ut.

	A	B	C
1	Antall uten-landske spillere	Gjennomsnitt	Standardavvik
2	45	86.692307692	23.998027532
3	55		
4	62		
5	63		
6	72		
7	80		
8	100		
9	108		
10	117		
11	114		
12	111		
13	94		
14	106		

Dermed er gjennomsnittet av antall utenlandske spillere i perioden 2000–2012 lik cirka $86,69$, mens standardavviket er rundt 24.

Svar: Gjennomsnittet er cirka $86,69$, mens standardavviket er rundt 24.

Oppgave 2 (2 poeng) Nettkode: E-4BRX

	Antall elever
Går	4
Sykler	7
Kjøre privat bil	3
Tar buss	10
Tar tog	6

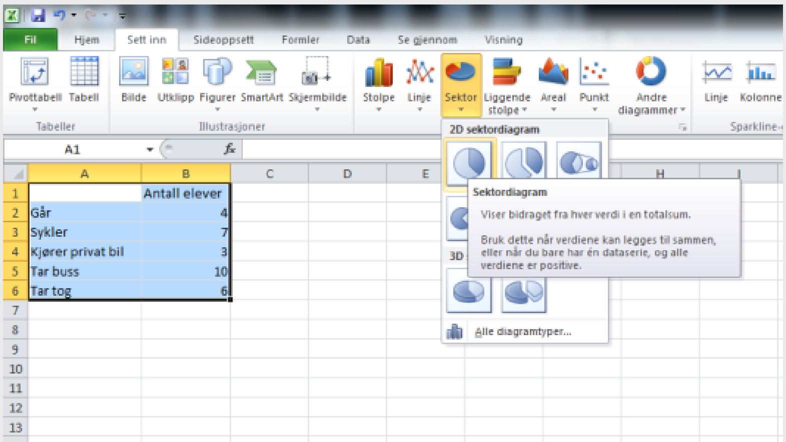
I tabellen ovenfor ser du hvordan elevene i en klasse kommer seg til og fra skolen. Bruk et sektordiagram til å presentere datamaterialet fra tabellen.

Løsningsforslag

Vi bruker Excel. Det første vi gjør er å kopiere av tabellen til regnearket.

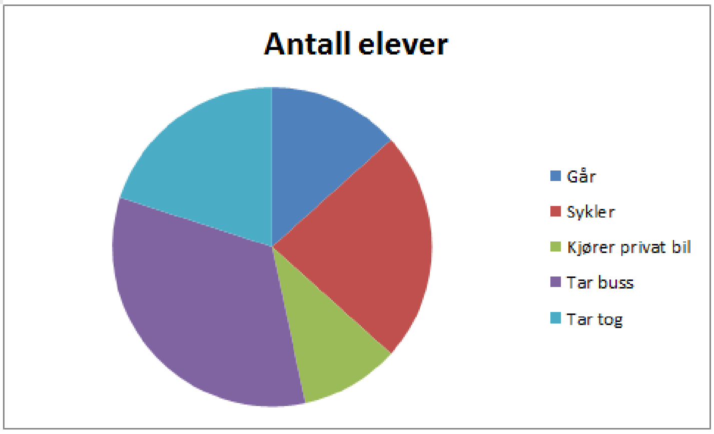
	Antall elever
Går	4
Sykler	7
Kjører privat bil	3
Tar buss	10
Tar tog	6

Nå kan vi lage sektordiagrammet. Vi går i "Sett inn"-menyen og velger sektordiagram.



Resultatet er vist under.

Svar:



Oppgave 3 (4 poeng) Nettkode: E-4BS9

I et atomkraftverk omdannes radioaktive atomkjerner. I omdanningen forsvinner noe av massen fra atomkjernene, og energi blir frigitt.

Når massen m kilogram forsvinner fra atomkjernene, er den frigitte energien, E Joule (J), gitt ved

$E = m \cdot c^2$

Konstanten c har verdien $3{,}0 \cdot 10^8$

a)

Hvor mye energi blir frigitt når en masse på $0{,}010$ kg forsvinner fra atomkjernene?

Løsningsforslag a)

Vi har $E = m \cdot c^2$, der m er massen i kilogram, og $c = 3 \cdot 10^8$. Tallet E er den frigitte energien i Joule (J) når massen $m\,\mathrm{kg}$ forsvinner fra atomkjernene. I vårt tilfelle er $m = 0,01\,\mathrm{kg}$, så energien i J blir

$$E = m \cdot c^2 = 0,01 \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2 = 9 \cdot 10^{14}.$$

Svar: $9 \cdot 10^{14}\,\mathrm{J}$.

b)

En norsk husholdning har et årlig energiforbruk på $9{,}0 \cdot 10^{10}$ J

Hvor mye masse må forsvinne for å gi nok energi til en norsk husholdning i et år?

Løsningsforslag b)

Vi vil finne tallet m energien som blir sluppet løs fra $m\,\mathrm{kg}$ materie blir lik $E = 9 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}$. Dermed skal vi finne tallet m som passer inn i ligningen

$$m \cdot c^2 = 9 \cdot 10^{10}.$$

Her er c bare en konstant, og da kan vi dividere med c^2 og forkorte. Vi får

$$\frac{m \cdot c^2}{c^2} = \frac{9 \cdot 10^{10}}{c^2},$$
$$m = \frac{9 \cdot 10^{10}}{c^2}.$$

Nå kan vi sette inn $c = 3 \cdot 10^8$. Da får vi

$$m = \frac{9 \cdot 10^{10}}{\left(3 \cdot 10^8\right)^2} = 0,000001 = 10^{-6}.$$

Vi trenger altså $10^{-6}\,\mathrm{kg}$ masse for å gi nok energi til en norsk husholdning i et år. Det er én tusendels gram.

Svar: $10^{-6}\,\mathrm{kg} = 0,000001\,\mathrm{kg}$.

Oppgave 4 (10 poeng) Nettkode: E-4BSK

Årstall	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Prosent mannlige røykere	42	37	34	31	25	19

Tabellen ovenfor viser hvor mange prosent av norske menn i alderen 16–74 år som røykte hver dag noen år i perioden 1985–2010.

Sett $x = 0$ i 1985, $x = 5$ i 1990 og så videre, og bruk opplysningene i tabellen til å bestemme

a)

1) en lineær modell som viser hvordan andelen mannlige røykere har endret seg

2) en eksponentiell modell som viser hvordan andelen mannlige røykere har endret seg

Løsningsforslag a)

Først må vi legge inn punktene i et *regneark* i *GeoGebra*. Vi velger "Regneark" i "Vis"-menyen. I den første kolonnen skriver vi x-verdiene tilhørende de forskjellige årstallene; $x = 0$ representerer 1985, $x = 1$ representerer 1986, og så videre. I neste kolonne skriver vi prosentandelen mannlige røykere.

Regneark

	A	B
1	0	42
2	5	37
3	10	34
4	15	31
5	20	25
6	25	19

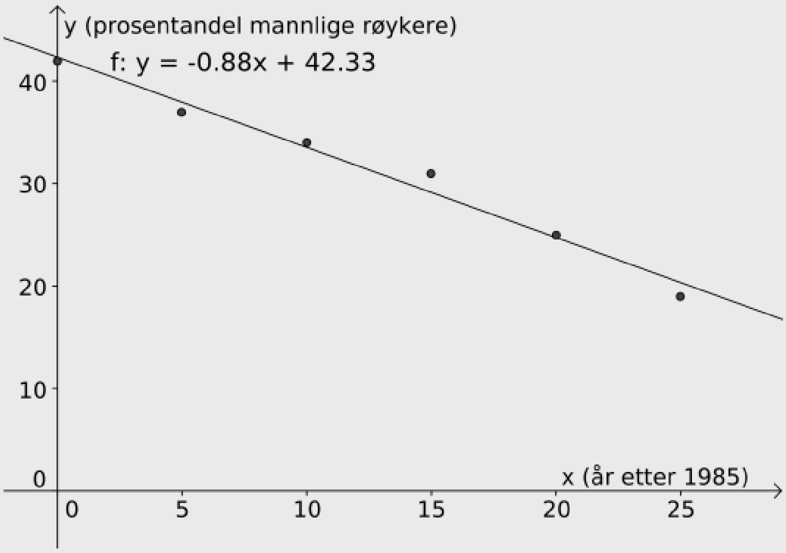
Videre markerer vi tabellen vår, høyreklikker, og velger "Liste med punkt" under "Lag liste"-menyen. Listen blir hetende Liste1. Vi tilpasser aksene slik at vi ser alle punktene. Nå skal vi lage en lineær modell og en eksponentiell modell. Det gjør vi ved å skrive henholdsvis

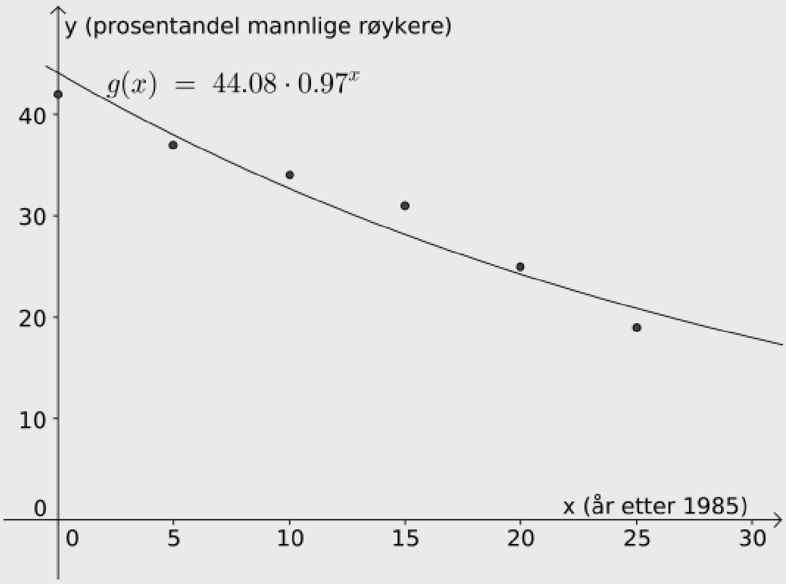
```
f = RegLin[Liste1]
```

og

```
g = RegEksp[Liste1]
```

i "Skriv inn"-vinduet. (Vi hadde ikke trengt å navngi funksjonene, men det er beleilig når vi skal bruke dem.) Nedenfor viser vi henholdsvis den lineære og den eksponentielle modellen. For å få den lineære modellen på en kjent form, høyreklikker vi på den og velger "Likning $y = ax + b$".





Her ser vi at den lineære modellen er $-0,88x + 42,33$, mens den eksponentielle modellen er $44,08 \cdot 0,97^x$.

Svar: Den lineære modellen er $-0,88x + 42,33$, mens den eksponentielle modellen er $44,08 \cdot 0,97^x$.

b)

Hvor mange prosent av norske menn i alderen 16–74 år vil være røykere i 2020 ifølge hver av de to modellene i oppgave a)?

Løsningsforslag b)

Dette regner vi ut i fra funksjonene vi fant i forrige oppgave. Vi kan gjøre det på kalkulator, men det tar kortere tid å bare bruke GeoGebra-filen fra forrige oppgave.

Året 2020 tilsvarer $x = 35$. Vi kalte den lineære og den eksponentielle funksjonen for henholdsvis f og g, og da er alt vi trenger å gjøre å skrive

```
f(35)
```

for å finne verdien for den lineære modellen, og tilsvarende for g. Vi kan som nevnt også gjøre det med kalkulator, og resultatene blir de samme:

$$f(35) = -0,88 \cdot 35 + 42,33 \approx 11,5,$$

og $g\big(35\big) = 44,08 \cdot 0,97^{35} \approx 15,5.$ Derfor gir den lineære modellen at cirka $11,5\ \%$ av mennene røyker hver dag i 2020, mens den eksponentielle modellen angir cirka $15,3\ \%$.

Svar: Den lineære modellen gir cirka $11,5\ \%$, og den eksponentielle gir cirka $15,5\ \%$.

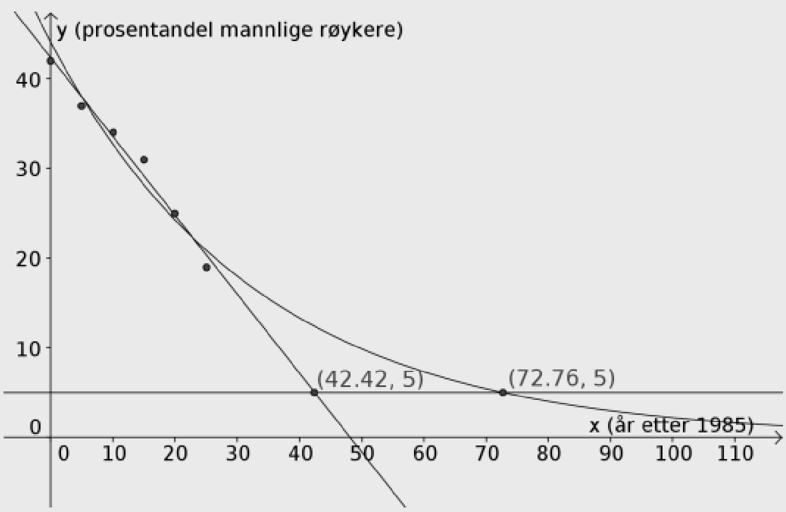
c)
Når vil andelen mannlige røykere bli lavere enn 5 % ifølge hver av de to modellene i oppgave a)?

Løsningsforslag c)

Vi vil finne ut hvor f og g krysser linjen $y = 5$. Vi bruker GeoGebra-filen fra de forrige oppgavene, og tar begge funksjonene på én gang. Først lager vi linjen ved å skrive

```
y = 5
```

i "Skriv inn"-vinduet. Vi finner skjæringspunktene ved å klikke på punktene der linjen treffer de to grafene.



Her ser vi at den lineære modellen krysser linjen der $x = 42,42$, og den eksponentielle funsjonen krysser linjen der $x = 72,76$. Den lineære modellen sier derfor at det går cirka 42 år før røykingen når under $5\ \%$, mens den eksponentielle modellen sier at det vil gå cirka 73 år. Det gir årstall på henholdsvis 2027 og 2058.

Svar: Den lineære modellen gir cirka 2027, og den eksponentielle modellen gir cirka 2058.

d)

Kommenter modellenes gyldighetsområde.

Løsningsforslag d)

Den lineære modellen gjelder åpenbart ikke der den går under y-aksen, for vi kan ikke ha et negativt antall røykere. Videre vil det nok ikke være 0 røykere rundt år 2035, som modellen antyder, med mindre vi får nye lovgivninger. Derfor gir nok gyldighetsområdet for den lineære modellen seg i god tid før $x = 40$.

Den eksponentielle modellen viser en utflatning av røykere, i stedet for en brå slutt. I naturen er slike modeller ofte gode, og det er vanskelig å si noe på gyldighetsområdet uten å spekulere i fremtidige lovgivninger eller trender.

Svar: Den lineære modellen gir en for rask nedgang i røyking, og har et mindre gyldighetsområdet enn den eksponentielle modellen.

Oppgave 5 (6 poeng) Nettkode: E-4BSX

Runar observerer en bakteriekultur i to døgn. Når han begynner observasjonene, er det 1000 bakterier i bakteriekulturen. Det viser seg at antall bakterier dobles hver sjette time. Etter 6 h er det 2000 bakterier i bakteriekulturen, etter 12 h er det 4000 bakterier i bakteriekulturen, osv.

a)
Hvor mange bakterier vil det være i bakteriekulturen etter 24 h?

Løsningsforslag a)

Etter 12 timer er det 4 000 bakterier i bakteriekulturen, og antallet skal dobles hver sjette time. Derfor er det $2 \cdot 4\,000 = 8\,000$ bakterier etter 18 timer, og $2 \cdot 8\,000 = 16\,000$ bakterier etter 24 timer.

Svar: 16 000 bakterier

b)
Sett opp en modell som viser hvordan antall bakterier endrer seg i løpet av de to døgnene.

Løsningsforslag b)

Vi kan finne modellen med hjelp fra GeoGebra.

La x være antall timer som har gått, og la $B(x)$ være antall bakterier etter x timer. Vi vet at når $x = 0$, så er $B(x) = 1\,000$, og at $B(x)$ dobler seg hver gang x øker med 6. Da har vi at

$$\begin{aligned} B(0) &= 1\,000, \\ B(6) &= 2\,000, \\ B(12) &= 4\,000, \\ B(18) &= 8\,000 \text{ og} \\ B(24) &= 16\,000, \end{aligned}$$

og så videre. Vi kan legge dette inn i et *regneark* i GeoGebra. Vi velger “Regneark” i “Vis”-menyen, og skriver x-verdier i første kolonne og $B(x)$-verdier i andre kolonne.

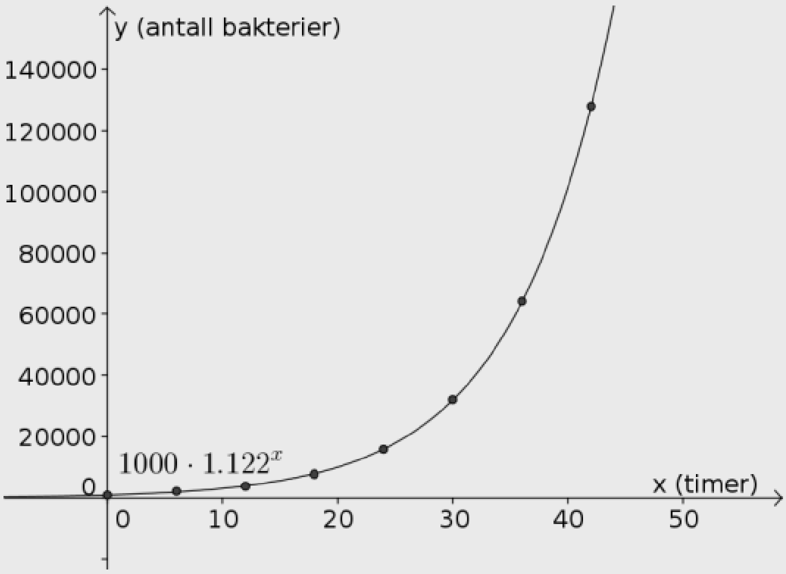
Regneark

	A	B
1	0	1000
2	6	2000
3	12	4000
4	18	8000
5	24	16000
6	30	32000
7	36	64000
8	42	128000
9	48	256000
10		

Vi har fylt ut x-verdier helt opp til 48 fordi eksperimentet går over to døgn. Videre lager vi en liste ut av disse punktene; det gjør vi ved å markere tabellen, høyreklikke og velge “Liste med punkt” i “Lag”-menyen. Listen blir hetende Liste1. Nå kan vi finne den eksponentielle modellen ved å skrive

```
RegEksp[Liste1]
```

i “Skriv inn”-vinduet. Da får vi følgende funksjon.



Funksjonsuttrykket til funksjonen er $B(x) = 1\,000 \cdot 1{,}122^x$, og dette er modellen vår. Denne funksjonen passer nøyaktig inn med punktene vi har; det er fordi veksten til antall bakterier er eksponentiell (altså at den øker med en viss prosentandel ved hver tidsenhet), og modellen vår er også eksponentiell.

Svar: $B(x) = 1\,000 \cdot 1{,}122^x$, hvis $B(x)$ er antall bakterier etter x timer.

c)

Hvor mange prosent øker antall bakterier med per time?

Løsningsforslag c)

Fra deloppgave b) vet vi at antallet bakterier etter x timer er $B(x) = 1\,000 \cdot 1,122^x$. Tallet $1,122$ er *vekstfaktoren* til $12,2\ \%$, så antallet bakterier vokser med $12,2\ \%$ hver time.

Svar: $\underline{\underline{12,2\ \%}}$

d)

Hvor mange bakterier vil det være i bakteriekulturen etter 40 h?

Etter hvor mange timer vil det være 50 000 bakterier i bakteriekulturen?

Løsningsforslag d)

I følge modellen vår vil det være $B(x)$ bakterier etter x timer; det betyr at det etter 40 timer vil være $B(40)$ bakterier. Dette tallet kan vi finne ved å skrive

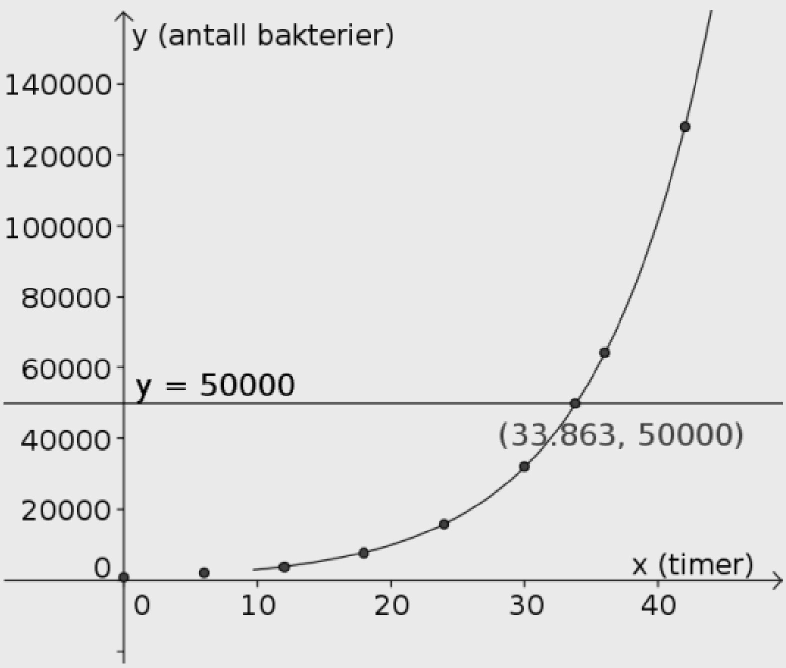
```
B(40)
```

i GeoGebra-filen vår. Da får vi cirka $101\,594$.

Videre skal vi finne ut når det er 50 000 bakterier i bakteriekulturen, altså finne den x-en slik at $B(x) = 50\,000$. Det gjør vi ved å finne skjæringspunktet mellom grafen til B og linjen $y = 50\,000$. Vi lager linjen ved å skrive

```
y=50000
```

Vi finner *skjæringspunktet* ved å bruke skjæringsverktøyet.



Her ser vi at skjæringspunktet har koordinater på cirka $(33.9, 50\,000)$. Det betyr at $B(33,9) = 50\,000$, så etter cirka 34 timer vil det være 50 000 bakterier i bakteriekulturen. Vi merker oss at i de 6 timene mellom 34 og 40, så øker bakteriekulturen fra cirka 50 000 til cirka 100 000, og det passer med at bakteriekulturen dobles hver sjette time.

Svar: Etter 40 timer er det $B(40) = 101\,594$ bakterier, og etter cirka 34 timer er det 50 000 bakterier.

Oppgave 6 (6 poeng) Nettkode: E-4BT5

I en undersøkelse ble 30 elever spurt om hvor lang tid de bruker på å komme seg til og fra skolen hver dag. Elevene oppga tiden i minutter. Resultatet av undersøkelsen er vist nedenfor.

28	56	12	16	34	78	64	18	10	21
32	26	54	62	64	70	50	44	70	86
16	20	38	14	80	24	20	32	14	10

a)
Lag et klassedelt materiale av tallene ovenfor. La den første klassen starte i 10, og la alle klassene ha klassebredde 10.

Løsningsforslag a)

Vi skal lage et klassedelt materiale, der den første klassen starter i 10, og alle klassene har klassebredde 10. Det gir klassene $[10, 20\rangle$, $[20, 30\rangle$, $[30, 40\rangle$ og så videre, opp til $[80, 90\rangle$, siden ingen bruker flere enn 90 minutter. Vi skal skrive opp hvor mange som faller innenfor de diverse klassene. For å gjøre det, kan vi for eksempel gå gjennom hvert tall og finne ut hvilken klasse tallet tilhører.

$[10, 20\rangle: \ 12, 16, 18, 10, 16, 14, 14, 10$

$[20, 30\rangle: \ 28, 21, 26, 20, 24, 20$

$[30, 40\rangle: \ 34, 32, 38, 32$

$[40, 50\rangle: \ 44$

$[50, 60\rangle: \ 56, 54, 50$

$[60, 70\rangle: \ 64, 62, 64$

$[70, \ 80\rangle: \ 78, 70, 70$

$[80, 90\rangle: \ 86, 80$

Vi er kun ute etter hvor mange som er i hver kategori. Nå kan vi sette opp det klassedelte materialet som under.

Svar:

$[10, \ 20\rangle: \ 8$

$[20, 30\rangle: \ 6$

$[30, 40\rangle: \ 4$

$[40, 50\rangle: \ 1$

$[50, 60\rangle: \ 3$

$[60, 70\rangle$: 3

$[70, 80\rangle$: 3

$[80, 90\rangle$: 2

b)

Ta utgangspunkt i det klassedelte materialet i a), og bestem gjennomsnittet.

Løsningsforslag b)

Vi antar at *gjennomsnittet* av hver klasse er i klassemidtpunktet. Når vi skal regne det totale gjennomsnittet, blir dette det samme som å anta at alle som er i en klasse er i klassemidtpunktet – for eksempel at alle de 8 personene i klassen $[10, 20\rangle$ bruker 15 minutter på veien til skolen. Gjennomsnittet er

$$gjennomsnitt = \frac{totalt\ antall\ minutter}{antall\ elever},$$

og ut i fra den klassedelte informasjonen vi fant i forrige oppgave, får vi

$$\begin{aligned}&\text{gjennomsnitt} = \\ &\frac{15 \cdot 8 + 25 \cdot 6 + 35 \cdot 4 + 45 \cdot 1 + 55 \cdot 3 + 65 \cdot 3 + 75 \cdot 3 + 85 \cdot 2}{8 + 6 + 4 + 1 + 3 + 3 + 3 + 2} \\ &= \frac{1210}{30} \approx 40,3.\end{aligned}$$

Gjennomsnittet er altså cirka $40,3$ minutter.

Svar: Cirka $40,3$ minutter, gitt at gjennomsnittet i hver klasse ligger på klassemidtpunktet.

c)

Bruk det klassedelte materialet til å avgjøre hvor stor andel av elevene som trenger mindre enn 60 min på å komme seg til og fra skolen.

Løsningsforslag c)

Vi skal finne ut hvor mange elever som bruker mindre enn 60 minutter på å komme seg til skolen. For å finne dette må vi legge sammen antallet som bruker mellom 10 og 20 minutter, de som bruker mellom 20 og 30 minutter, helt opp til 60. Altså skal vi legge sammen antallet personer i klassen $[50, 60\rangle$ og under. Det er det samme som den *kumulative frekvensen* til klassen $[50, 60\rangle$ (eventuelt den kumulative frekvensen til 59). I klassene $[10, 20\rangle$ og opp til $[50, 60\rangle$ er det henholdsvis 8, 6, 4, 1 og 3 personer, så det er

$$8 + 6 + 4 + 1 + 3 = 22$$

elever som bruker under 60 minutter. Det er 30 elever totalt, så andelen som bruker under 60 minutter er

$$\frac{22}{30} \approx 0,7333 = 73,33\ \%.$$

Svar: Cirka $73,33\ \%$.

Oppgave 7 (6 poeng) Nettkode: E-4BTF

Ved opptak til Politihøgskolen rangeres søkerne etter poeng.

Reglene for poengberegning er:

- ☐ Gjennomsnittet av karakterene fra videregående skole multipliseres med 10.
- ☐ Fullført førstegangstjeneste gir 2 poeng.
- ☐ Det gis ekstrapoeng for realfag/språkfag, maksimalt 4 poeng.
- ☐ Det gis også alderspoeng, 2 poeng for hvert år etter fylte 20 år, maksimalt 8 poeng.

Poengene til søkeren er summen av poengene fra de fire punktene ovenfor.

Mathias er 22 år. Han har fullført førstegangstjenesten.

Nedenfor ser du karakterene til Mathias fra videregående skole.

2 2 2 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 6

Mathias får 1,5 ekstrapoeng for realfag/språkfag.

Mathias søker Politihøgskolen.

a)

Hvor mange poeng har han ifølge reglene ovenfor?

Løsningsforslag a)

Vi starter med *gjennomsnittet* av karakterene til Mathias. Han fikk 3 toere, 6 treere, 10 firere, 5 femmere og 1 sekser. Gjennomsnittet er

$$gjennomsnitt = \frac{summen\ av\ karakterene}{antall\ karakterer},$$

så

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 1}{3 + 6 + 10 + 5 + 1} = \frac{95}{25} = 3,8.$$

Karakterene skal multipliseres med 10 for å få poengene, så Mathias får $3,8 \cdot 10 = 38$ poeng fra karaktersnittet sitt. Neste punkt på listen er førstegangstjenesten – det har Mathias fullført, så han får 2 ekstrapoeng. Videre får han $1,5$ poeng for realfag og språkfag. Det siste punktet er alderspoeng. Mathias er 22 år, og han skal få 2 poeng for hvert år etter fylte 20 år. Det blir $2 \cdot 2 = 4$ poeng. Totalt får Mathias

$$38 + 2 + 1,5 + 4 = 45,5$$

poeng.

Svar: $45,5$ poeng.

b)

Mathias kom ikke inn på Politihøgskolen i Oslo. Der var poenggrensen 47,7

For å være sikker på å komme inn neste år vil Mathias prøve å forbedre karakterene i noen fag, slik at han til sammen får 50,7 poeng neste år.

Hva må gjennomsnittet av karakterene til Mathias være neste år for at han til sammen skal ha 50,7 poeng?

Løsningsforslag b)

Neste år vil Mathias være ett år eldre, og dermed vil han ha mottatt 2 ekstra alderspoeng. Han har $2 + 1,5 + 4 = 7,5$ ekstrapoeng fra før, så han har totalt $9,5$ tilleggspoeng. Nå er det bare poengene fra karakterene som står igjen. La x være antall poeng Mathias må få fra karakterene for å få en poengsum på $50,7$. Da må $x + 9,5 = 50,7$. Vi trekker fra $9,5$ på begge sider av likhetstegnet. Da får vi

$$x + 9,5 - 9,5 = 50,7 - 9,5,$$
$$x = 41,2.$$

Snittkarakteren kan regnes ut ved å dividere karakterpoengene med 10, så Mathias må ha $\frac{41,2}{10} = 4,12$ i karaktersnitt for å få $50,7$ poeng.

Svar: $4,12$

c)

Mathias regner med at han skal klare å gå opp én karakter i de fagene han velger å ta opp igjen.

Hvor mange fag må han da ta opp igjen for å klare 50,7 poeng?

Løsningsforslag c)

Mathias' karaktersum før han tar opp fag er 95. Hvis han tar opp n fag og går opp i én karakter i hver av dem, blir karaktersummen $95 + n$. Gjennomsnittet av karakterene er da $\frac{95+n}{25} = \frac{95}{25} + \frac{n}{25}$, så hvert fag han tar opp bidrar med $\frac{1}{25}$ til karaktersnittet. Vi vil at karaktersnittet skal bli minst $4,12$, så vi må finne det heltallet n som gjør at karaktersnittet blir lik $4,12$, altså

$$\frac{95+n}{25} = 4,12.$$

Denne likningen kan vi løse med regning. Først multipliserer vi med 25 på begge sider for å få bort brøkstreken. $\begin{aligned} \frac{95+n}{25}\cdot 25 &= 4{,}12\cdot 25 \\ 95+n &= 4{,}12\cdot 25 \end{aligned}$ Nå kan vi trekke 95 fra begge sider. Da får vi

$$\begin{aligned} 95+n-95 &= 4,12\cdot 25-95, \\ n &= 4,12\cdot 25-95. \end{aligned}$$

Dermed får vi at $n = 4,12\cdot 25-95 = 8$. Det betyr at Mathias må ta opp 8 fag.

Vi kunne også løst det på denne måten. Hver karakter bidrar med $\frac{1}{25} = 0,04$ til snittet, og det forrige snittet var $3{,}8$. Da løser vi likningen $3{,}8 + 0,04\cdot n = 4{,}12$, og vi får $n = 8$.

Svar: 8 fag