MAT1011 2013 høst

Eksamenstid:

5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:
Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:
Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Du skal svare på alle oppgavene.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Andre opplysninger:
Kilder for bilder, tegninger osv.

- Fisk: http://www.imr.no/nyhetsarkiv/2009/august/flere_grunner_til_gode_fiskebestander_i_barent no (13.01.2013)
- Andre bilder, tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (1 poeng) Nettkode: E-49RZ

Per har lest 150 sider i en bok. Dette er 30 % av sidene i boka.

Hvor mange sider er det i boka?

Løsningsforslag

Hvis 150 sider er $30\ \%$ av sidene i boken, så må $10\ \%$ av sidene være lik $\frac{150}{3} = 50$ sider. Vi vil vite hvor mange sider det er til sammen, altså hvor mye $100\ \%$ av sidene er – og det får vi ved å multiplisere med ti. Derfor er det $50 \cdot 10 = 500$ sider i boken.

ALTERNATIV LØSNING

Svar: 500 sider

Oppgave 2 (1 poeng) Nettkode: E-49S4

På et kart er avstanden fra et punkt A til et punkt B 2,0 cm. I virkeligheten er avstanden i luftlinje mellom disse to punktene 10 km.

Bestem målestokken til kartet.

Løsningsforslag

Målestokken til et kart er antall lengdeenheter i virkeligheten én lengdeenhet på kartet er. I vårt tilfelle skal vi finne tallet x slik at $1 \text{ cm på kartet} = x \text{ cm i virkeligheten}$. Vi vet at 2 cm på kartet er 10 km; det betyr at 1 cm på kartet er 5 km i virkeligheten. Dermed har vi funnet svaret om vi regner 5 km om til centimeter.

Vi vet at $5 \text{ km} = 5\ 000 \text{ m}$ (*kilo* betyr 1 000, så *kilo*meter betyr 1 000 meter). Videre vet vi at $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$, så

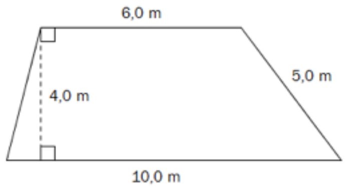
$$5 \text{ km} = 5\ 000 \cdot 100 \text{ cm} = 500\ 000 \text{ cm}.$$

Dette betyr at én centimeter på kartet tilsvarer 500 000 centimeter i virkeligheten; dermed er målestokken

$$1 : 500\ 000.$$

Svar: Målestokken er $1 : 500\ 000$.

Oppgave 3 (2 poeng) Nettkode: E-49TC



Et område har form som vist på figuren ovenfor.

Bestem arealet av området.

Løsningsforslag

Et trapes er en firkant der to motstående sider er parallelle. Sidene med lengder henholdsvis $6{,}0\ \mathrm{m}$ og $10\ \mathrm{m}$ i figuren er parallelle. Dette ser vi ved at linjestykket på lengde $4\ \mathrm{m}$ står normalt (i 90°) på begge linjene. Arealet A til et trapes med parallelle sider a og b og høyde h, er gitt ved

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

I vårt tilfelle er $a = 6\ \mathrm{m}$, $b = 10\ \mathrm{m}$ og $h = 4\ \mathrm{m}$, og arealet av figuren er derfor

$$\frac{6\ \mathrm{m} + 10\ \mathrm{m}}{2} \cdot 4\ \mathrm{m} = 8\ \mathrm{m} \cdot 4\ \mathrm{m} = 32\ \mathrm{m}^2.$$

Vi ser også at en annen side i trapeset har lengde $5\ \mathrm{m}$. Denne informasjonen trenger vi ikke for å løse oppgaven, og det er viktig å ikke la seg vippe av pinnen ved å prøve å finne ut hvor den ekstra sidelengden skal passe inn.

Svar: $\underline{\underline{32\ \mathrm{m}^2}}$

Oppgave 4 (2 poeng) Nettkode: E-49TQ

Et år hadde Ole en reallønn på 500 000 kroner. Konsumprisindeksen dette året var 130.

Bestem den nominelle lønna til Ole dette året.

Løsningsforslag

Vi har følgende sammenheng mellom konsumprisindeks, reallønn og nominell lønn:

$\frac{\text{reallønn}}{100} = \frac{\text{nominell lønn}}{\text{konsumprisindeks}}$

Vi vet allerede hva konsumprisindeksen og Oles reallønn var dette året, så den eneste ukjente størrelsen i likningen over er Oles nominelle lønn, og det er akkurat det oppgaven ber oss om å finne. Først setter vi inn Oles reallønn på 500 000 kroner og konsumprisindeksen på 130 inn i likningen.

$$\frac{500\ 000 \text{ kr}}{100} = \frac{\text{nominell lønn}}{130}.$$

Venstre side kan forkortes til $5\ 000 \text{ kr}$. Vi lar x betegne den ukjente nominelle lønnen. Vi skal nå finne tallet som passer inn for x i følgende likning.

$$5\ 000 \text{ kr} = \frac{x}{130}.$$

Når vi løser likninger, er målet å få x alene igjen på én side av likhetstegnet. For å få til dette i likningen over, multipliserer vi med 130 på hver side av likhetstegnet og forkorter.

$$5\ 000 \text{ kr} \cdot 130 = \tfrac{x}{130} \cdot 130,$$
$$5\ 000 \text{ kr} \cdot 130 = x.$$

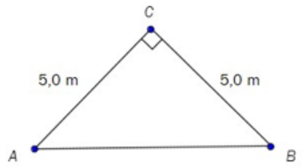
Vi må regne ut hva $5\ 000 \cdot 130$ blir. Vi kunne regnet det ut for hånd, men det er mange nuller her, så vi kan prøve å gjøre noe lurere. Vi vet at

$$5\ 000 \cdot 130 = 1\ 000 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 10 = 10\ 000 \cdot (5 \cdot 13).$$

Vi regner ut at $5 \cdot 13 = 65$, så $5\ 000 \cdot 130 = 10\ 000 \cdot 65 = 650\ 000$; dermed var Oles nominelle lønn $650\ 000 \text{ kr}$ dette året.

Svar: Oles nominelle lønn var $650000\,\text{kr}$.

Oppgave 5 (2 poeng) Nettkode: E-49TW



Et område har form som vist på figuren ovenfor.

Avgjør ved regning om avstanden fra A til B er lengre enn 7,0 m.

Løsningsforslag

Trekanten ΔABC er en *rettvinklet trekant*, der *katetene* begge har sidelengde $5\ \mathrm{m}$. Trekantens *hypotenus* er siden AB, som vi skal avgjøre hvorvidt er lengre enn $7\ \mathrm{m}$. Pytagoras' setning sier at i en rettvinklet trekant med hypotenus a og kateter b og c, så er

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

I vårt tilfelle er altså $b = c = 5\ \mathrm{m}$ og $a = AB$, og hvis vi setter inn dette over får vi

$$AB^2 = (5\ \mathrm{m})^2 + (5\ \mathrm{m})^2 = 2 \cdot 25\ \mathrm{m}^2 = 50\ \mathrm{m}^2.$$

Det betyr at $AB = \sqrt{50}\ \mathrm{m}$. Vi trenger ikke regne ut kvadratroten av 50; vi trenger bare å avgjøre om AB er lengre enn 7 meter eller ikke. Vi ser at $AB > 7\ \mathrm{m}$ hvis og bare hvis $AB^2 > (7\ \mathrm{m})^2 = 49\ \mathrm{m}^2$. Vi vet fra likningen over at $AB^2 = 50\ \mathrm{m}^2$, så AB er definitivt lengre enn $7\ \mathrm{m}$.

Svar: Ja. ($AB = \sqrt{50}\ \mathrm{m} > 7\ \mathrm{m}$)

Oppgave 6 (2 poeng) Nettkode: E-49TY

Skriv av, gjør beregninger, og sett inn tallene som mangler i hver av linjene:

$15\ \mathrm{m}^3 =$ ______________ L

$4{,}2\ \mathrm{h}\ = 4\ \mathrm{h}$ og ______________ min

Løsningsforslag

Først skal vi finne ut hvor mange liter $15\ \mathrm{m}^3$ er. Vi vet at $1\ \mathrm{dm}^3 = 1\ \mathrm{L}$, så vi vil gjøre om m^3 til dm^3. Én meter er ti desimeter, altså $\mathrm{m} = 10\ \mathrm{dm}$. Det betyr at $1\ \mathrm{m}^3 = 1 \cdot \left(10\ \mathrm{dm}\right)^3 = 1\,000\ \mathrm{dm}^3$. Dermed har vi at én kubikkmeter er 1 000 liter, og da må

$$15\ \mathrm{m}^3 = 15\,000\ \mathrm{L}.$$

Videre skal vi regne ut $4,2\ \mathrm{h}$ om til timer og minutter. (Vi husker at "h" står for "hour", som er engelsk for "time".) Det vi egentlig må gjøre her, er å gjøre om $0,2$ time til minutter. Vi vet at $0,2 = \frac{1}{5} = 20\ \%$, og at én time har 60 minutter; dermed skal vi regne ut hvor mange minutter det er i en femtedels time, eller hvor mye $20\ \%$ av 60 minutter er. Svaret får vi ved å multiplisere 60 minutter med $0,2$.

$$0,2\ \mathrm{h} = 0,2 \cdot 60\ \mathrm{min} = 2 \cdot 6\ \mathrm{min} = 12\ \mathrm{min}.$$

Dermed blir $4,2$ timer lik 4 timer og 12 minutter.

Svar: $15\ \mathrm{m}^3 = 15\,000\ \mathrm{L}$ og $4,2\ \mathrm{h} = 4\ \mathrm{h}$ og $12\ \mathrm{min}$.

Oppgave 7 (3 poeng) Nettkode: E-49U0

Sammenhengen mellom maksimal puls M (antall slag/min) og alder A (antall år) er gitt ved formelen

$M = 211 - 0{,}64 \cdot A$

a)
Hva er maksimal puls til en person som er 20 år, ifølge formelen ovenfor?

Løsningsforslag a)

Vi setter inn $A = 20$ i formelen, og får

$$M = 211 - 0,64 \cdot 20.$$

Vi må altså regne ut $0,64 \cdot 20$. Vi ser først at

$$0,64 \cdot 20 = 0,64 \cdot (10 \cdot 2) = 6,4 \cdot 2,$$

og videre at $6,4 \cdot 2 = 12,8$. Vi kunne også ha regnet dette ut for hånd. Dette setter vi inn i formelen ovenfor, og vi får at makspulsen M blir

$$211 - 12,8 = 198,2$$

slag per minutt. Dette kan vi også regne ut for hånd, som vist nedenfor.

		10	10	10
	2	1	1	
-		1	2,	8
=	1	9	8,	2

Svar: Makspulsen er $198,2$ slag per minutt, i følge formelen.

b)
Svein har en maksimal puls på 179 slag/min.

Hvor gammel er Svein ifølge formelen ovenfor?

Løsningsforslag b)

Setter vi inn $M = 179$ i den oppgitte formelen, så får vi

$$179 = 211 - 0,64 \cdot A.$$

Vi må finne et tall A som passer inn i ligningen ovenfor. Det aller første vi gjør, er å få alt som har med A å gjøre på én side av likhetstegnet. Derfor trekker vi fra 211 på hver side.

$$179 - 211 = 211 - 0,64 \cdot A - 211$$
$$-0,64 \cdot A = 179 - 211$$

Her har vi negativt fortegn på venstre side av likhetstegnet, og siden $179 < 211$ så er tallet på høyre side også negativt. Vi kan derfor multiplisere med -1 på begge sider av likhetstegnet for å bytte fortegn på alle ledd. Vi får

$$0,64 \cdot A = -179 + 211.$$

Vi regner ut for hånd at $-179 + 211 = 211 - 179 = 32$.

```
   10 10
  2 1  1
- 1 7  9
= 0 3  2
```

Dermed har vi funnet ut at

$$0,64 \cdot A = 32.$$

Nå skal vi få A alene på venstre side. Derfor dividerer vi med tallet som står foran A, nemlig $0,64$.

$$\frac{0{,}64 \cdot A}{0{,}64} = \frac{32}{0{,}64},$$
$$A = \frac{32}{0{,}64}.$$

Vi vil regne ut $\frac{32}{0{,}64}$. Dette *kan* vi gjøre for hånd, men i dette tilfellet kan vi gjøre noe lurt som sparer oss tid. Vi observerer nemlig at 32 er halvparten av 64 (som igjen er $100 \cdot 0,64$). Hvis vi multipliserer brøken med 2, så får vi

$$\frac{32}{0,64} \cdot 2 = \frac{64}{0,64} = \frac{6\,400}{64} = 100.$$

Hvis det dobbelte av brøken er lik 100, så må brøken selv være lik 50. Dermed har vi funnet ut at $A = 50$, altså at Svein er 50 år gammel.

Svar: 50 år.

Oppgave 8 (4 poeng) Nettkode: E-49U6

Siv har fire blå og seks svarte bukser i skapet. Én av de blå og tre av de svarte buksene passer ikke lenger.

a)
Tegn av tabellen nedenfor, og fyll inn tall i de hvite rutene.

	Blå bukser	Svarte bukser	Sum
Bukser som passar			
Bukser som ikkje passar			
Sum			

Løsningsforslag a)

Det første vi gjør er å skrive av tabellen oppgitt i oppgaven.

	Blå bukser	Svarte bukser	Sum
Bukser som passer			
Bukser som ikke passer			
Sum			

Nå kan vi begynne å fylle ut informasjonen vi har fått direkte fra teksten. For det første står det at Siv har 4 blå bukser og 6 svarte. Det betyr at vi skal skrive at det er til sammen 4 blå bukser og 6 svarte inn i tabellen vår, og det gjør vi på nederste rad.

	Blå bukser	Svarte bukser	Sum
Bukser som passer			
Bukser som ikke passer			
Sum	4	6	

Videre står det at 1 blå bukse og 3 svarte bukser ikke passer. Dette er informasjon som handler om bukser som *ikke* passer, så vi skal fylle det ut i "Bukser som ikke passer"-raden.

	Blå bukser	Svarte bukser	Sum
Bukser som passer			
Bukser som ikke passer	1	3	
Sum	4	6	

Nå har vi fylt inn all informasjonen vi får direkte fra teksten, og vi må regne oss fram til det som skal stå i resten av rutene. Det første vi gjør er å regne ut hvor mange bukser Siv har til sammen. Hun har 4 blå bukser og 6 svarte, så totalen blir 10. Tilsvarende har Siv
bukser som ikke passer.

	Blå bukser	Svarte bukser	Sum
Bukser som passer			
Bukser som ikke passer	1	3	4
Sum	4	6	10

Det siste vi må finne ut er hvor mange bukser som passer, og hvilke farger de har. Av totalt 4 blå bukser er det 1 som ikke passer, og da må det være 3 som passer. Tilsvarende er det $6 - 3 = 3$ svarte bukser som passer, som gir et totalt antall passende bukser på $3 + 3 = 6$. Dette fyller vi inn i øverste rad. Resultatet er vist under.

Svar:

	Blå bukser	Svarte bukser	Sum
Bukser som passer	3	3	6
Bukser som ikke passer	1	3	4
Sum	4	6	10

b)

Siv tar tilfeldig én bukse fra skapet.

Bestem sannsynligheten for at buksen passer.

Løsningsforslag b)

Tabellen vår sier at vi har totalt 10 bukser å velge mellom, hvorav 6 passer. Trekker vi en tilfeldig bukse er dermed sannsynligheten for at denne passer, lik

$$\frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 60\,\%$$

Svar: $\frac{3}{5}$ eller $60\,\%$.

c)

Siv har tatt en bukse som passer.

Bestem sannsynligheten for at denne buksen er blå.

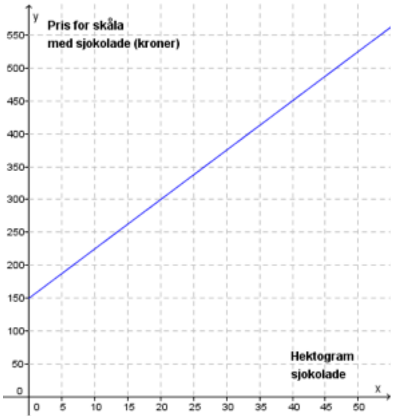
Løsningsforslag c)

Det er 6 bukser som passer, og halvparten av disse er blå. Hvis vi trekker en tilfeldig bukse som passer vil det derfor være $50\,\%$ sannsynlighet for at denne er blå. Vi kan også skrive det ut som over. Sannsynligheten er

$$\frac{\text{antall mulige}}{\text{antall gunstige}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\,\%$$

Svar: $\frac{1}{2}$ eller $50\,\%$.

Oppgave 9 (3 poeng) Nettkode: E-49UD



Terje kjøper en skål og fyller den med sjokolade. Den rette linjen i koordinatsystemet ovenfor viser sammenhengen mellom antall hektogram sjokolade Terje kjøper, og hvor mye han må betale for skålen med sjokolade.

a)
Hvor mye koster selve skålen?

Hvor mye koster 1 hg sjokolade?

Løsningsforslag a)

Vi ser at hvis Terje kjøper en skål med 0 hg sjokolade, så koster det 150 kroner. (Det er der grafen krysser y-aksen, altså der x er 0.) Det betyr at skålen koster 150 kroner.

Videre ser vi at hvis skålen inneholder 20 hg sjokolade, så koster det 300 kroner. Dette ser vi ved å se på $x = 20$ på x-aksen, gå rett oppover til vi treffer den blå grafen, og gå bortover til vi treffer y-aksen. Av de 300 kronene er det 150 som går til selve skålen, så 20 hg sjokolade koster $300\text{ kr} - 150\text{ kr} = 150\text{ kr}$. Det må bety at 1 hg sjokolade koster

$$\frac{150\text{ kr}}{20} = \frac{15\text{ kr}}{2} = 7,5\text{ kr}.$$

Svar: Skålen koster 150 kr, og 1 hg sjokolade koster $7,5\text{ kr}$.

b)
Bestem likningen for den rette linjen.

Løsningsforslag b)

Vi skal finne tallene a og b i uttrykket $y = ax + b$. Konstantleddet til grafen er der grafen krysser y-aksen, som er 150. Det betyr at $b = 150$. Stigningstallet er hvor mye y øker hvis vi øker x med 1. Hvis vi knytter dette opp mot forrige oppgave, så tolkes det som at stigningstallet er det tallet prisen øker med, hvis vi legger til 1 hg sjokolade. Vi har funnet ut at 1 hg sjokolade koster $7,5\text{ kr}$, og da må stigningstallet være $a = 7,5$. Dermed er ligningen for den rette linjen lik

$$y = 7,5x + 150.$$

Svar: $y = 7,5x + 150$.

Oppgave 10 (2 poeng) Nettkode: E-49UK

Ovenfor ser du hvor mye tre ulike pakker kjøttdeig koster i en butikk.

Er vekt og pris proporsjonale størrelser her?

Løsningsforslag

Vi tester hvorvidt forholdet mellom vekt og pris er den samme. I den første pakken med kjøttdeig får vi 400 g for 24 kroner. Vi regner ut at

$$\frac{400}{24} = \frac{200}{12} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}.$$

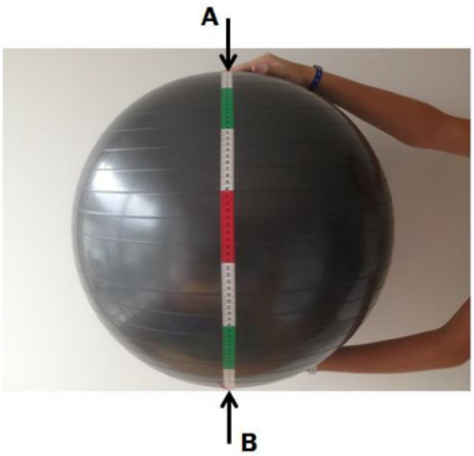
Vi kunne ha regnet ut hva denne brøken er på desimalform, men det hadde vært unødvendig bruk av tid. Den andre pakken med kjøttdeig har det samme forholdet mellom vekt og pris, for $\frac{500}{30} = \frac{50}{3}$. Vi har bare igjen den siste pakken med kjøttdeig, der vi får 600 g for 36 kroner. Vi regner ut at

$$\frac{600}{36} = \frac{200}{12} = \frac{50}{3},$$

akkurat som i sted. Alle forholdene er like, så størrelsene er proposjonale.

Svar: Ja, vekt og pris er proposjonale størrelser her.

Oppgave 11 (2 poeng) Nettkode: E-49UR



Maria lurer på hvor stor diameter en ball har. Hun måler langs ballens overflate og finner at det er ca. 100 cm fra A til B. Se bildet ovenfor.

Gjør overslag, og bestem omtrent hvor stor diameter ballen har.

Løsningsforslag

Maria måler halve omkretsen rundt ballen, og den er cirka 100 cm. Hele omkretsen er derfor cirka 200 cm. Dermed får vi at $200 \text{ cm} = 2\pi r$ der hvor r er ballens radius. Vi vil finne ballens diameter, altså $2r$. Derfor dividerer vi med π på begge sider av likhetstegnet over, og får $2r = \frac{200 \text{ cm}}{\pi}$. Vi skal gjøre et overslag. Vi runder π ned til 3, så vi får at omkretsen er cirka $\frac{200 \text{ cm}}{3}$, som er cirka $66,6 \text{ cm}$. Fordi vi dividerte med et litt lavere tall enn vi egentlig skulle ($\pi \approx 3{,}14 > 3$), er svaret vårt litt *høyere* enn det vi skulle hatt, så vi kan med god samvittighet runde ned til det penere svaret 65 cm.

Svar: Ballens diameter er cirka 65 cm.

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng) Nettkode: E-49UV

År	2008	2009	2010	2011	2012
KPI	123,1	125,7	128,8	130,4	131,4

Tabellen ovenfor viser konsumprisindeksen (KPI) hvert år fra 2008 til 2012.

a)
Hvor mange prosent har konsumprisindeksen økt med i denne perioden?

Løsningsforslag a)

Vi skal regne ut prosentvis økning fra $123,1$ til $131,4$. Vi starter med å regne ut hvor stor økningen er. Det blir

$$\frac{131,4}{123,1} \cdot 100\ \% \approx 106,7\ \%.$$

Det betyr at $131,4$ er cirka $106,7\ \%$ av $123,1$. Det er en økning på $6,7\ \%$.

Svar: Cirka $6,7\ \%$.

b)
I 2010 kjøpte familien Johnsen matvarer for 8000 kroner per måned. Vi antar at prisen på disse matvarene har fulgt utviklingen i konsumprisindeksen.

Hvor mye betalte familien per måned for tilsvarende matvarer i 2012?

Løsningsforslag b)

Vi har følgende sammenheng mellom konsumprisindeksen og prisen på matvarene:

$$\frac{\text{pris i 2010}}{\text{indeks i 2010}} = \frac{\text{pris i 2012}}{\text{indeks i 2012}}$$

I ligningen ovenfor vet vi tre av størrelsene: prisen i 2010, og indeksen i både 2010 og 2012. Vi vil finne ut hva prisen for matvarene var i 2012, så alt vi trenger å gjøre er å sette inn det vi vet og løse ligningen. Vi får

$$\frac{8\ 000\ \text{kr}}{128,8} = \frac{\text{pris i 2012}}{131,4}.$$

Vi multipliserer med $131,4$ på hver side av likhetstegnet, og får

$$\begin{aligned} \frac{8\ 000\ \text{kr}}{128{,}8} \cdot 131,4 &= \frac{\text{pris i 2012}}{131{,}4} \cdot 131,4, \\ \text{pris i 2012} &= \frac{8\ 000\ \text{kr}}{128{,}8} \cdot 131,4. \end{aligned}$$

Vi regner ut på kalkulatoren, og får at prisen for matvarene i 2012 er cirka $8\ 161,49\ \text{kr}$.

Svar: Cirka $8\ 161,49\ \text{kr}$.

c)

I 2008 var inntekten til familien Johnsen 45 000 kroner per måned. I 2012 var inntekten økt til 49 000 kroner per måned.

Gjør beregninger og avgjør om familien hadde større kjøpekraft (bedre råd) i 2012 enn i 2008.

Løsningsforslag c)

Vi velger å regne ut hvor mye 45 000 kroner fra 2008 er verdt i 2012, hvis vi justerer for konsumprisindeksen. Under har vi vist hvordan vi kan gjøre det ved å regne om til reallønn. Vi har fremdeles følgende sammenheng:

$\frac{\text{lønn i 2008}}{\text{indeks i 2008}} = \frac{\text{lønnens verdi i 2012}}{\text{indeks i 2012}}$

Igjen har vi alle størrelsene i ligningen over, unntatt verdien i 2012; det er denne vi vil finne. Vi setter inn lønnen i 2008, samt konsumprisindeksene, og får

$$\frac{45\ 000 \text{ kr}}{123,1} = \frac{\text{lønnens verdi i 2012}}{131,4}.$$

På samme måte som i oppgaven over, ser vi at

$$\text{lønnens verdi i 2012} = \frac{45\ 000 \text{ kr}}{123,1} \cdot 131,4 \approx 48\ 034 \text{ kr}.$$

Det betyr at hvis familien hadde en inntekt på 48 034 i 2012, så ville de hatt lik kjøpekraft som de hadde i 2008. De har derimot 49 000 i inntekt i 2012, så kjøpekraften har blitt større.

Som nevnt kunne vi også gjort om begge månedslønningene til reallønn. Vi har følgende sammenheng mellom indeks, nominell lønn og reallønn:

$\frac{\text{nominell lønn}}{\text{indeks}} = \frac{\text{reallønn}}{100}$

Dermed er reallønnen i 2008 og 2012 henholdsvis

$$\text{reallønn i 2008} = \frac{45\ 000 \text{ kr}}{123,1} \cdot 100 \approx 36\ 556 \text{ kr},$$

og $\text{reallønn i 2012} = \frac{49\ 000 \text{ kr}}{131,4} \cdot 100 \approx 37\ 291 \text{ kr}.$ Her ser vi at reallønnen er størst i 2012, og at familien dermed hadde størst kjøpekraft i 2012.

Svar: Familien hadde større kjøpekraft i 2012.

Oppgave 2 (4 poeng) Nettkode: E-49V3

En undersøkelse har vist at 20 % av alle syklistene i en by sykler uten lys i mørket. Vi velger tilfeldig to syklister fra denne byen.

a)

Bestem sannsynligheten for at begge sykler uten lys i mørket.

Løsningsforslag a)

Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt syklist sykler uten lys i mørket, er $20\ \%$ (den samme som andelen syklister uten lys). Sannsynligheten for at en ny tilfeldig utvalgt syklist også sykler uten lys, er fremdeles $20\ \%$. Sannsynligheten for at begge disse to tilfellene inntreffer, altså at vi trekker *to* syklister som ikke bruker lys, er lik

$$20\ \% \cdot 20\ \% = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 100\ \% = 4\ \%.$$

Svar: $4\ \%$.

b)

Bestem sannsynligheten for at nøyaktig én av dem sykler uten lys i mørket.

Løsningsforslag b)

Den ene muligheten vi har, er at vi først trekker en syklist som ikke bruker lys, og deretter en som bruker lys. Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt syklist ikke bruker lys eller bruker lys, er henholdsvis $20\ \%$ og $100\ \% - 20\ \% = 80\ \%$. Sannsynligheten for å først trekke en ikke-lysbruker og deretter en lysbruker, lik

$$20\ \% \cdot 80\ \% = 16\ \%.$$

Den andre måten vi kan trekke ut nøyaktig én lysbruker på, er om den første vi trekker bruker lys, og den andre ikke gjør det. Sannsynligheten for at vi gjør dette er den samme som sannsynligheten over:

$$80\ \% \cdot 20\ \% = 16\ \%.$$

Disse to utfallene er de eneste vi har som gir nøyaktig én lysbruker. Sannsynligheten for at det er en av disse kombinasjonene vi gjør når vi trekker to tilfeldige syklister, er

$$16\ \% + 16\ \% = 32\ \%.$$

Svar: $32\ \%$.

Oppgave 3 (4 poeng) Nettkode: E-49V7

Øystein har kjøpt bil. Bilen kostet 250 000 kroner. Vi regner med at verdien har sunket, og at den vil fortsette å synke, med 15 % per år.

a)
Hvor mye vil bilen være verd om fem år?

Løsningsforslag a)

Hvis bilen faller $15\ \%$ i verdi per år, vil den hvert år være verdt $85\ \%$ av det den var verdt året før. Prosentfaktoren til $85\ \%$ er $0,85$, og derfor vil bilen etter ett år være verdt $250\ 000\ \mathrm{kr} \cdot 0,85$. Dette kan vi alternativt se ved at

$$\text{vekstfaktor} = 1 + \text{prosentfaktor},$$

og prosentfaktoren til $-15\ \%$ er $-0,15$. (Disse tallene er negative fordi bilen *faller* i verdi.) Tilsvarende vil bilen etter to år være verdt $250\ 000\ \mathrm{kr} \cdot 0,85 \cdot 0,85$. Etter fem år er den verdt

$$250\ 000\ \mathrm{kr} \cdot 0,85 \cdot 0,85 \cdot 0,85 \cdot 0,85 \cdot 0,85 = 250\ 000\ \mathrm{kr} \cdot 0,85^5 \approx 110\ 926,33\ \mathrm{kr}.$$

Svar: Cirka $110\ 926,33\ \mathrm{kr}$.

b)
Hvor mye var bilen verd for fem år siden?

Løsningsforslag b)

Her antar vi altså at Øystein ikke har kjøpt en nyutgitt modell, og at det derfor gir mening at bilen har falt i verdi i noen år før han kjøpte den.

La oss si at bilen var verdt x kroner for fem år siden. Fem år senere, altså da Øystein kjøpte den, vil bilen være verdt

$$x \cdot 0,85^5,$$

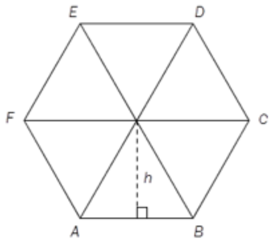
akkurat som i forrige oppgave. Men vi vet allerede at bilen var verdt 250 000 kroner da Øystein kjøpte den. Med andre ord er

$$x \cdot 0,85^5 = 250\ 000.$$

Dette er en (lineær) likning, og vi vil finne et tall x som passer inn. Vi vil ha x alene på én side av likhetstegnet, så vi dividerer med $0,85^5$ og forkorter. $\begin{aligned} \frac{x \cdot 0,85^5}{0,85^5} &= \frac{250\ 000}{0,85^5}, \\ x &= \frac{250\ 000}{0,85^5}. \end{aligned}$ Vi regner ut på kalkulatoren at $\frac{250\ 000}{0,85^5} \approx 563\ 437,02$, så fem år før Øystein kjøpte bilen var den verdt cirka $563\ 437,02$ kroner.

Svar: Cirka $563\ 437,02$ kroner.

Oppgave 4 (5 poeng) Nettkode: E-49VG



En regulær sekskant er satt sammen av seks likesidede trekanter. Sidene i trekantene er 3,0 cm. Se figuren ovenfor.

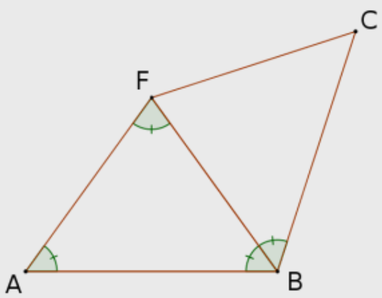
a)
Bestem $\angle ABC$.

Løsningsforslag a)

Det første vi gjør er å regne ut de vinklene vi kan, nemlig vinklene inne i trekantene. Siden alle trekantene er likesidede, er alle vinklene like store, og siden vinkelsummen er 180° må hver vinkel være

$$\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ.$$

Tegningen under illustrerer at $\angle ABC$ er dobbelt så stor som vinkelen inne i trekanten.



Dermed er $\angle ABC = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.

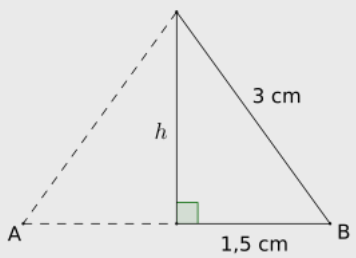
Dette svaret kunne vi kommet fram til fortere, hvis vi hadde husket at vinkelsummen i en sekskant er 720°. Siden sekskanten er likesidet, er hver vinkel $\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$.

Svar: $\underline{\underline{120^\circ}}$.

b)
Bestem høyden h i trekantene ved regning.

Løsningsforslag b)

Vi ser på trekanten som beskrevet over. Siden trekantene er likesidete, vil høyden h være midtnormal til AB. Linjestykket AB har lengde 3 cm, og da har halve linjestykket, altså grunnlinjen til trekanten vår, lengde $1,5\text{ cm}$. *Hypotenusen* i trekanten er 3 cm.



Vi vil finne høyden h i trekanten. Grunnen til at vi ville se på denne halve trekanten og ikke trekanten med grunnlinje AB, er at vi nå kan bruke Pytagoras læresetning. (Dette er ofte en god strategi; hvis vi ikke har en rettvinklet trekant, så feller vi en midtnormal og ser på de nye trekantene i stedet.) Pytagoras setning sier at i en rettvinklet trekant med hypotenus a og kateter b og c, så er

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

I vårt tilfelle er $a = 3$, $b = 1,5$ og $c = 4$. (For enkelhets skyld dropper vi enhetene.) Vi setter dette inn i likningen over, og får

$$3^2 = 1,5^2 + h^2.$$

Vi trekker fra $1,5^2$ på begge sider og forkorter.

$$\begin{aligned} 3^2 - 1,5^2 &= 1,5^2 - 1,5^2 + h^2, \\ h^2 &= 3^2 - 1,5^2, \\ h^2 &= 6,75. \end{aligned}$$

Vi tar kvadratroten av hver side av likhetstegnet over, og får til slutt at $h \approx 2,6$, altså at høyden i trekantene er $2,6\ \text{cm}$.

Svar: Cirka $\underline{\underline{2,6\ \text{cm}}}$.

c)
Bestem arealet av sekskanten ved regning.

Løsningsforslag c)

Hver trekant har grunnlinje $3\ \text{cm}$ og høyde cirka $2,6\ \text{cm}$. Arealet til én trekant er dermed cirka $\frac{1}{2} \cdot 3\ \text{cm} \cdot 2,6\ \text{cm}$. Arealet til sekskanten er 6 ganger så stort – med andre ord er sekskantens areal lik cirka

$$6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\ \text{cm} \cdot 2,6\ \text{cm} = 23,4\ \text{cm}^2.$$

Svar: Cirka $\underline{\underline{23,4\ \text{cm}^2}}$.

Oppgave 5 (8 poeng) Nettkode: E-49W8

Funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 3x^3 - 48x^2 + 162x + 300$$

viser hvor mange tonn fisk $f(x)$ det var i en fiskebestand x år etter år 2000.

a)

Tegn grafen til f for $0 < x < 10$.

Løsningsforslag a)

Vi bruker følgende funksjon i Geogebra:

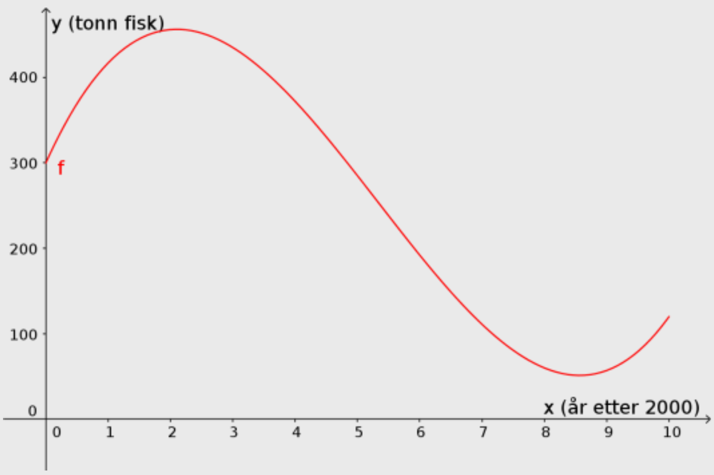
```
Funksjon[ <Funksjon>, <Start>, <Slutt> ]
```

Vi fyller inn funksjonen, start- og sluttpunktet.

```
Funksjon[3x^3 - 48x^2 + 162x + 300, 0, 10]
```

Vi må huske å sette navn på aksene. Dette gjør vi ved å høyreklikke i grafikkfeltet, velge "Innstillinger" og skrive inn aksenavn under xAkse og yAkse. Resultatet er vist under.

Svar:



b)
Når var fiskebestanden minst?

Hvor mange tonn fisk var det i fiskebestanden da?

Løsningsforslag b)

For å finne bunnpunktet til grafen, skriver vi

```
Ekstremalpunkt[f]
```

i "Skriv inn"-feltet. Vi får to punkter, toppunktet og bunnpunktet. Vi ser at koordinatene til bunnpunktet er $(8.57, 51.25)$. Dette betyr at $f(8,57) = 51,25$, altså at etter $8,57$ år etter år 2000 bestod fiskebestanden av $51,25$ tonn fisk. Vi ser at $8,57$ år etter år 2000 er 2008 pluss et halv år, altså sommeren 2008.

Svar: Etter $8,57$ år (sommeren 2008) nådde fiskebestanden sitt minimum på $51,25$ tonn.

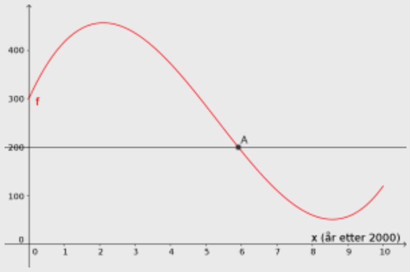
c)
Bestem skjæringspunktet mellom grafen til f og linjen med likning $y = 200$.

Hva forteller koordinatene til dette punktet om fiskebestanden?

Løsningsforslag c)

Vi lager den nye linjen ved å skrive inn

```
y = 200
```



Grafen til funksjonen vår, den nye linjen og skjæringspunktet er vist på bildet. Vi ser at skjæringspunktet har koordinatene $(5.91, 200)$. Dette betyr at $f(5,91) = 200$, eller at fiskebestanden var på 200 tonn $5,91$ år etter år 2000. Vi ser at $5,91$ år etter 2000 er like før 2006, altså vinteren eller høsten i 2005.

Svar: Skjæringspunktet er $(5.91, 200)$, så vinteren eller høsten 2005 var fiskebestanden på 200 tonn.

d)
Hvor stor var den gjennomsnittlige endringen i fiskebestanden per år i perioden 1. januar 2003 – 1. januar 2007?

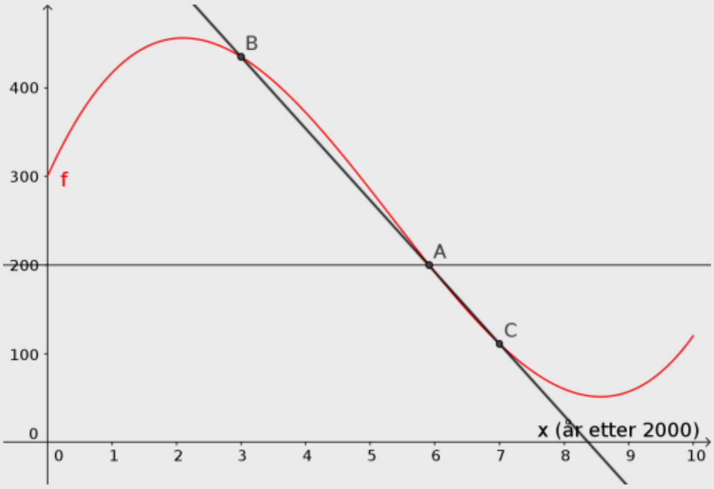
Løsningsforslag d)

Vi merker oss først at 1. januar 2003 er nøyaktig 3 år etter år 2000. Derfor er $f(3)$ fiskebestanden på nøyaktig 1. januar 2003. Det samme gjelder 1. januar 2007 og $f(7)$.

Å finne gjennomsnittlig endring tilsvarer å finne stigningstallet til den rette linjen som går gjennom punktene vi har. I oppgaven vår ser vi på punktene på grafen til f der $x = 3$ og der $x = 7$. I Geogebra kan vi enten tegne normale linjer fra x-aksen i disse punktene og se på skjæringen med grafen til f, eller så kan vi bare skrive

```
(3, f(3))
```

og tilsvarende for $x = 7$. Resultatet viser vi nedenfor.



I grafikkfeltet kan vi se likningen til denne rette linjen. For å få den på en kjent form, høyreklikk og trykk på $y = ax + b$. Da ser vi at ligningen til linjen er $y = -81x + 678$; altså er stigningstallet -81. Det betyr at fiskebestanden falt med i gjennomsnitt 81 tonn per år mellom 1. januar 2003 og 1. januar 2007.

Svar: Den gjennomsnittlige endringen var på -81 tonn per år.

Oppgave 6 (4 poeng) Nettkode: E-49WK

Jonny er rørlegger. Han har en timelønn på 215 kroner.

Jonny betaler 2 % av bruttolønna til en pensjonskasse. I tillegg betaler han hver måned 250 kroner i fagforeningskontingent.

En måned arbeidet Jonny 150 timer.

a)
Hvor mye betalte Jonny til pensjonskassen denne måneden?

Løsningsforslag a)

Jonny arbeidet i 150 timer med timeslønn på 215 kroner. Brutto månedslønn blir da

$$150 \text{ timer} \cdot 215 \text{ kr/time} = 32\,250 \text{ kr}.$$

Vi skal regne ut $2\ \%$ av dette, som blir

$$32\,250 \text{ kr} \cdot 2\ \% = 32\,250 \text{ kr} \cdot 0,02 = 645 \text{ kr},$$

der vi har brukt at $0,02$ er prosentfaktoren til $2\ \%$. Dermed betalte Jonny 645 kr til pensjonskassen denne måneden.

Svar: $\underline{\underline{645 \text{ kr}}}$.

b)
Jonny har tabelltrekk. Se nedenfor.

Trekktabell 7100 for 2013, månadslønn

Grunnlag	Trekk	Grunnlag	Trekk	Grunnlag	Trekk	Grunnlag	Trekk	Grunnlag	Trekk
30 100	9 294	30 600	9 500	31 100	9 707	31 600	9 914	32 100	10 120
30 200	9 335	30 700	9 542	31 200	9 748	31 700	9 955	32 200	10 162
30 300	9 376	30 800	9 583	31 300	9 790	31 800	9 996	32 300	10 203
30 400	9 418	30 900	9 624	31 400	9 831	31 900	10 038	32 400	10 244
30 500	9 459	31 000	9 666	31 500	9 872	32 000	10 079	32 500	10 286

Hvor mye betalte han i skatt denne måneden?

Løsningsforslag b)

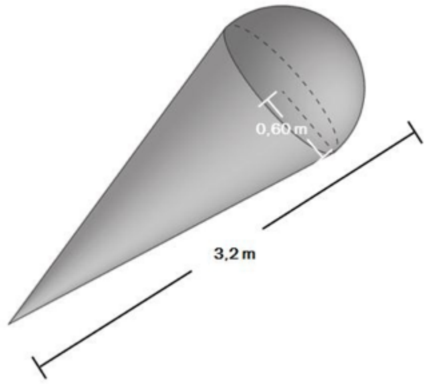
Trekkgrunnlaget er brutto månedslønn, men trukket fra fagforeningskontingent og utbetaling til pensjonskasse. Vi har regnet ut at brutto månedslønn var $32\,250$ kr og at utbetalingen til pensjonskassen var 645 kr. Fagforeningskontingenten er på 250 kr. Trekkgrunnlaget blir da

$$\text{trekkgrunnlag} = 32\,250 \text{ kr} - 645 \text{ kr} - 250 \text{ kr} = 31\,355 \text{ kr}.$$

Tabellen er oppgitt i intervaller på 100. Vi skal runde ned trekkgrunnlaget til nærmeste hundre, og vi får $31\,300$ kr. I den tredje kolonnen med "Grunnlag" står det $31\,300$, og til høyre står det at tilsvarende skattetrekk er $9\,790$ kr.

Svar: $\underline{\underline{9\,790 \text{ kr}}}$.

Oppgave 7 (5 poeng) Nettkode: E-4EI6



Tore har laget en stor modell av en kuleis. Modellen har tilnærmet form som en kjegle med en halvkule i enden. Toppen av kjeglen har radius $0{,}60\ \mathrm{m}$, og modellen er $3{,}2\ \mathrm{m}$ lang. Se skissen ovenfor.

a)

Regn ut volumet av modellen.

Løsningsforslag a)

Vi deler problemet opp i to: Først finner vi volumet av kjeglen, og deretter volumet av *halv*kulen på enden av kjeglen.

Volumet V til en kjegle med grunnflate G og høyde h, er

$$V = \frac{G \cdot h}{3}.$$

Grunnflaten til kjeglen er en sirkel med radius $0,6\ \mathrm{m}$. Vi vil finne arealet til denne sirkelen. Arealet til en sirkel med radius r er $\pi \cdot r^2$, og da får vi at $G = \pi \cdot \left(0,6\ \mathrm{m}\right)^2 \approx 1,13\ \mathrm{m}^2$. Så skal vi finne høyden til kjeglen. Høyden til kjeglen *og* høyden til halvkulen er til sammen $3,2\ \mathrm{cm}$. Siden radien i halvkulen er $0,6\ \mathrm{m}$, er høyden til kjeglen lik

$$h = 3,2\ \mathrm{m} - 0,6\ \mathrm{m} = 2,6\ \mathrm{m}.$$

Nå har vi funnet alle de ukjente i formelen (1) for volumet av kjeglen. Vi setter inn det vi vet, og får at kjeglens volum er

$$\frac{G \cdot h}{3} \approx \frac{1,13\ \mathrm{m}^2 \cdot 2,6\ \mathrm{m}}{3} \approx 0,98\ \mathrm{m}^3.$$

Videre skal vi regne ut halvkulens volum, som er lettere. Volumet til en kule med radius r er $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$. Vi skal bare ha halve kulen, og radien i vår kule er $r = 0,6\ \mathrm{m}$, så volumet til halvkulen er $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\ \pi \cdot \left(0,6\ \mathrm{m}\right)^3 \approx 0,45\ \mathrm{m}^3$.

Hvis vi legger sammen volumene av kjeglen og halvkulen, får vi volumet til hele modellen. Det blir cirka

$$0,98\ \mathrm{m}^3 + 0,45\ \mathrm{m}^3 = 1,43\ \mathrm{m}^3,$$

eller ca. $1\ 430\ \mathrm{L}$.

Svar: Cirka $1,43\ \mathrm{m}^3$ eller $1\ 430\ \mathrm{L}$.

b)

Modellen skal lakkeres. En boks lakk er nok til 2,2 m^2.

Hvor mange bokser vil gå med for å lakkere modellen?

Løsningsforslag b)

Overflatearealet til en kjegle med radius r og høyde h, er $\pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$, mens overflatearealet til en kule med radius r er $4\,\pi \cdot r^2$. Vi vil bare ha halvparten av arealet til kulen, altså $2\,\pi \cdot r^2$. Både kjeglen og halvkulen har radius $r = 0,6\,\mathrm{m}$, og kjeglen har høyde $h = 2,6\,\mathrm{m}$, som vi regnet ut tidligere. Overflatearealet til hele modellen er summen av overflatene til kjeglen og halvkulen:

$$\text{overflate av modell} = \text{overflate av kjegle } + \text{overflate av halvkule.}$$

Vi setter inn formlene og tallene vi har, og får at overflaten til modellen O er

$$\begin{aligned} O &= \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \\ &= \pi \cdot 0,6\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{(0,6\,\mathrm{m})^2 + (2,6\,\mathrm{m})^2} + 2\,\pi \cdot \Big(0,6\,\mathrm{m}\Big)^2 \\ &\approx 7,29\,\mathrm{m}^2. \end{aligned}$$

Til slutt må vi finne ut hvor mange bokser lakk som trengs for å lakkere $7,29\,\mathrm{m}^2$. Én boks er nok til $2,2\,\mathrm{m}^2$, så vi vil trenge

$$\frac{7,29}{2,2} \approx 3,31$$

bokser med lakk – eller 4 bokser, siden vi må åpne den fjerde.

Svar: $3,31$ bokser, eller 4 bokser i praksis.