MAT1011 2015 Høst

Eksamenstid:

5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:

Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Del 1 har 8 oppgaver. Del 2 har 7 oppgaver.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Bruk av digitale verktøy som graftegner og regneark skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- orklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
- vurderer om svar er rimelige

Andre opplysninger:

Kilder for bilder, tegninger osv.

- Olje og dollarkurs: (http://www.bbc.com/, 5.07.2016)
- Andre bilder, tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng) Nettkode: E-4AQC

$1{,}0$ g salt inneholder $0{,}4$ g natrium. Helsemyndighetene anbefaler et inntak av natrium på maksimalt $2{,}4$ g per dag.

a)
Hvor mange gram salt kan du maksimalt innta i løpet av en dag dersom du skal følge anbefalingen?

Løsningsforslag a)

La x betegne den maksimale mengden salt man skal innta i følge anbefalingen. Vi vet at hvert gram salt inneholder $0,4$ gram natrium, og da må x gram salt inneholde $x \cdot 0,4$ natrium. Hvis vi skal spise såpass mye salt at vi er helt på yttergrensen til det som er anbefalt å ha i seg av natrium, så må mengden natrium i saltet være $2,4$ g. Dette kan vi sette opp som en likning.

$$x \cdot 0,4 = 2,4$$

Vi vil finne ut hva x er, og vil derfor ha x alene på venstre side av likhetstegnet. Vi dividerer med $0,4$ og forkorter.

$$\frac{x \cdot 0{,}4}{0{,}4} = \frac{2{,}4}{0{,}4}$$
$$x = \frac{2{,}4}{0{,}4}$$

For å regne ut brøken $\frac{2{,}4}{0{,}4}$, kan det være lurt å multiplisere med 10 over og under brøkstreken. Dette er for å få bort kommategnet; heltall er ofte lettere å regne med. Vi har at

$$\frac{2,4}{0,4} = \frac{2,4 \cdot 10}{0,4 \cdot 10} = \frac{24}{4}.$$

Vi kan regne ut $\frac{24}{4}$ for hånd, men vi vet at $6 \cdot 4 = 24$, så $\frac{2{,}4}{0{,}4} = 6$. Dermed er

$$x = 6,$$

og vi kan konkludere med at man ikke burde spise mer enn 6 gram salt hver dag.

Svar: 6 gram.

b)
100 g pizza inneholder 0,8 g salt. En porsjon pizza er beregnet til 300 g.

Hvor mange gram salt inneholder en porsjon pizza?

Løsningsforslag b)

Hvis 100 gram pizza inneholder $0,8$ g salt, så må tre ganger så mye pizza, altså 300 gram, inneholde tre ganger så mye salt. Dermed blir mengden salt i en porsjon pizza lik $3 \cdot 0,8 \text{ g} = 2,4 \text{ g}$.

Svar: $2,4$ gram.

c)
Hvor mange prosent av anbefalt daglig inntak av natrium svarer dette til?

Løsningsforslag c)

Én måte å løse problemet på er å regne ut hvor mye natrium det er i $2,4$ gram salt. Det er $0,4$ g natrium i 1 g salt, så i $2,4$ g salt er det $2,4 \cdot 0,4 \text{ g} = 0,96 \text{ g}$ natrium. Anbefalt daglig mengde er $2,4$ g, og $0,96$ g er

$$\frac{0,96}{2,4} \cdot 100 \ \% = 0,4 \cdot 100 \ \% = 40 \ \%$$

av $2,4$ g. Brøken $\frac{0,96}{2,4}$ kan være litt kjedelig å regne ut for hånd, men det lønner seg å multiplisere med 100 over og under brøkstreken. Det finnes dog en annen måte å løse oppgaven på – i stedet for å finne ut hvor mye natrium det er i 300 gram pizza, kan vi finne prosentandelen direkte ved å finne ut hvor mange prosent salt det er i 300 gram pizza i forhold til den anbefalte mengden. Det er $2,4$ g salt, og anbefalt daglig inntak er 6 g, så prosentandelen blir

$$\frac{2,4}{6} \cdot 100 \ \%.$$

Vi vil regne ut $\frac{2,4}{6}$. Først multipliserer vi med 10 over og under brøkstreken, for å få bort kommategnet. Da får vi

$$\frac{2,4}{6} = \frac{2,4 \cdot 10}{6 \cdot 10} = \frac{24}{60}.$$

Før vi begynner å dividere for hånd er det lurt å faktorisere ut telleren og nevneren og forkorte. Vi starter med 24, som vi umiddelbart kan se er delelig med 2 siden det er et partall. Vi har $24 = 2 \cdot 12$. Vi ser at 12 også er delelig med 2, så $24 = 2 \cdot (6 \cdot 2)$. Til sist er $6 = 2 \cdot 3$, så vi har $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Deretter til 60, som også er et partall. Vi ser at

$$60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Dermed kan vi skrive brøken som

$$\frac{24}{60} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}.$$

Her kan vi forkorte to totall og ett tretall over og under brøkstreken, og vi står igjen med

$$\frac{24}{60} = \frac{2}{5}.$$

Vi vet at $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = 40\ \%$, så svaret er $40\ \%$, noe vi fikk til helt uten å dividere for hånd.

Svar: Mengden natrium i én porsjon pizza er $40\ \%$ av anbefalt daglig inntak.

Oppgave 2 (3 poeng) Nettkode: E-4AQG

Funksjonene f og g er gitt ved

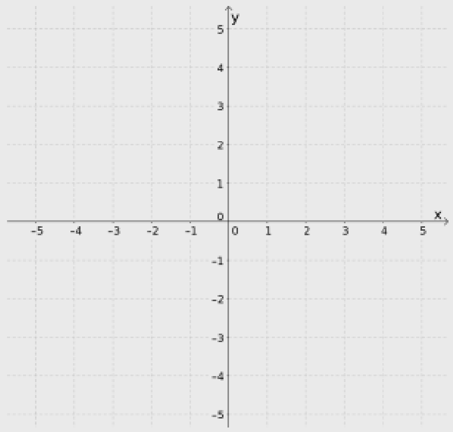
$$f(x) = \frac{1}{2}x$$
$$g(x) = -x + 3$$

a)

Tegn grafene til f og g i samme koordinatsystem, og bestem skjæringspunktet grafisk.

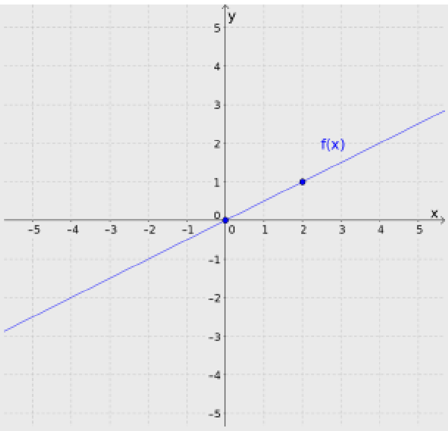
Løsningsforslag a)

Vi skal tegne grafene til funksjonene $f(x) = \frac{1}{2}x$ og $g(x) = -x + 3$. Først tegner vi et koordinatsystem. Ofte er det slik at funksjonene man får oppgitt oppfører seg mest spennende rundt origo, så vi lar x og y variere mellom -5 og 5.

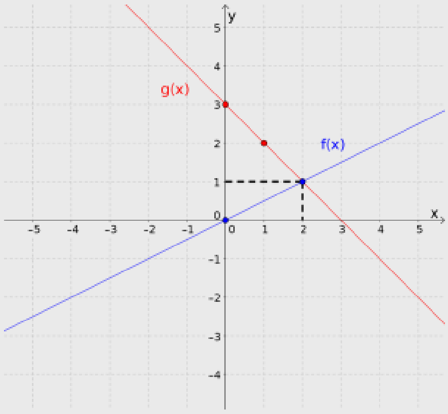


Vanligvis, når vi skal tegne grafen til en funksjon $f(x)$, så velger vi en del punkter på x-aksen, finner funksjonsverdiene i disse punktene, og tegner en kurve gjennom punktene vi får. I dette tilfellet trenger vi faktisk bare å bruke *to* punkter på x-aksen per graf for å tegne dem helt riktige. Det er fordi begge funksjonene er lineære, altså rette linjer. Dette kan vi se ved at det ikke er noen ledd i funksjonene hvor det står noe med x opphøyd i noen annen potens; funksjonene er på formen $ax + b$ der a og b er konstante tall.

Vi starter først med f, og setter inn $x = 0$. Da får vi at $f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$, så den rette linjen som er grafen til f går gjennom origo. Videre kan vi sette inn $x = 2$. Vi velger akkurat 2 for å få bort brøken. Vi har at $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Nå har vi funnet at grafen til f er en rett linje som går gjennom punktene $(0, 0)$ og $(2, 1)$. Vi tegner inn disse punktene i koordinatsystemet, og bruker linjalen for å tegne en rett linje mellom dem.



Vi gjør det samme for g. I $x = 0$ får vi at funksjonsverdien til g er $g(0) = -0 + 3 = 3$, og i $x = 1$ er funksjonsverdien $g(1) = -1 + 3 = 2$. Grafen går altså gjennom punktene $(0, 3)$ og $(1, 2)$. Vi tegner de to punktene og linjen mellom dem inn i koordinatsystemet.



På grafen ser vi at de to grafene krysser hverandre når $x = 2$ og $y = 1$, så skjæringspunktet er $(2, 1)$.

Svar: Skjæringspunktet er $(2, 1)$. Se graf over.

b)

Bestem skjæringspunktet ved regning.

Løsningsforslag b)

Vi vil finne en x som er slik at $f(x) = g(x)$. En annen måte å skrive dette på er

$$\frac{1}{2}x = -x + 3,$$

hvor vi bare har fylt inn definisjonene av henholdsvis $f(x)$ og $g(x)$. Vi vil finne en x som passer inn i ligningen over; dette tilsvarer å løse ligningen. En god strategi er å få alt som har med x å gjøre på én side av likhetstegnet, og alt annet på en annen side. For å få flyttet x-en fra høyre side til venstre, adderer vi med x på hver side.

$$x + \tfrac{1}{2}x = x - x + 3$$
$$x + \tfrac{1}{2}x = 3$$

Vi faktoriserer ut x på venstre side.

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot x = 3$$

Her kan vi trekke sammen de to tallene på venstre side.

$$\frac{3}{2} \cdot x = 3$$

For å få x alene igjen på venstre side, multipliserer vi med $\frac{2}{3}$ på hver side.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x = \frac{2}{3} \cdot 3$$

Her kan vi forkorte både på venstre og høyre side, og vi står igjen med

$$x = 2.$$

Dette betyr at $f(2) = g(2)$. Vi vil finne y-koordinaten til skjæringspunktet også; dette gjør vi rett og slett ved å sette inn 2 i enten f eller g. Vi ser at

$$f\left(2\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

så skjæringspunktet er $(2, 1)$.

Svar: Skjæringspunktet er $(2, 1)$.

Oppgave 3 (2 poeng) Nettkode: E-4AQL

Et år hadde Siri en reallønn på 360 000 kroner. Den nominelle lønnen til Siri dette året var 450 000 kroner.

Bestem konsumprisindeksen dette året.

Løsningsforslag

Vi har følgende sammenheng mellom konsumprisindeks, reallønn og nominell lønn:

$$\frac{\text{reallønn}}{100} = \frac{\text{nominell lønn}}{\text{konsumprisindeks}}.$$

Vi vil finne konsumprisindeksen, og da kan uttrykket over tolkes som en likning der konsumprisindeksen er ukjent. Derfor lar vi x betegne konsumprisindeksen videre; altså skal vi finne en verdi for x som passer inn i likningen

$$\frac{\text{reallønn}}{100} = \frac{\text{nominell lønn}}{x}.$$

Vanligvis er det lurt å først løse likningen, og deretter sette inn verdiene vi vet hva er – men i dette tilfellet er det like greit å sette inn tallene med én gang. Vi vet at reallønnen til Siri er på $360\,000$ kroner og den nominelle lønnen på $450\,000$ kroner. Vi setter dette inn i uttrykket over og får

$$\frac{360\,000}{100} = \frac{450\,000}{x}.$$

På venstre side dividerer vi $360\,000$ på 100, og det tilsvarer å fjerne to nuller fra $360\,000$. Dermed må vi løse følgende likning:

$$3\,600 = \frac{450\,000}{x}.$$

Vi vil gjerne få x opp fra nevneren på høyre side; derfor multipliserer vi med x på hver side av likhetstegnet og forkorter.

$$3\,600 \cdot x = \tfrac{450\,000}{x} \cdot x$$
$$3\,600 \cdot x = 450\,000$$

For å få x alene på venstre side, dividerer vi med $3\,600$ på hver side.

$$\frac{3\,600 \cdot x}{3\,600} = \frac{450\,000}{3\,600}$$

Vi forkorter på venstre side og får

$$x = \frac{450\,000}{3\,600}.$$

Nå må vi regne ut brøken som står på høyre side. Et godt første steg er å krysse bort like mange nuller i tallene over og under brøkstreken. I vårt tilfelle er det to. Dette kan vi gjøre fordi det betyr at teller og nevner har 100 som felles faktor:

$$\frac{450\,000}{3\,600} = \frac{4\,500 \cdot 100}{36 \cdot 100} = \frac{4\,500}{36} \cdot \frac{100}{100} = \frac{4\,500}{36}.$$

La oss regne ut $\frac{4\,500}{36}$ for hånd. Vi starter med å skrive delestykket på en linje.

```
 4 5 0 0 : 3 6 =
```

I utgangspunktet skal vi finne ut hvor mange ganger tallet til høyre (36) går opp i det første sifferet på venstre side (4). At et tall går opp n ganger i et annet, betyr at n multiplisert med det første tallet er mindre enn det siste. Hvis vi skal multiplisere 36 med et heltall som er større eller lik 0 for å få det til å bli mindre enn 4, må vi multiplisere med 0, siden 36 allerede er større enn 4. Derfor går 36 kun 0 ganger opp i 4, så vi må ta med enda et siffer.

```
 4 5 0 0 : 3 6 =
```

Altså skal vi finne ut hvor mange ganger 36 går opp i 45. Svaret her er 1, fordi $36 \cdot 2 = 72$, og det er større enn 45. Det vi har regnet ut nå er at første siffer i svaret er 1.

```
 4 5 0 0 : 3 6 = 1
```

Nå skal vi multiplisere sifferet vi fikk med nevneren (36). Da får vi $36 \cdot 1 = 36$. Dette tallet setter vi under de to sifrene i telleren som vi brukte i sted (45). Neste steg er å trekke fra tallet vi skrev under telleren (36) fra de to sifrene som står på tilsvarende plass i telleren (45). Dette blir $45 - 36 = 9$.

```
  4 5 0 0 : 3 6 = 1
- 3 6
    9
```

Vi fortsetter prosessen, og etter vi har utført utregningen står vi igjen med følgende.

```
  4 5 0 0 : 3 6 = 1 2 5
- 3 6
    9 0
  - 7 2
    1 8 0
  - 1 8 0
        0
```

Dermed blir svaret 125. Setter vi dette inn i ([o3]), får vi

$$x = 125;$$

altså var konsumprisindeksen 125.

Svar: Konsumprisindeksen var 125.

Oppgave 4 (2 poeng) Nettkode: E-4AQO

Pris per softis (kroner)	20	25	40
Antall solgte softis	200	160	100

Tabellen ovenfor viser pris per softis og antall solgte softis i tre ulike kiosker en dag.

Gjør beregninger og avgjør om pris per softis og antall solgte softis er omvendt proporsjonale størrelser.

Løsningsforslag

For at størrelsene skal være omvendt proposjonale, må produktet av tallene i hver kolonne i tabellen være konstant. Altså må $20 \cdot 200$ være det samme som $25 \cdot 160$ og $40 \cdot 100$. Hvis alle er like er størrelsene omvendt proposjonale; vi må derfor regne ut og se. Vi ser først at

$$20 \cdot 200 = 4\,000.$$

Dette kan vi regne ut i hodet; hvis vi har tall med mange nuller på slutten, kan vi legge sammen antall nuller og multiplisere det som står igjen. Ovenfor har vi tre nuller til sammen, og det som står igjen er $2 \cdot 2 = 4$, så svaret blir $4\,000$.

Nå må vi regne ut et av de andre produktene og sammenligne. Vi kunne regnet ut $25 \cdot 160$, men regnestykket $40 \cdot 100$ er lettere å finne ut av hva er, så vi tar det først. Når vi multipliserer med 100 er det eneste vi trenger å gjøre å legge til to nuller.

$$40 \cdot 100 = 4\,000$$

Det ble det samme som forrige gang. Hvis tallet hadde vært forskjellig fra $4\,000$, hadde vi *ikke* trengt å regne ut det siste produktet, siden vi allerede hadde visst at størrelsene ikke var omvendt proposjonale. Det var derfor vi valgte å ta det letteste produktet først; det kunne ha spart oss tid på eksamen. Så må vi sjekke det siste produktet – størrelsene er nemlig omvendt proposjonale hvis (og bare hvis) $25 \cdot 160$ er lik $4\,000$. Vi regner ut for hånd.

```
   3
     2 5 · 1 6 0 = 4 0 0 0
     0 0
   1 2 0
+  2 5
=  4 0 0 0
```

Dermed har vi regnet ut at

$$25 \cdot 160 = 4\,000.$$

Dette er det samme som tidligere, og det betyr at størrelsene er omvendt proposjonale.

Svar: Størrelsene er omvendt proposjonale.

Oppgave 5 (3 poeng) Nettkode: E-4AQQ

Formlene nedenfor kan brukes for å anslå hvor høyt et barn vil bli i voksen alder.

Gutt: (fars høyde + mors høyde) $\cdot 0{,}5 + 7$ cm

Jente: (fars høyde + mors høyde) $\cdot 0{,}5 - 7$ cm

Mors og fars høyde oppgis i centimeter.

En familie består av mor, far og barna Ola og Kari. Mor er 160 cm høy, og far er 180 cm høy.

a)
Hvor høye vil Ola og Kari bli i voksen alder ifølge formlene ovenfor?

Løsningsforslag a)

Vi vet at mor er $160\ \mathrm{cm}$ høy, og at far er $180\ \mathrm{cm}$ høy. Ola er en gutt, så da setter vi inn dette i den første oppgitte formelen.

$$\begin{aligned} & (\text{fars høyde} + \text{mors høyde}) \cdot 0,5 + 7\ \mathrm{cm} \\ = & \ (180\ \mathrm{cm} + 160\ \mathrm{cm}) \cdot 0,5 + 7\ \mathrm{cm} \\ = & \ (340\ \mathrm{cm}) \cdot 0,5 + 7\ \mathrm{cm} \\ = & \ 170\ \mathrm{cm} + 7\ \mathrm{cm} \\ = & \ 177\ \mathrm{cm} \end{aligned}$$

Dermed blir Ola $177\ \mathrm{cm}$ i følge formelen. Vi merker oss at vi regnet ut at $(\text{fars høyde} + \text{mors høyde}) \cdot 0,5 = 170\ \mathrm{cm}$, og at vi skal regne ut akkurat det samme når vi finner Karis høyde. Det sparer oss tid å bruke dette tallet direkte, i stedet for å regne det ut igjen. Kari er en jente, og vi bruker jenteformelen for å finne hennes anslåtte høyde:

$$170\ \mathrm{cm} - 7\ \mathrm{cm} = 163\ \mathrm{cm};$$

altså er det anslått at Kari blir $163\ \mathrm{cm}$.

Svar: $177\ \mathrm{cm}$ for Ola, og $163\ \mathrm{cm}$ for Kari.

b)
En annen familie består av mor, far og sønnen Per, som nå er voksen. Far er 186 cm høy. Per er 189 cm høy.

Hvor høy er mor i denne familien ifølge den første formelen ovenfor?

Løsningsforslag b)

Formelen i oppgaven sier at

$$\text{Pers høyde} = (\text{fars høyde} + \text{mors høyde}) \cdot 0,5 + 7 \text{ cm}.$$

Vi vet at Per er 189 høy og at faren er 186 høy, og vi setter dette inn i uttrykket ovenfor.

$$189 \text{ cm} = (186 \text{ cm} + \text{mors høyde}) \cdot 0,5 + 7 \text{ cm}$$

Dette tolker vi som en ligning med mors høyde som ukjent. Derfor lar vi x betegne høyden til mor. Vi dropper foreløpig alle enhetsbetegnelser (altså der hvor det står cm) for enkelhets skyld. Ligningen blir da

$$189 = (186 + x) \cdot 0,5 + 7.$$

Vi vil ha x alene på en side, og det første vi gjør er å flytte alle ledd uten x i seg på venstre side. Derfor subtraherer vi med 7 på hver side av likhetstegnet.

$$\begin{aligned} 189 - 7 &= (186 + x) \cdot 0,5 + 7 - 7 \\ 182 &= (186 + x) \cdot 0,5 \end{aligned}$$

Vi ser at x-en vår er inne i en parentes. Vi kunne multiplisert ut parentesen, men i stedet multipliserer vi med 2 på begge sider.

$$\begin{aligned} 182 \cdot 2 &= (186 + x) \cdot 0,5 \cdot 2 \\ 364 &= 186 + x \end{aligned}$$

Det siste vi må gjøre for å få x alene er å subtrahere 186 fra hver side.

$$\begin{aligned} 364 - 186 &= 186 + x - 186 \\ 178 &= x \end{aligned}$$

Dermed har vi funnet ut at moren er 178 cm høy.

Svar: Moren er 178 cm høy.

Oppgave 6 (4 poeng) Nettkode: E-4AQU

På bildet ovenfor ser du rundballer som inneholder fôr til husdyr. En rundball har tilnærmet form som en sylinder med diameter og høyde lik 1,2 m.

a)
Gjør overslag og bestem volumet av en rundball. Gi svaret i liter.

Løsningsforslag a)

Rundballene har cirka form som en *sylinder*, og formelen for volumet V til en sylinder med radius r og høyde h er $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Dette kan vi huske ved at volumet til et rett prisme er arealet til grunnflaten (som i dette tilfellet er $\pi \cdot r^2$) multiplisert med høyden (h).

Én måte å gjøre overslag på her er å runde høyden ned til 1 m og radius ned til $0,5$ m. Da har vi rundet ganske mye ned, så vi har råd til å runde π opp til 4. Det anslåtte volumet blir da

$$V \approx 4 \cdot (0,5\,\mathrm{m})^2 \cdot 1\,\mathrm{m}.$$

Her er det lurt å vite at $0,5^2$ er det samme som en fjerdedel. Derfor blir volumet cirka

$$V \approx 4 \cdot \frac{1}{4}\,\mathrm{m}^3 = 1\,\mathrm{m}^3.$$

Vi skal gi svaret i liter, og vi husker at én kubikkmeter gir 1 000 liter (som tilsvarer ett tonn i vekt). Volumet blir derfor cirka 1 000 L.

Svar: Cirka 1000 L.

b)

Gjør overslag og bestem overflaten av en rundball.

Løsningsforslag b)

Arealet til en sylinder er lik arealet av lokket, bunnen og sideflaten summert. Lokket og bunnen har samme areal, nemlig $\pi \cdot r^2$; siden har areal lik omkretsen til sirkelbunnflaten multiplisert med høyden, $2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$. Vi anslår at høyden er 1 meter, radius i bunnen og toppen er $0,5$ meter og at π er 4. Da blir overslaget av overflaten lik

$$\begin{aligned} 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h &\approx 2 \cdot 4 \cdot (0,5\,\mathrm{m})^2 + 2 \cdot 4 \cdot 0,5\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m} \\ &= 2 \cdot 4 \cdot \tfrac{1}{4}\,\mathrm{m}^2 + 2 \cdot 4 \cdot \tfrac{1}{2}\,\mathrm{m}^2 \\ &= 2\,\mathrm{m}^2 + 4\,\mathrm{m}^2 = 6\,\mathrm{m}^2. \end{aligned}$$

Svar: Overflaten er på cirka $6\,\mathrm{m}^2$.

Oppgave 7 (4 poeng) Nettkode: E-4AQY

Forskere skal prøve ut en ny test for å avgjøre om en person er smittet av en bestemt sykdom.

Testen skal prøves ut på 360 personer. På forhånd vet forskerne at 60 av disse personene er smittet av sykdommen, mens resten ikke er smittet.

Det viser seg at 68 av personene tester positivt (det vil si at testen viser at de er smittet av sykdommen). Av disse 68 er det 10 personer som forskerne vet ikke er smittet.

a)

Tegn av og fyll ut krysstabellen nedenfor.

	Smittet	Ikke smittet	Sum
Tester positivt			
Tester ikke positivt			
Sum			

Løsningsforslag a)

Først lager vi tabellen slik den er satt opp i oppgaven.

	Smittet	Ikke smittet	Sum
Tester positivt			
Tester ikke positivt			
Sum			

Vi vet at det var totalt 68 personer som testet positivt. Det betyr at vi skal skrive 68 i raden "Tester positivt" under kolonnen "Sum". Vi vet også at det var 360 personer med i forsøket, og siden 68 personer testet positivt, må de resterende $360 - 68 = 292$ ikke ha testet positivt. Dette fører vi inn under "Sum" i rekken ``Tester ikke positivt. Vi vet også at det er totalt 360 personer med i forsøket totalt, så vi skriver 360 nederst i høyre hjørne.

	Smittet	Ikke smittet	Sum
Tester positivt			68
Tester ikke positivt			292
Sum			360

Vi kan gjøre det tilsvarende i “Sum”-raden, med de som er smittet og ikke smittet. Av 360 er 60 personer smittet, så $360 - 60 = 300$ er ikke smittet.

	Smittet	Ikke smittet	Sum
Tester positivt			68
Tester ikke positivt			292
Sum	60	300	360

I ruten øverst til venstre skal vi altså skrive hvor mange av de smittede som testet positivt for sykdommen. Helst skulle alle som var smittet teste positivt, men av de 68 personene som testet positivt var det 10 som ikke var smittet. Da var det $68 - 10 = 58$ av de smittede som testet positivt. Siden det var 10 personer uten sykdommen som testet positivt, skriver vi dette inn i ruten ved siden av.

	Smittet	Ikke smittet	Sum
Tester positivt	58	10	68
Tester ikke positivt			292
Sum	60	300	360

Siden bare 58 av de 60 smittede testet positivt, må 2 av de smittede ikke ha testet positivt. Dette fyller vi inn der “Smittet”-kolonnen krysser “Tester ikke positivt”-kolonnen. I den siste ruten skal vi skrive hvor mange som ikke hadde sykdommen, og som heller ikke testet positivt. Vi slår opp i tabellen vår og ser at det var 292 personer som ikke testet positivt, men vi vet fra tidligere at 2 av disse faktisk hadde sykdommen. Derfor skal vi skrive $292 - 2 = 290$ i den siste ruten.

	Smittet	Ikke smittet	Sum
Tester positivt	58	10	68
Tester ikke positivt	2	290	292
Sum	60	300	360

Vi kan sjekke om vi har skrevet den riktige tabellen ved å se at det som står i “Sum”-kolonnen faktisk er summen av det som står i sin rad. I den første raden er $58 + 10 = 68$, $2 + 290 = 292$ og $60 + 300 = 360$, så det stemmer. Det samme må gjøres med “Sum”-raden også, hvis vi vil vite at alt er korrekt.

Svar:

	Smittet	Ikke smittet	Sum
Tester positivt	58	10	68
Tester ikke positivt	2	290	292
Sum	60	300	360

b)

Bestem sannsynligheten for at en person som er smittet, tester positivt.

Løsningsforslag b)

Vi ser på krysstabellen vår. Sannsynligheten for at en person som er smittet tester positivt, er

$$\frac{\text{antall personer som er smittet og tester positivt}}{\text{antall personer som er smittet}} \cdot 100\ \%.$$

Dette kan vi finne ut av ved hjelp av krysstabellen vår. Under "Smittet"-kolonnen i "Tester positivt"-raden står det 58, så 58 av personene som var smittet testet positivt. Totalt var det 60 personer som var smittet, så brøken over er lik

$$\frac{58}{60},$$

eller $\frac{29}{30}$ ved å dele på to over og under brøkstreken. Hvis vi vil ha sannsynligheten i prosent, multipliserer vi med $100\ \%$, og sannsynligheten blir

$$\frac{58}{60} \cdot 100\ \%.$$

Denne brøken kan vi regne ut på vanlig måte for hånd, men vi kan forenkle den litt først. Vi kan flytte 100 inn i brøken og krysse ut to nuller.

$$\frac{58 \cdot 100}{60} = \frac{5800}{60} = \frac{580}{6}$$

Veldig ofte er det en god idé å faktorisere brøker før man regner dem ut for hånd. Vi ser at både telleren og nevneren ender med sifre som er partall, og det betyr at begge tallene kan divideres på 2. Vi vet at $\frac{6}{2} = 3$. For å finne $\frac{580}{2}$ er det lurt å først prøve seg på $\frac{58}{2}$. Dette kan vi skrive som

$$\frac{58}{2} = \frac{50+8}{2} = \frac{50}{2} + \frac{8}{2},$$

og vi vet at $\frac{50}{2} = 25$ og at $\frac{8}{2} = 4$. Derfor er $\frac{58}{2} = 25 + 4 = 29$, og følgelig er $\frac{580}{2} = 290$. Dermed kan vi skrive brøken ([7b]) som

$$\frac{580}{6} = \frac{290 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{290}{3},$$

der vi har forkortet den felles faktoren 2. Vårt nye regnestykke er altså $\frac{290}{3}$. Dette kan virke som en lang omvei for å gjøre utregningen bare litt lettere, men meningen er at vi skal gjøre utregningene ovenfor i hodet. Det er dessuten god trening, og hvis man mestrer hoderegningen er denne måten å gjøre det på veldig grei.

Vi lurer kanskje på om vi kan faktorisere 290 enda mer slik at vi kan stryke 3-tallet i nevneren også. Her kan vi bruke et triks. Det viser seg at det er slik at et tall er delelig med 3 hvis og bare hvis tallets tverrsum er delelig med 3. Tverrsummen er alle sifrene til tallet lagt sammen; i dette tilfellet er tverrsummen $2 + 9 + 0 = 11$. Vi vet at 11 ikke er delelig med 3, og derfor er heller ikke 290 delelig med 3. Derfor må vi regne ut $\frac{290}{3}$ på vanlig måte.

```
2 9 0, 0 : 3 = 9 6, 6
2 7
  2 0
- 1 8
    2  0
```

Vi kan fortsette videre, men vi vil få samme svar igjen. Vi får dermed at svaret blir cirka $96,66\ \%$.

Svar: Cirka $96,66\ \%$, eller $\frac{29}{30}$.

c)

Bestem sannsynligheten for at en person som tester positivt, ikke er smittet.

Løsningsforslag c)

Sannsynligheten for at en person som tester positivt ikke er smittet, er

$$\frac{\text{antall personer som testet positivt og som ikke var smittet}}{\text{antall personer som testet positivt}} \cdot 100\ \%.$$

Som i forrige oppgave ser vi på krysstabellen vår. Der står det at 10 av de som testet positivt ikke var smittet, og at det var 68 personer som testet positivt totalt. Brøken over blir da

$$\frac{10}{68} \cdot 100\ \% \approx 0,1471 \cdot 100\ \% = 14,71\ \%.$$

Altså er det rundt $14,71\ \%$ sannsynlighet for at en person som ikke er smittet tester positivt for sykdommen. Dette kalles en "falsk positiv".

Svar: Cirka $14,71\ \%$, eller $\frac{5}{34}$.

Oppgave 8 (3 poeng) Nettkode: E-4AR8

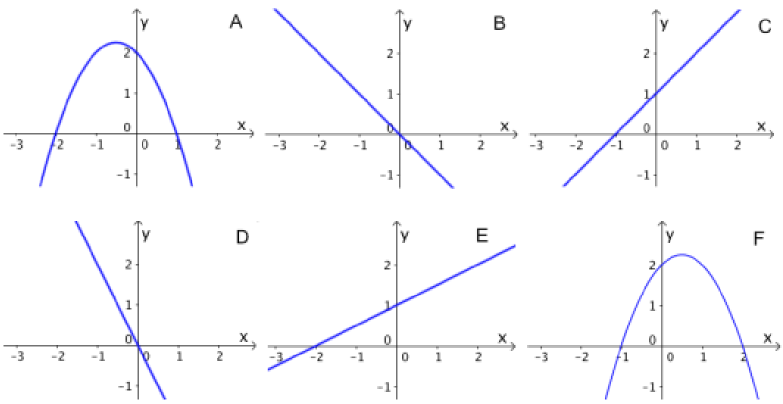
Funksjonene f, g og h er gitt ved

$f(x) = -x$

$g(x) = -x^2 + x + 2$

$h(x) = \frac{1}{2}x + 1$

Nedenfor ser du grafene til seks ulike funksjoner. Hvilken graf er grafen til f, hvilken graf er grafen til g , og hvilken graf er grafen til h ? Begrunn svarene dine.



Løsningsforslag

Vi kunne valgt å sette inn forskjellige verdier for x i funksjonene f, g og h og se hvilke grafer som passer inn, men dette tar gjerne en del tid. For å gjøre arbeidet mindre kan vi først luke ut hvilke grafer som *ikke* kan tilhøre de forskjellige funksjonene.

Det første vi ser er at fire av grafene er rette linjer, altså at de er grafer til lineære funksjoner. Lineære funksjoner er funksjoner på formen $ax + b$, der a og b er konstanter. Vi kan dermed se at både f og g er lineære: For f er $a = -1$ og $b = 0$, og for h er $a = \frac{1}{2}$ og $b = 1$. Derfor kan ikke grafene A og F tilhøre f eller h. Derimot *må* en av dem tilhøre g, siden g ikke er lineær og A og F er de eneste ikke-lineære grafene.

Videre kan vi se på funksjonenes konstantledd. Funksjonen f har 0 som konstantledd, så grafen til f må gå gjennom origo (midten av koordinatsystemet). Derfor må grafen til f enten være B eller D. Konstantleddet til h er 1, så grafen til h

må krysse punktet $(0, 1)$ i koordinatsystemet. De eneste grafene som gjør det er C og E, så det må være en av disse.

Vi kan også se på stigningstallet til de lineære (rette) funksjonene, altså det tallet som multipliseres med x. For f har vi $f(x) = -x = -1 \cdot x$, så stigningstallet er -1. Kandidatene til grafen til f er B og D, og vi ser at B er den eneste av de to med stigningstall -1. Vi ser dette fordi stigningstallet betyr hvor mange enheter på y-aksen man går per enhet på x-aksen; B går én nedover, mens D går to. Vi gjør det samme for h. Stigningstallet til h er $\frac{1}{2}$, så grafen til h skal være ganske slak. Kandidatene er C og E, og E er den eneste av de to som passer. Dermed har vi funnet ut at grafen til f er B, og at grafen til h er E.

Til slutt må vi finne ut av hvilken av grafene A og F som passer til g. Dette kan vi gjøre ved å sammenligne nullpunkter. Vi ser at A har et nullpunkt i $x = 1$ og at F har et nullpunkt i $x = 2$. Vi setter disse verdiene inn i funksjonsuttrykket til g. Om $g(1) = 0$ så er A riktig graf, og hvis $g(2) = 0$ så er F riktig graf. Vi får at

$$\begin{aligned} g(1) &= -1^2 + 1 + 2 = -1 + 3 = 2, \text{og} \\ g(2) &= -2^2 + 2 + 2 = -4 + 4 = 0; \end{aligned}$$

dermed har g et nullpunkt i $x = 2$, så F er den riktige grafen.

Svar: Grafen til f er B, grafen til g er F og grafen til h er E.

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng) Nettkode: E-4ARH

En bedrift produserer og selger en vare. Kostnadene $K(x)$ kroner og inntektene $I(x)$ kroner ved produksjon og salg av x enheter av varen er gitt ved

$$K(x) = 8{,}5x^2 + 25x + 11900 \quad , \qquad 10 \leq x \leq 100$$
$$I(x) = 790x \quad , \qquad 10 \leq x \leq 100$$

a)

Bruk graftegner til å tegne grafene til funksjonene K og I i samme koordinatsystem.

Løsningsforslag a)

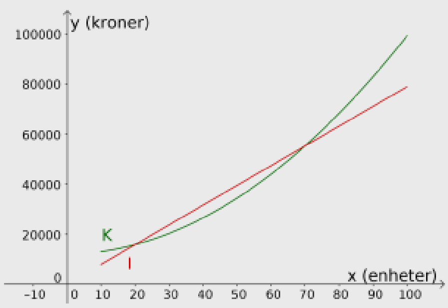
Vi skal tegne grafene for x-verdier mellom 10 og 100, så vi drar x-aksen slik at vi ser disse verdiene. Vi ser også at konstantleddet til K er veldig høyt, så vi må ha ganske høye verdier på y-aksen for å kunne se hele grafen. Vi velger å la y-aksen gå til $100\,000$. Vi kan eventuelt høyreklikke på en av koordinataksene og stille inn verdiene der, eller så kan vi tegne grafen først og tilpasse aksene etterpå. I "Skriv inn"-boksen skriver vi

```
K(x) = Funksjon[8.5x^2 + 25x + 11900, 10, 100]
```

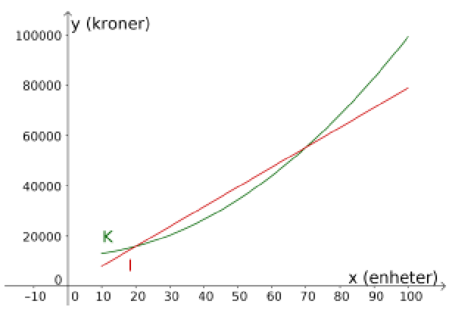
og deretter trykker vi "Enter". Vi skriver "Funksjon[...]" fordi vi bare vil tegne grafen mellom $x = 10$ og $x = 100$. Etter det skriver vi det tilsvarende for $I(x)$.

```
I(x) = Funksjon[790x, 10, 100]
```

Resultatet blir noe tilsvarende bildet under.



Svar:



b)
For hvilke verdier av x er inntektene og kostnadene like store?

Løsningsforslag b)

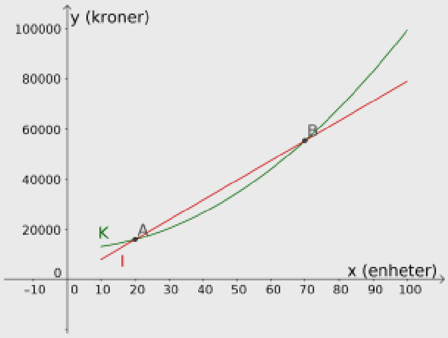
Vi bruker den samme *GeoGebra*-filen som i forrige oppgave. Vi ser at grafene krysser hverandre i to punkter. For å finne ut nøyaktig hvor disse punktene er, bruker vi kommandoen

```
Skjæring[ <Funksjon>, <Funksjon>,
<Startverdi for x>, <Sluttverdifor x> ]
```

i "Skriv inn"-boksen. Vi kan også trykke direkte på skjæringspunktene. Vi fyller inn funksjonene våre, og lar x gå mellom 10 og 100:

```
Skjæring[ I, K, 10, 100 ]
```

Resultatet blir slik.



I algebrafeltet kan vi se at koordinatene til A og B er henholdsvis $(20, 15\,800)$ og $(70, 55\,300)$. Det betyr at for $x = 20$ og for $x = 70$ så er inntektene og kostnadene like store.

Svar: For $x = 20$ og for $x = 70$.

c)
Hvor mange enheter av varen må bedriften produsere og selge for at overskuddet skal bli størst mulig? Hvor stort blir overskuddet da?

Løsningsforslag c)

Vi bruker samme Geogebra-fil som i forrige oppgave. Vi vet at overskudd er inntekt minus kostnad. Med andre ord er $O(x) = I(x) - K(x)$ et uttrykk for bedriftens overskudd. Vi kan regne ut og se at

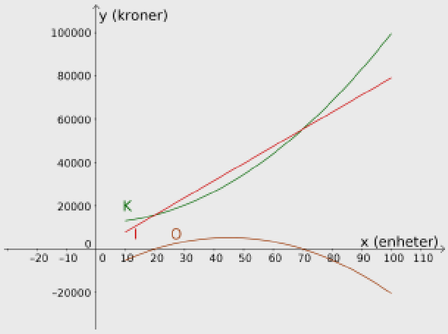
$O(x) =$

$790x - \left(8,5x^2 + 25x + 11\,900\right) = -8,5x^2 + 765x - 11\,900$

og deretter plotte dette inn i koordinatsystemet, men vi kan i stedet skrive

```
O(x) = I(x) - K(x)
```

direkte inn i "Skriv inn"-boksen. Resultatet er vist under.



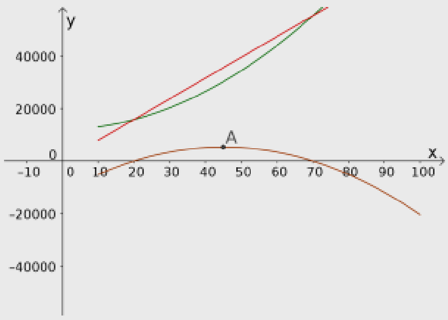
Vi vil finne når overskuddet er størst. Vi bruker kommandoen

```
Ekstremalpunkt[ <Funksjon>, <Start>, <Slutt> ]
```

Vi fyller inn funksjonen vår, og vi lar x gå fra 10 til 100, som vanlig.

```
Ekstremalpunkt[ O, 10, 100 ]
```

Resultatet er vist under.



I algebrafeltet ser vi at toppunktet til grafen er $(45, 5\,312.5)$. Det betyr at overskuddet har sin høyeste verdi, $5\,312,5$, når $x = 45$.

Svar: Overskuddet har størst verdi, $5\,312,5$, når $x = 45$.

Oppgave 2 (3 poeng) Nettkode: E-4ARL

For 3 år siden kjøpte Silje en ny scooter. Verdien av scooteren har falt med 15 % per år. I dag har scooteren en verdi på ca. 8 600 kroner.

a)
Bestem scooterens verdi om 2 år.

Løsningsforslag a)

Scooterens verdi er $8\,600$ kroner, og den vil falle $15\ \%$ i verdi hvert år. Vi kan finne hva scooterens verdi er etter ett år ved å multiplisere med vekstfaktoren

$$1 - \frac{15}{100} = 0,85.$$

Hvis vi er usikre på hvordan vi kommer fram til vekstfaktoren, kan vi regne oppgaven fra bunnen av. Vi vil da finne ut hva $15\ \%$ av $8\,600$ er. Det regner vi ut slik: $15\ \%\ \text{av}\ \ 8\,600 = \frac{8\,600}{100} \cdot 15 = 1\,290.$ Prisen etter ett år vil da være $8\,600 - 1\,290 = 7\,310$ kroner. Vi kan gjøre det samme igjen med $7\,310$ kroner i stedet for $8\,600$ for å finne scooterens verdi etter to år, men la oss først se på en snarvei som kan gjøre hele oppgaven lettere. I ligningen over finner vi $15\ \%$ av beløpet og trekker dette fra totalbeløpet. Vi kunne i stedet ha funnet $85\ \%$ av totalbeløpet, og vi ville ha fått svaret med én gang:
$85\ \%\ \text{av}\ \ 8\,600 = \frac{8\,600}{100} \cdot 85 = 7\,310.$ I ligningen over skriver vi $\frac{8\,600}{100} \cdot 85$. Dette er det samme som

$$8\,600 \cdot \frac{85}{100} = 0,85.$$

Dette er vekstfaktoren. Altså kunne vi ha kommet fram til scooterens verdi direkte ved å multiplisere $8\,600$ med $0,85$. Det samme kan vi gjøre for år nummer to:

$$scooterens\ verdi\ etter\ to\ år \ = \ 85\%\ \ av\ \ 7310$$

Vi må da regne ut dette,

$$0{,}85 \cdot 7310 = 6213{,}5$$

Altså er scooterens verdi etter to år lik $6\,213,5$ kroner. Vi kunne kommet fram til samme svar ved å multiplisere $8\,600$ med $0,85$ to ganger:
$8\,600 \cdot 0,85 \cdot 0,85 = 8\,600 \cdot (0,85)^2 = 6\,213,50.$

Svar: Scooterens verdi etter to år er $6\,213,50$ kroner.

b)

Hvor mye kostet scooteren da den var ny?

Løsningsforslag b)

La oss først prøve å finne verdien til scooteren året før, og deretter prøve å generalisere metoden vår. La z være den ukjente verdien til scooteren året før. Vi vet at den falt med $15\ \%$ i verdi til $8\ 600$ kroner. Det betyr at $8\ 600$ kroner er $85\ \%$ av verdien z. Med andre ord,

$$\frac{z}{100} \cdot 85 = 8\ 600.$$

Dette kan skrives på en annen måte som

$$z \cdot 0,85 = 8\ 600.$$

Vi vil finne z, så vi dividerer med $0,85$ på hver side av likhetstegnet, forkorter venstre side og regner ut høyre side.

$$\frac{z \cdot 0{,}85}{0{,}85} = \frac{8\ 600}{0{,}85}$$
$$z \approx 10117,65.$$

Dette betyr at verdien året før var cirka $10117,65$ kroner. Dette kan vi gjøre igjen, med $10117,65$ i stedet for $8\ 600$, og deretter enda en gang – men vi kan løse hele problemet med én ligning hvis vi tenker litt lurt. La x være den ukjente opprinnelige verdien til Siljes scooter. Etter tre år med synking i verdi har den gått ned til $8\ 600$ kroner. Det betyr at

$$x \cdot (0,85)^3 = 8\ 600.$$

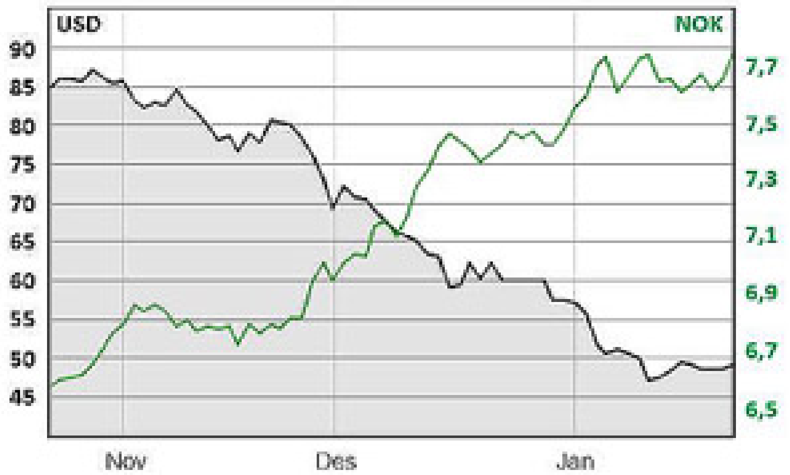
Dette er nesten det samme som vi gjorde i forrige oppgave, bare andre veien. Denne ligningen kan vi løse ved å dividere med $(0,85)^3$ på begge sider av likhetstegnet og forkorte:

$$\frac{x \cdot (0{,}85)^3}{(0{,}85)^3} = \frac{8\ 600}{(0{,}85)^3}\, x \approx 14\ 003,66$$

Dette betyr at scooteren opprinnelig kostet cirka $14\ 003,66$ kroner, eller cirka 14 000 kroner.

Svar: Scooteren kostet opprinnelig cirka $14\ 003,66$ kroner, eller cirka 14 000 kroner.

Oppgave 3 (5 poeng) Nettkode: E-4ARR



Den svarte grafen i diagrammet ovenfor viser hvordan prisen for et fat olje, gitt i dollar (USD), utviklet seg fra slutten av oktober 2014 til slutten av januar 2015. Den grønne grafen viser hvordan dollarkursen utviklet seg i den samme perioden.

Dollarkurs er prisen for 1 dollar (USD) i norske kroner (NOK).

Prisen for et fat olje (i USD) er gitt til venstre i diagrammet og dollarkursen (i NOK) til høyre i diagrammet.

a)
Hvor mange USD har prisen for et fat olje gått ned i løpet av perioden som er vist i diagrammet? Hvor mange prosent tilsvarer dette?

Løsningsforslag a)

Den svarte grafen og tallene på venstre side viser oljeprisen. Den starter på rundt 85 USD per fat, og avtar til cirka 50 USD per fat. Det betyr at den har falt $85 - 50 = 35$ USD på tre måneder. Vi skal regne ut hvor mange prosent dette er av utgangspunktet, altså av 85 USD. Det blir $\frac{35}{85} \cdot 100\ \% \approx 41,18\ \%$.

Svar: Oljeprisen har gått ned cirka 35 USD, som tilsvarer om lag $41,18\ \%$.

b)
Bestem prisen for et fat olje i NOK i starten av perioden som er vist i diagrammet.

Løsningsforslag b)

Vi er interesserte i den grønne grafen, og vi undersøker den helt til venstre av diagrammet. Den starter på et tall cirka midt mellom 45 og 50 av tallene til venstre. Vi er derimot interesserte i de grønne tallene som står til høyre, siden det er de som sier noe om dollarkursen. Hvis vi følger linjene til høyre side, ser vi at et tall midt mellom 45 og 50 på venstre side svarer til et tall mellom $6,7$ og $6,5$ på høyre side, med andre ord cirka $6,6$. Dermed kostet 1 USD rundt $6,6$ NOK i starten av perioden. Prisen for et fat olje var 85 USD, og i NOK var dette

$$85 \cdot 6,6 = 561.$$

Altså kostet et fat olje 561 NOK i begynnelsen av perioden.

Svar: Et fat olje kostet 561 NOK i begynnelsen av perioden.

c)

Hvor mange NOK har oljeprisen gått ned i løpet av perioden som er vist i diagrammet? Hvor mange prosent tilsvarer dette?

Løsningsforslag c)

Oljeprisen gikk ned fra 85 USD til 50 USD. Vi må regne ut dollarkursen i slutten av perioden for å omregne 50 USD til NOK. Vi ser at den grønne grafen er på cirka $7,7$ i slutten av perioden, så 50 USD blir til $50 \cdot 7,7 = 385$ norske kroner. Det betyr at oljeprisen sank med $561 - 385 = 176$ NOK. Vi vil vite hvor mange prosent dette er av startbeløpet, altså av 561. Det blir

$$\frac{176}{561} \cdot 100\ \% \approx 31,37\ \%.$$

Svar: Prisen i NOK for et fat olje falt med 176 NOK, eller cirka $31,37\ \%$.

d)

Sammenlikn svarene i oppgave a) og oppgave c), og kommenter.

Løsningsforslag d)

Ifølge svaret i deloppgave a):

oljeprisen har gått ned cirka 35 USD, som tilsvarer om lag $41,17\ \%$.

Ifølge svaret i deloppgave c):

prisen i NOK for et fat olje falt med 176 NOK, eller cirka $31,37\ \%$.

Når vi sammenligner to prosenttall, kan vi bruke prosentpoeng. Vi ser at prisen i USD falt omlag 10 prosentpoeng mer enn prisen i NOK. Hvis vi ser på dollarkursen i samme tidsrom, ser vi at denne steg mye.

Svar: Prisen i USD falt om lag ti prosentpoeng mer ned enn prisen i NOK. Dette kan vi knytte til at dollarkursen steg mye i tidsrommet.

Oppgave 4 (8 poeng) Nettkode: E-4ARX

Under ser du Sofies timeliste for februar. Ordinær arbeidstid er 37,5 timer per uke. Arbeid utover dette regnes som overtid.

Timeliste februar	
Uke 6	40 timer
Uke 7	41 timer
Uke 8	37,5 timer
Uke 9	39 timer

a)

Lag et regneark som vist i figur 1 nedenfor, og bruk dette til å bestemme nettolønnen til Sofie i februar. Legg inn opplysningene fra timelisten i de gule cellene, og lag formler i de mørkegrå cellene.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		INNDATA			TIMELISTE			
3		Ordinær timelønn	kr 160,00		Uke	Antall timer totalt	Antall timer ordinær arbeidstid	Antall timer overtid
4		Timelønn overtid	kr 240,00				37,5	
5		Pensjonstrekk	2 %				37,5	
6		Skattetrekk	38 %				37,5	
7		Fagforeningskontingent (per måned)	kr 470,00				37,5	
8					SUM			
9								
10		LØNNSBEREGNING						
11		Ordinær lønn						
12		Lønn for overtid						
13		Bruttolønn						
14		Pensjonstrekk (av ordinær lønn)						
15		Fagforeningskontingent						
16		Trekkgrunnlag						
17		Skattetrekk						
18		Netto månedslønn						

Løsningsforslag a)

Først setter vi opp regnearket som i oppgaven.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		INNDATA			TIMELISTE			
3		Ordinær timelønn	kr 160,00		Uke	Antall timer totalt	Antall timer ordinær arbeidstid	Antall timer overtid
4		Timelønn overtid	kr 240,00				37,5	
5		Pensjonstrekk	2 %				37,5	
6		Skattetrekk	38 %				37,5	
7		Fagforeningskontingent (per måned)	kr 470,00				37,5	
8					SUM			
9								
10		LØNNSBEREGNING						
11		Ordinær lønn						
12		Lønn for overtid						
13		Bruttolønn						
14		Pensjonstrekk (av ordinær lønn)						
15		Fagforeningskontingent						
16		Trekkgrunnlag						
17		Skattetrekk						
18		Netto månedslønn						

I første rekke er vi ute etter timelisten. Først skriver vi på de forskjellige uketallene. I den utfylte timelisten står det at vi er i ukene 6, 7, 8 og 9. Ved siden av uketallene skriver vi hvor mye Sofie arbeidet den uken. Det står på høyre side av der uketallene står i timelisten.

	E	F	G	H
1				
2	**TIMELISTE**			
3	Uke	Antall timer totalt	Antall timer ordinær arbeidstid	Antall timer overtid
4	6	40	37,5	
5	7	41	37,5	
6	8	37,5	37,5	
7	9	39	37,5	
8	SUM			

Nå må vi regne ut hvor mye Sofie jobbet i overtid hver uke. I timelisten vi fylte ut står det at antall timer med ordinær arbeidstid er $37,5$ – og det betyr at alt over $37,5$ timer regnes som overtid. I uke 6 jobbet Sofie dermed $40 - 37,5 = 2,5$ timer overtid. Dette er vi bedt om å skrive en generell formel for, så i ruten til høyre, altså i H4, skriver vi

```
=F4-G4
```

Dette betyr at vi tar antall ordinære arbeidstimer, som står i G4, blir trukket fra det faktiske antallet timer Sofie jobbet, som står i F4. Vi skal *ikke* skrive

```
=40-37.5
```

direkte inn i ruten, for poenget med slike regneark er at tallene endrer seg etter vært som vi endrer informasjonen.

Vi skal skrive det tilsvarende videre nedover til H7, altså til uke 9. Vi gjør dette ved å markere H4 og "dra" ruten nedover. Dermed ser regnearket slik ut.

	E	F	G	H
1				
2	**TIMELISTE**			
3	Uke	Antall timer totalt	Antall timer ordinær arbeidstid	Antall timer overtid
4	6	40	37,5	2,5
5	7	41	37,5	3,5
6	8	37,5	37,5	0
7	9	39	37,5	1,5
8	SUM			

I SUM-rekken skal vi summere kolonnene vi er i; i F8 skal vi altså summere alle F-rutene over. Dette gjør vi ved å skrive

```
=F4+F5+F6+F7
```

i ruten F8. Vi “drar” ruten bortover til H8, og regnearket ser slik ut:

	E	F	G	H
1				
2	**TIMELISTE**			
3	Uke	Antall timer totalt	Antall timer ordinær arbeidstid	Antall timer overtid
4	6	40	37,5	2,5
5	7	41	37,5	3,5
6	8	37,5	37,5	0
7	9	39	37,5	1,5
8	SUM	157,5	150	7,5

Så går vi over til lønnsberegningen. I C11 skal vi skrive inn ordinær lønn, det vil si lønnen Sofie får av den ordinære arbeidstiden. Antall timer ordinær arbeidstid står i rute G8, som vi nettopp regnet ut, og den ordinære timelønnen står i rute C3. Dermed skriver vi i C11 det følgende:

```
=G8*C3
```

I C12, altså lønn for overtid, gjør vi det samme med overtidsarbeidet og -timelønnenlønnen. Bruttolønnen er ordinær lønn addert med overtidslønnen, og vi skriver

```
=C11+C12
```

i ruten C13. Deretter skal vi regne ut pensjonstrekket, som er $2\,\%$ av *ordinær* lønn. Prosenttallet står i C5, og for å regne ut trekket multipliserer vi tallet i C5 med bruttolønnen i C11.

```
=C11*C5
```

Fagforeningskontingenten er det samme tallet hver måned, uavhengig av lønnen, og denne avgiften står i C7. Derfor skriver vi bare “=C7” i denne ruten. Trekkgrunnlaget er da summen av C14 og C15, trukket fra bruttolønnen i C13. Skattetrekket regner vi ut på samme vis som med pensjonstrekket:

```
=C16*C6
```

Netto månedslønn får vi ved å trekke skatten fra trekkgrunnlaget.

```
=C16-C17
```

Til slutt står vi igjen med følgende regneark.

	A	B	C
10	**LØNNSBEREGNING**		
11		Ordinær lønn	24000
12		Lønn for overtid	1800
13		Bruttolønn	25800
14		Pensjonstrekk (av ordinær lønn)	480
15		Fagforeningskontigent	470
16		Trekkgrunnlag	24850
17		Skattetrekk	9443
18		Netto månedslønn	15407

Dermed er netto månedslønn lik $15\,407$ kroner.

Svar: Netto månedslønn er lik $15\,046$ kroner.

b)

Utvid regnearket fra oppgave a) som vist i figuren under. Lag formler i de mørkegrå cellene. Bruk regnearket til å bestemme hvor stort beløp Sofie overførte til sparekontoen i februar.

20	**SPARING**	
21	Overføring til sparekonto, 20% av netto månedslønn	
22	Ekstra overføring til sparekont, 60% av netto månedslønn som overstiger 15 000 kr	
23	Sum overføring sparekonto	

Sofie overfører noe av månedslønnen til en sparekonto. Se figuren over. Beløpet som overføres til sparekontoen, rundes av nedover til nærmeste hele krone.

Løsningsforslag b)

Først skal vi regne ut C21, altså overføring til sparekontoen som består av $20\ \%$ av nettolønnen til Sofie. Nettolønnen står i C18, så i C21 skriver vi

```
=C18*20%
```

I neste rute skal vi regne ut den ekstra sparingen. Sofie vil nemlig spare $60\ \%$ av de pengene hun tjener utover 15 000. Da må vi først trekke 15 000 fra nettolønnen, og regne ut $60\ \%$ av dette. Vi må dessuten sørge for at vi ikke får negative tall hvis nettolønnen er under 15 000. Det gjør vi slik:

```
=IF(C18>15000; (C18-15000)*60%; 0)
```

Her har vi lagt til en kommando som sier at hvis netto månedslønn ikke er over 15 000, så skal vi heller ikke spare ekstra feriepenger.

I den siste ruten summerer vi de to foregående. Vi står igjen med følgende regneark.

20	**SPARING**	
21	Overføring til sparekonto, 20% av netto månedslønn	3081,4
22	Ekstra overføring til sparekont, 60% av netto månedslønn som overstiger 15 000 kr	244,2
23	Sum overføring sparekonto	3325,6

Vi husker at svaret skal rundes nedover, så Sofie overførte $3\,325$ kroner til sparekontoen i februar.

Svar: Sofie overførte $3\,325$ kroner til sparekontoen i februar.

c)

Anta at Sofie jobbet nøyaktig 37,5 timer hver av de fire ukene i februar.

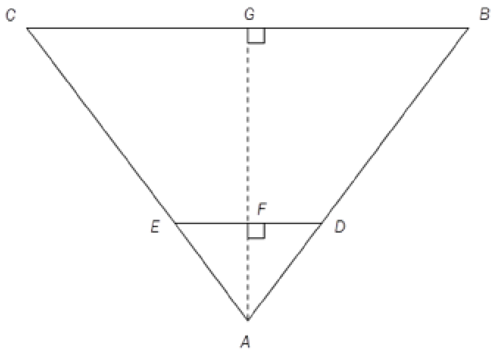
Bruk regnearket du laget i oppgave a) og b), til å bestemme hvor stort beløp hun da ville ha overført til sparekontoen.

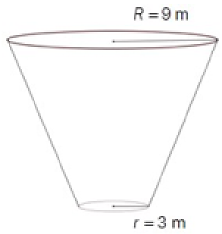
Løsningsforslag c)

Vi fyller inn $37,5$ i hver av rutene vi skal fylle timetall inn i. Regnearket gjør jobben for oss, og vi leser av 2 858,20 kroner. Det skal rundes ned til 2 858 kroner.

Svar: Sofie ville ha overført $2\,858$ kroner til sparekontoen i februar.

Oppgave 5 (5 poeng) Nettkode: E-4AX0



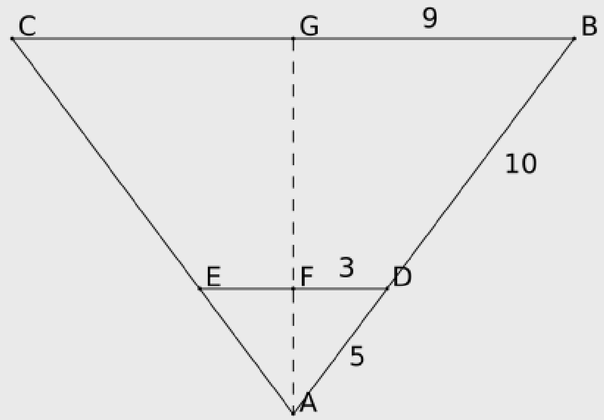


I figuren ovenfor er $AD = 5$, $BD = 10$, $DF = 3$ *og* $BG = 9$.

a)
Bestem AF og FG.

Løsningsforslag a)

Først tegner vi av tegningen og setter på lengdene vi fikk oppgitt.



Vi er ute etter lengdene AF og FG. La oss først se på ΔADF. Vi vet at $\angle DFA$ er 90°, så dette er en rettvinklet trekant med hypotenus med lengde 5 og en katet med lengde 3. Trekanter med nøyaktig disse lengdene møter man ofte på når man jobber med Pytagoras' setning, siden det viser seg at den andre kateten har lengde 4 – så sidelengdene er alle heltall. Vi sjekker dette ved å bruke Pytagoras' setning, som sier at hvis vi har en rettvinklet trekant med hypotenus av lengde a og kateter av lengdene b og c, så vet vi at

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

I vårt tilfelle er $a = 5$ og $b = 3$. Vi setter inn og får følgende likning.

$$5^2 = 3^2 + c^2.$$

Vi vet at $5^2 = 25$ og at $3^2 = 9$, så likningen blir til

$$25 = 9 + c^2.$$

Vi trekker fra 9 på begge sider for å få c alene på høyre side, og vi får

$$25 - 9 = 9 + c^2 - 9$$
$$16 = c^2.$$

Med andre ord skal vi finne et tall c slik at $c^2 = 16$. Da vet vi at $c = \sqrt{16} = 4$, så $AF = 4$.

Så skal vi finne FG. Hvis vi kan finne AG, så kan vi finne FG ved å trekke fra AF, som vi nettopp har funnet. Vi ser at AG er en katet i ΔABG. Vi vet de to andre sidelengdene til denne trekanten, så vi kan bruke Pytagoras setning igjen. Vi merker oss at $AB = AD + DB = 5 + 10 = 15$. Pytagoras setning gir oss

$$AB^2 = AG^2 + GB^2,$$

og hvis vi setter inn det vi vet får vi

$$15^2 = AG^2 + 9^2.$$

Vi løser med hensyn på AG og får

$$AG = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12.$$

Til slutt får vi at $FG = AG - AF = 12 - 4 = 8$.

Svar: $AF = 4$ og $FG = 8$.

b)

Figuren til høyre viser en tank formet som en rettavkortet kjegle. Radius i bunnen er $r = 3$ m, og radius i toppen er $R = 9$ m.

Hvor mange liter rommer vanntanken?

Løsningsforslag b)

Tverrsnittet til en kjegle må være en likebeint trekant (hvis tverrsnittet er tatt loddrett og gjennom midten av kjeglen). Dimensjonene til tanken viser at den eneste trekanten som kan være tverrsnittet til tanken, er trekanten i oppgaven over. En annen måte å se dette på er å se for seg at parallellogrammet $EDBC$ dreier seg i rommet, og at den resulterende figuren må være tanken. I alle fall betyr dette at vi har funnet høyden av tanken – den er nemlig FG, som vi fant i forrige oppgave. Vi vil finne volumet av tanken, og vi har ingen direkte formel for volumet av en rettavkortet kjegle – men vi har en formel for volumet av en kjegle. Dermed kan vi finne volumet til tanken ved å finne volumet av kjeglen som tanken er en del av, og ta bort volumet av den nederste delen av kjeglen. Volumet V_1 av hele kjeglen er det volumet vi får dersom vi roterer trekanten $\varDelta ABC$ 180° rundt AG. Volumet V_2 for vi ved å rotere $\varDelta ADE$ 180° rundt AF. Volumet V til tanken blir da

$$V = V_1 - V_2.$$

Volumet til en kjegle med radius $r$og høyde h er $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. Vi avventer med å sette på enheter på lengdene til slutten, for å spare skrivetid. Vi vet at høyden til hele kjeglen er $AG = 12$, og at høyden til den lille kjeglen som vi vil ta bort er $AF = 4$. Radiusene vet vi også er henholdsvis 9 og 3. Med dette kan vi regne ut volumene V_1 og V_2:

$$\begin{aligned} V_1 &= \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 12 \approx 1017,88, \text{ og} \\ V_2 &= \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 \approx 37,70. \end{aligned}$$

Til slutt setter vi inn i

$$V = V_1 - V_2.$$

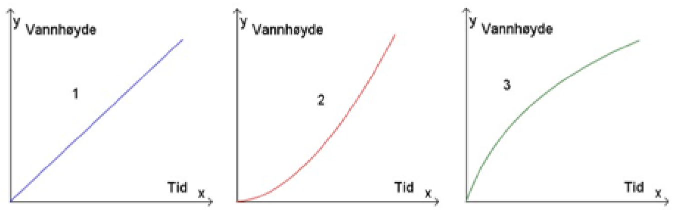
, og får $V = V_1 - V_2 \approx 1017,88 - 37,70 = 980,18.$ Dermed er volumet til tanken cirka $980,18$ m^3.

Svar: Volumet til tanken er cirka $980,18$ m^3.

c)

Tanken fylles med vann. Vannet renner inn i tanken med konstant fart.

Hvilken av de tre grafene nedenfor illustrerer best hvordan vannhøyden i tanken endres med tiden? Begrunn svaret ditt.



Løsningsforslag c)

Svar:

Vanent renner inn i tanken med konstant fart. Med andre ord er volumet vanns om kommer inn i tanken per sekund, konstand. Siden tanken blir videre mot toppen, vil det kreve mer vann for å øke vannstanden med 1 cm mot toppen av tanken enn det gjør i bunnen. Siden vannet renner inn i tanken med konstant fart, tar det også lengre tid å øke vannstanden med 1 cm i toppen enn det gjør i bunnen. Grafen til vannstanden skal derfor øke fortere i begynnelsen enn på slutten, og dermed er graf 3 den eneste som passer.

Oppgave 6 (2 poeng) Nettkode: E-4AX9

Petter er en ivrig løper og trener hver dag. Han har tre ulike skopar som han veksler på å bruke. Når han skal ut og løpe, tar han tilfeldig et skopar.

a)

Bestem sannsynligheten for at han kommer til å bruke samme skopar de neste tre dagene.

Løsningsforslag a)

Petter skal trekke tre par sko av tre mulige, med tilbakelegging. Vi vil regne ut sannsynligheten for at disse tre er de samme. Sannsynligheten for at Petter velger et visst par sko den første dagen, er $\frac{1}{3}$. Sannsynligheten for at han velger det samme paret igjen neste dag, er fremdeles $\frac{1}{3}$. Dermed er sannsynligheten for at han velger akkurat dette skoparet to dager på rad, lik

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

For å finne sannsynligheten for at han trekker det samme paret igjen den tredje dagen, må vi multiplisere enda en gang med $\frac{1}{3}$, og vi får $\frac{1}{27}$. Vi er ikke ferdige ennå! Vi har regnet ut sannsynligheten for at Petter trekker et spesifikt par alle tre dagene – for eksempel det blå paret som vist på bildet i oppgaven. Men hva om han velger det røde eller blå paret tre dager på rad? Det er like stor sannsynlighet for at han valgte det blå paret. Til sammen blir sannsynligheten for at han velger et hvilket som helst par tre dager på rad, lik

$$\frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} = 3 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{9}.$$

Vi kunne også regnet dette ut ved å si at sannsynligheten for at han trekker et par sko første dag er 1, og sannsynligheten for at han trekker nøyaktig dette paret de to neste dagene er $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Totalt blir da sannsynligheten $1 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$.

Svar: Sannsynligheten er $\frac{1}{9}$.

b)

Bestem sannsynligheten for at han kommer til å bruke tre ulike skopar de neste tre dagene.

Løsningsforslag b)

Sannsynligheten for at Petter i det hele tatt velger et par sko første dag, er 1, som i forrige oppgave. Dette er fordi han uansett velger ut et par. La oss si at han valgte ut det blå paret. Sannsynligheten for at han velger ut et *nytt* par neste dag, altså enten det røde eller grønne paret, er $\frac{2}{3}$. Det er like stor sannsynlighet for å velge det røde eller grønne tre dager på rad, som for å velge det blå tre dager på rad. Den tredje dagen er det bare ett par igjen han kan velge for å velge tre forskjellige, og sannsynligheten for at han velger dette paret er $\frac{1}{3}$. Dermed blir sannsynligheten for at han velger tre forskjellige par lik

$$1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

Vi merker oss at vi ikke trenger å multiplisere svaret med 3 som forrige gang, fordi vi ikke gjorde noen antagelser på hvilket par Petter valgte første gang. Vi måtte i så fall ha endret at sannsynligheten for å trekke det visse paret første dag var $\frac{1}{3}$, gjøre dette tre ganger, og summere opp svarene. Dette ville gitt nøyaktig det samme.

ALTERNATIV LØSNING

Svar: Sannsynligheten er $\frac{2}{9}$.

Oppgave 7 (8 poeng) Nettkode: E-4AYV

En formel for utregning av bremselengde er gitt ved

$s = \frac{v^2}{19{,}6 \cdot f}$

der $s =$bremselengde (m), $v =$fart (m/s), $f =$friksjonsfaktor

På tørt sommerføre er friksjonsfaktor f mellom 0,8 og 1,0. På glatt vinterføre kan f være nede i $0{,}2$.

a)
Vis at en fart på 40 km/h tilsvarer en fart på ca. $11{,}1$ m/s.

Løsningsforslag a)

Vi vil finne ut hvor mange meter per sekund én kilometer per time er. Vi kan sette dette opp som en likning.

$$1 \text{ km/t} = x \text{ m/s}$$

Vi vet at 1 kilometer er 1 000 meter. For å regne om timer til sekunder, regner vi først om til minutter. Det er 60 minutter i 1 time, og det er 60 sekunder i 1 minutt – dermed blir det

$$60 \cdot 60 = 3\ 600$$

sekunder i 1 time. Vi kan skrive dette som $\text{km} = 1\ 000 \cdot \text{m}$ og $\text{t} = 3\ 600\text{s}$. Vi setter dette inn i

$$1 \text{ km/t} = x \text{ m/s}$$

og får

$$1 \cdot \frac{1\ 000\text{m}}{3\ 600\text{s}} = x \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tallet foran $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ skal være likt på begge sider av likhetstegnet, og dermed ser vi at

$$x = \frac{1\ 000}{3\ 600} = \frac{10}{36};$$

det vil si at én kilometer per time er det samme som $\frac{10}{36}$ meter per sekund. Vi ville vite at $40 \text{ km/t} \approx 11,1 \text{ m/s}$, så vi multipliserer med 40 og får at

$40 \ \text{ km/t} = 40 \cdot \frac{10}{36} \text{ m/s} = 11{,}11\ldots \text{ m/s} \approx 11{,}1 \text{ m/s}$

Svar:

Herved har vi vist at 40 km/h tilsvarer en fart på ca. $11{,}1$ m/s.

b)

Bestem bremselengden på sommerføre med $f = 0{,}8$ når farten er 40 km/h, og når farten er 80 km/h.

Bestem bremselengden på vinterføre med $f = 0{,}2$ når farten er 40 km/h, og når farten er 80 km/h.

Løsningsforslag b)

Først skal vi regne ut bremselengden når $f = 0,8$ og farten er $40\,\mathrm{km/t}$. Vi vet fra forrige oppgave at $40\,\mathrm{km/t} \approx 11,1\,\mathrm{m/s}$. Vi setter dette inn i formelen:

$$s = \frac{v^2}{19,6 \cdot f} \approx \frac{11,1^2}{19,6 \cdot 0,8} \approx 7,86\,\mathrm{m},$$

så bremselengden er cirka $7,86$ meter. Videre skal vi finne bremselengden når friksjonsfaktoren fremdeles er $0,8$, men når farten dobles til $80\,\mathrm{km/t}$, eller cirka $22,2\,\mathrm{m/s}$. Vi setter dette inn i formelen:

$$s \approx \frac{22,2^2}{19,6 \cdot 0,8} \approx 31,43\,\mathrm{m}.$$

Vi ser at selv om farten bare dobles, så firedobles bremselengden.

Nå skal vi se på bremselengden med de samme hastighetene som før, men på glatt vinterføre, altså med $f = 0,2$. Vi regner ut som før, med farten henholdsvis $40\,\mathrm{km/t} = 11,1\,\mathrm{m/s}$ og $80\,\mathrm{km/t} = 22,2\,\mathrm{m/s}$.

$$\text{Bremselengde med lav fart} \approx \tfrac{11,1^2}{19,6 \cdot 0,2} \approx 31,43\,\mathrm{m}$$

$$\text{Bremselengde med høy fart} \approx \tfrac{22,2^2}{19,6 \cdot 0,2} \approx 125,72\,\mathrm{m}$$

Dette betyr at bremselengden med vinterføre og $40\,\mathrm{km/t}$ i fart er lik bremselengden på sommerføre med dobbelt så høy fart. Bremselengden på vinterføre i $80\,\mathrm{km/t}$ er farlig lang.

Svar: Bremselengdene er henholdsvis cirka $7,86\,\mathrm{m}$, $31,43\,\mathrm{m}$, $31,43\,\mathrm{m}$ og $125,72\,\mathrm{m}$.

c)

Hvordan endrer bremselengdene i oppgave b) seg når farten dobles? Er bremselengde og fart på glatt vinterføre proporsjonale størrelser?

Løsningsforslag c)

Vi bruker tallene fra forrige oppgave og ser at

$$\frac{\text{Bremselengde på sommerføre i 80 km/t}}{\text{Bremselengde på sommerføre i 40 km/t}} \approx \frac{31{,}43\text{ m}}{7{,}86\text{ m}} \approx 4$$

og

$$\frac{\text{Bremselengde på vinterføre i 80 km/t}}{\text{Bremselengde på vinterføre i 40 km/t}} \approx \frac{125{,}72\text{ m}}{31{,}43\text{ m}} \approx 4$$

Vi ser at hvis vi dobler farten vår, så firedobler vi bremselengden, både på sommerføre og vinterføre. Med dette kan vi også si at størrelsene ikke er proposjonale, for i så fall ville en dobling i farten gitt en dobling i bremselengden. For ordens skyld regner vi det også ut på vanlig måte.

Vi finner ut om bremselengde og fart på vinterføre er proposjonale størrelser. Det betyr at det finnes et eller annet tall k slik at

$$\frac{\text{fart}}{\text{bremselengde}} = k,$$

for alle verdier av fart og bremselengde. Vi setter inn verdiene vi vet om, altså bremselengdene når farten er $11,1\text{ m/s}$ og $22,2\text{ m/s}$.

$$\frac{11{,}1}{31{,}43} \approx 0,35$$
$$\frac{22{,}2}{125{,}72} \approx 0,18$$

Disse forholdene var *ikke* like, så størrelsene er ikke proposjonale.

Vi kan også se dette direkte ut i fra formelen $s = \frac{v^2}{19{,}6 \cdot f}$. Når farten v dobles, så firedobles telleren, fordi $(2v)^2 = 4v^2$, mens nevneren forblir uendret.

Svar: Bremselengden firedobles når vi dobler farten, og størrelsene er ikke proposjonale.

d)

Gjør beregninger og finn en regel for hvor fort du kan kjøre på glatt vinterføre med $f = 0{,}2$ for å få samme bremselengde som du har på sommerføre med $f = 0{,}8$.

Løsningsforslag d)

På sommerføre er bremselengden med fart v_s lik

$$s = \frac{v_s^2}{19,6 \cdot 0,8},$$

og på vinterføre med fart v_v er bremselengden

$$s = \frac{v_v^2}{19,6 \cdot 0,2}.$$

Vi vil finne ut hvor fart v_v vi kan ha på vinterføre for å få lik bremselengde med fart v_s på sommerføre. Derfor setter vi de to uttrykkene over lik hverandre.

$$\frac{v_v^2}{19,6 \cdot 0,2} = \frac{v_s^2}{19,6 \cdot 0,8}$$

Vi vil ha vinterfarten v_v uttrykt ved sommerfarten v_s, så vi vil ha v_v alene på en side av likhetstegnet. Derfor multipliserer vi med nevneren som står under ${v_v}^2$, og forkorter.

$$\frac{v_v^2}{19{,}6{\cdot}0{,}2} \cdot 19,6 \cdot 0,2 = \frac{v_s^2}{19{,}6{\cdot}0{,}8} \cdot 19,6 \cdot 0,2$$

$$v_v^2 = v_s^2 \cdot \frac{19{,}6{\cdot}0{,}2}{19{,}6{\cdot}0{,}8}$$

$$v_v^2 = v_s^2 \cdot \frac{1}{4}$$

For å få bort potensen på venstre side, tar vi kvadratroten av begge sider av likhetstegnet.

$$\sqrt{v_v^2} = \sqrt{v_s^2 \cdot \frac{1}{4}}$$

$$v_v = v_s \cdot \frac{1}{2}$$

Dette betyr at vi må halvere farten om vinteren for å få samme bremselengde som på sommeren. Dette stemmer med at bremselengden vi fant i b) for $40\,\mathrm{km/t}$ om vinteren var den samme som for $80\,\mathrm{km/t}$ om sommeren.

Svar: Farten om vinteren må halveres for å få samme bremselengde.