MAT1011 2014 Høst

Eksamenstid:

5 timer:
Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.

Hjelpemidler:

Del 1:

Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Del 2:

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Framgangsmåte:
Du skal svare på alle oppgavene.

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte.

Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.

Veiledning om vurderingen:
Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du

- viser regneferdigheter og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

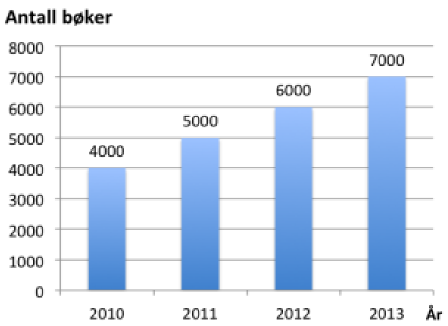
Andre opplysninger:

Kilder for bilder, tegninger osv.

- Skatteoppgjør: (http://www.tu.no/, 4.07.2016)
- Andre bilder, tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng) Nettkode: E-4AMA



Diagrammet ovenfor viser hvor mange bøker en forfatter har solgt hvert år de fire siste årene.

Når var den prosentvise økningen i salget fra et år til det neste størst?

Løsningsforslag

Fra 2010 til 2011 øker antall solgte bøker fra 4 000 til 5 000. Det gir en økning på 1 000 bøker, og dette gir en økning på $25\ \%$. Vi kan se dette direkte ved at 1 000 er nøyaktig én fjerdedel av 4 000, og $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 100\ \% = 25\ \%$.

Fra 2011 til 2012 øker antall solgte bøker igjen med 1 000 – fra 5 000 til 6 000. Vi kan regne ut at dette er en økning på $20\ \%$ på tilsvarende vis som over – nemlig ved å se at 1 000 er en femtedel av 5 000, og $\frac{1}{5} = 20\ \%$. Dette er en lavere prosentvis økning enn det forrige året.

Vi kunne også ha regnet ut de prosentvise økningene for det neste året også, men vi ville ha sett at den hadde sunket. Det er fordi antall solgte bøker øker med 1 000 hvert år, og 1 000 er en større andel av 4 000 enn det er av noen andre større tall.

For ordens skyld setter vi opp de prosentvise endringene for alle årene.

$$\text{Økning fra 2010 til 2011} = \frac{1000}{4000} = 25\ \%$$
$$\text{Økning fra 2011 til 2012} = \frac{1000}{5000} = 20\ \%$$
$$\text{Økning fra 2012 til 2013} = \frac{1000}{6000} \approx 16{,}67\ \%$$

Svar: I 2010.

Oppgave 2 (1 poeng) Nettkode: E-4AMC

Ifølge en oppskrift trenger du 500 g kjøttdeig for å lage middag til fire personer.

Hvor mye kjøttdeig trenger du for å lage middag til ni personer?

Løsningsforslag

I følge oppskriften trenger vi 500 g kjøttdeig for å lage middag til fire personer. Per person blir det da $\frac{500 \text{ g}}{4}$. Dette kan vi regne ut for hånd, men vi kan også regne det ut direkte ved å se at $\frac{500}{2} = 250$, og videre at $\frac{250}{2} = 125$. For hånd vil regnestykket se cirka slikt ut.

```
   5 0 0 : 4 = 1 2 5
-  4
   1 0
 -   8
     2 0
 -   2 0
       0
```

Dette betyr at hver person skal ha 125 g kjøttdeig. Vi skal lage middag til ni personer, og da trenger vi $125 \text{ g} \cdot 9$ kjøttdeig. Vi regner ut.

```
  2 4
  1 2 5 · 9 = 1 1 2 5
1 1 2 5
```

Dermed trenger vi $1\,125 \text{ g}$ kjøttdeig for å lage middag til ni personer.

Svar: Vi trenger $1\,125 \text{ g}$ kjøttdeig.

Oppgave 3 (2 poeng) Nettkode: E-4AME

I basisåret kostet en vare 600 kroner. I 2013 kostet varen 720 kroner. Vi antar at prisen for varen har fulgt indeksen.

Bestem indeksen for varen i 2013.

Løsningsforslag

Vi har følgende sammenheng mellom priser og indekser.

$$\frac{\text{indeks i basisåret}}{\text{pris i basisåret}} = \frac{\text{indeks i 2013}}{\text{pris i 2013}}.$$

Vi husker at indeksen i basisåret alltid er 100. Videre var prisen i basisåret 600 kroner, og i 2013 var prisen 720 kroner. Dette kan vi sette inn i ligningen over.

$$\frac{100}{600} = \frac{\text{indeks i 2013}}{720}$$

Dette er en ligning vi vil løse med hensyn på indeksen i 2013. Vi kunne like godt ha kalt dette ukjente tallet for x. Vi vil gjerne ha indeksen alene igjen på en side, så vi multipliserer begge sider av likhetstegnet med 720, og forkorter.

$$\frac{100}{600} \cdot 720 = \frac{\text{indeks i 2013}}{720} \cdot 720$$
$$\frac{100 \cdot 720}{600} = \text{indeks i 2013}$$

Nå må vi regne ut brøken $\frac{100 \cdot 720}{600}$. Det første vi ser er at det er mange nuller både over og under brøkstreken, og siden vi multipliserer i telleren kan vi stryke disse mot hverandre:

$$\frac{100 \cdot 720}{600} = \frac{100 \cdot 720}{100 \cdot 6} = \frac{720}{6}.$$

Vi kan regne ut denne brøken for hånd, men det er ofte lurt å faktorisere litt først. Vi ser at $6 = 2 \cdot 3$ og at $720 = 2 \cdot 360$, så vi har

$$\frac{720}{6} = \frac{360 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{360}{3}.$$

Dette stykket kan vi ta i hodet – alt vi trenger å gjøre er å dividere hvert siffer i 360 på 3. Da ser vi at $\frac{360}{3} = 120$, og det betyr at indeksen i 2013 var 120.

Svar: Indeksen i 2013 var 120.

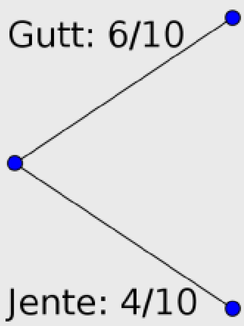
Oppgave 4 (2 poeng) Nettkode: E-4AMG

I en klasse er det seks gutter og fire jenter. To elever velges tilfeldig til å være med i en spørreundersøkelse.

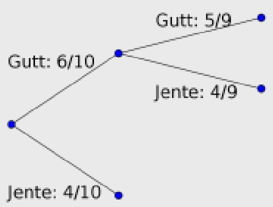
Tegn et valgtre, og bruk dette til å bestemme sannsynligheten for at én jente og én gutt velges ut.

Løsningsforslag

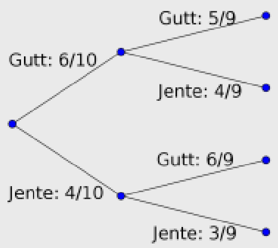
Først velges det én elev til å delta på spørreundersøkelsen. Det er totalt 10 personer i klassen. Vi vet at 6 av dem er gutter og 4 av dem er jenter, så sannsynligheten for at denne første eleven er gutt eller jente er henholdsvis $\frac{6}{10}$ og $\frac{4}{10}$. Dette skriver vi opp som den første delen av valgtreet vårt.



Så går vi videre til neste del av treet. La oss ta den øverste kanten i treet vårt først – med andre ord antar vi for øyeblikket at den første eleven som ble trukket ut var en gutt. Da er det 5 gutter igjen, siden samme eleven ikke kan velges ut to ganger på rad. Vi har fremdeles 4 jenter, og det totale antallet elever å velge blant er $4 + 5 = 9$. Dermed er sannsynligheten for å velge en gutt og en jente henholdsvis $\frac{5}{9}$ og $\frac{4}{9}$. Vi fører dette inn i valgtreet.



På samme vis regner vi ut at hvis den første eleven som ble valgt ut var en jente, så blir sannsynlighetene for at den neste eleven ble gutt eller jente henholdsvis $\frac{6}{9}$ og $\frac{3}{9}$. Dette gir oss det endelige valgtreet.



Så skal vi regne ut sannsynligheten for at det ble trukket ut nøyaktig én jente og én gutt. Det er to måter dette kan gjøres på – enten trekkes det først en gutt og så en jente, eller så trekkes det først en jente og så en gutt. Sannsynlighetene for at disse hendelsene inntreffer, kan vi finne ut i fra treet ved å bruke multiplikasjonsregelen. Sannsynligheten for at det først blir trukket en gutt og deretter en jente, er $\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9}$. Tilsvarende er sannsynligheten for at det først blir trukket en jente og deretter en gutt, lik $\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9}$. Sannsynligheten for at en av disse to hendelsene inntreffer, får vi ved å addere:

$$\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9}$$

Vi merker at hvis vi multipliserer ut brøkene, så er begge nevnerene de samme, og vi kan trekke sammen.

$$\frac{6 \cdot 4}{90} + \frac{4 \cdot 6}{90}$$

Nå ser vi at brøkene faktisk er like. Vi vet at $6 \cdot 4 = 24$, og får

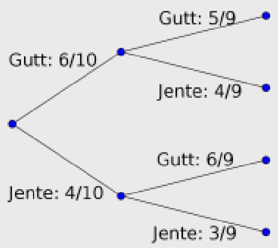
$$\frac{6 \cdot 4}{90} + \frac{4 \cdot 6}{90} = 2 \cdot \frac{24}{90} = \frac{48}{90}.$$

Denne brøken kan forkortes.

$$\frac{48}{90} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 2}{15 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{8}{15}$$

Dermed er sannsynligheten for at det blir valgt ut én gutt og én jente lik $\frac{8}{15}$.

Svar: Sannsynligheten for at det blir valgt ut én gutt og én jente er lik $\frac{8}{15}$.



Oppgave 5 (2 poeng) Nettkode: E-4AMJ

Trond påstår at antall kiwi du kjøper i denne butikken, og beløpet du betaler for kiwiene, er proporsjonale størrelser. Therese mener det ikke er grunnlag for å påstå dette.

Hvordan kan Trond og Therese argumentere?

Løsningsforslag

I dette tilfellet betyr det at $\frac{\text{Prisen for } n \text{ kiwier i kroner}}{n} = k$, for et eller annet tall k.

Trond kan argumentere ved å bruke ligningen ovenfor. Vi vet at vi får 4 kiwier for 10 kroner og 8 kiwier for 20 kroner. Dette kan vi sette inn i formelen, og vi får at

$$\frac{\text{Prisen for 4 kiwier i kroner}}{4} = \frac{10}{4},$$

og

$$\frac{\text{Prisen for 8 kiwier i kroner}}{8} = \frac{20}{8} = \frac{2 \cdot 10}{2 \cdot 4} = \frac{10}{4}.$$

Disse to tallene er de samme, så ut i fra informasjonen vi har kan det virke som om størrelsene er proposjonale.

Derimot kan Therese argumentere i mot ved å påpeke at vi ikke vet hvor mye vi må betale for et annet antall kiwier. Det er mulig at 4 kiwier for 10 kroner er et tilbud, og at kiwiene ellers ville ha kostet (for eksempel) 3 kroner hver. I så fall ville størrelsene *ikke* vært proposjonale.

Trond kan argumentere videre med at 20 kroner for 8 kiwier er samme pris som 4 kiwier for 10 kroner, og at det dermed ikke virker som om det er noe spesielt tilbud på kiwier.

Svar: Ut i fra de tallene vi er gitt kan det virke som om størrelsene er proposjonale, men vi kan ikke vite det med sikkerhet, fordi vi ikke vet hva det koster når vi kjøper et annet antall kiwier.

Oppgave 6 (3 poeng) Nettkode: E-4AML

I 2006 kostet en vare 600 kroner. I 2014 koster varen 1 000 kroner.

a)

I løpet av disse åtte årene har prisen økt lineært. Forklar hva det vil si.

Løsningsforslag a)

Når vi sier at prisen har økt *lineært* de siste åtte årene, betyr det at prisen har økt like mye fra et år til neste år i denne perioden.

b)

Vi antar at prisen fortsetter å øke lineært.

Bestem en funksjon f som viser prisen $f(x)$ kroner for varen x år etter 2006.

Løsningsforslag b)

Vi vet at funksjonen f skal være på formen $f(x) = ax + b$. Siden x måles i år etter 2006, skal a være hvor mye prisen til varen vokser hvert år, og b skal være prisen til varen når $x = 0$, eller i år 2006. Vi vet allerede at prisen i 2006 var 600 kroner, så $b = 600$. Videre vet vi at prisen har økt fra 600 kroner i 2006 til 1 000 kroner i 2014 – det er en økning på $1\,000 - 600 = 400$ kroner over 8 år. Det betyr at økningen per år er

$$\frac{400}{8}\,\mathrm{kr} = 50\,\mathrm{kr}.$$

Dermed er $a = 50$, og funksjonsuttrykket til f blir $f(x) = 50x + 600$.

Svar: $\underline{\underline{f(x) = 50x + 600}}$

c)

Hvor mye vil varen koste i 2018 ifølge funksjonen i oppgave b)?

Løsningsforslag c)

Funksjonsuttrykket vi fant i b) avhenger ikke at vi er mellom år 2006 og år 2014. Derfor kan det brukes som en tilnærming (eller approksimasjon) til hvordan prisen utvikler seg i videre år. Vi gjør dette ved å sette inn $x = 12$ i funksjonsuttrykket til f (en annen måte å si dette på er at vi *evaluerer* f i $x = 12$). Dette er altså fordi 2018 er 12 år etter 2006. Vi setter inn og får

$$f(12) = 12 \cdot 50 + 600.$$

Vi regner ut $12 \cdot 50$ for hånd.

$$\begin{array}{l} ^{1} \\ \quad 1\ 2 \cdot 5\ 0 = 6\ 0\ 0 \\ \quad 0\ 0 \\ 5\ 0 \\ 6\ 0\ 0 \end{array}$$

Altså har vi at $12 \cdot 50 = 600$. Vi kunne også regnet ut dette i hodet ved å se at

$$12 \cdot 50 = (6 \cdot 2) \cdot (50) = 6 \cdot (2 \cdot 50) = 6 \cdot 100 = 600$$

Vi setter dette inn for x i $f(x) = 50x + 600$, og får
$f(12) = 12 \cdot 50 + 600 = 600 + 600 = 1\,200.$ Dette betyr at varen ville ha kostet 1 200 kroner i 2018 i følge funksjonen vår.

Svar: 1 200 kroner.

Oppgave 7 (4 poeng) Nettkode: E-4AMQ

Julie har fått følgende oppgave:

«En formiddag i barnehagen var det fem ganger så mange barn ute som inne. Etter lunsj kom tre barn til ut. Da ble det åtte ganger så mange barn ute som inne.

Hvor mange barn var det i barnehagen denne dagen?»

Hun arbeider med teksten, og setter først opp en tabell:

Inne	Ute
x	$5x$
$x-3$	$5x+3$

Så setter hun opp denne likningen:

$8\left(x-3\right)=5x+3$

a)

Forklar hvordan Julie kommer fram til uttrykkene som er satt inn i tabellen, og hvordan hun kommer fram til likningen.

Løsningsforslag a)

I "Inne"-kolonnen i tabellen til Julie står det først x, og deretter $x-3$. Fra teksten vet vi at et visst antall barn var inne før lunsj, og at tre av disse gikk ut etter lunsj. Dette samsvarer helt med tabellen til Julie, hvis vi sier at x er antall barn inne før lunsj. Vi kunne satt opp tabellen enda mer oversiktlig ved å føre inn at første kolonne representerer *før* lunsj, og at andre kolonne representerer *etter* lunsj. Vi merker oss at x er det samme tallet før og etter lunsj.

	Inne	Ute
Før lunsj	x	$5x$
Etter lunsj	$x-3$	$5x+3$

Vi vet nemlig at det var åtte ganger så mange barn ute som inne, etter lunsj. Setter vi inn uttrykkene vi har funnet for antall barn de forskjellige stedene, får vi

$$8\cdot(x-3)=5x+3.$$

b)

Løs likningen.

Hvor mange barn var det i barnehagen denne dagen?

Løsningsforslag b)

Det aller første vi gjør er å multiplisere ut parentesen på venstre side. Dette gjør vi ved å multiplisere det som står utenfor med det som står inni, tur etter tur. Vi husker at $8(x-3)$ er det samme som $8 \cdot (x-3)$.

$$8 \cdot (x-3) = 8 \cdot x - 8 \cdot 3 = 8x - 24$$

Dermed blir ligningen vår

$$8x - 24 = 5x + 3.$$

Vi vil gjerne ha alt som har med x gjøre på én side av likhetstegnet, og alt annet på den andre. Derfor trekker vi fra $5x$ på hver side først, og deretter adderer vi med 24. (Vi kunne også ha addert med $24 - 5x$ med én gang.)

$$\begin{aligned} 8x - 5x - 24 &= 5x - 5x + 3 \\ 3x - 24 &= 3 \\ 3x - 24 + 24 &= 3 + 24 \\ 3x &= 27 \end{aligned}$$

Dermed har vi funnet ut at 27 er tre ganger så mange barn som det er i barnehagen. Vi finner svaret ved å dividere på 3. Vi husker at $\frac{27}{3} = 9$, og vi får dermed at

$$x = \frac{27}{3} = 9.$$

Dette betyr at det var 9 barn ute før lunsj. Vi vet dessuten at det var 5 ganger så mange barn som var ute før lunsj, og $5 \cdot 9 = 45$. Det betyr at det var totalt $9 + 45 = 54$ barn i barnehagen denne dagen.

Svar: 54 barn.

Oppgave 8 (4 poeng) Nettkode: E-4AMU

a)

Hva kjennetegner et annuitetslån?

Hva kjennetegner et serielån?

Løsningsforslag a)

I hver termin skal man betale to beløp – det ene beløpet er avdraget på lånet, og det andre beløpet er rentene til banken. Hvis vi har et serielån, betaler vi like mye i avdrag i hver termin. Siden rentene minsker når vi betaler ned lånet, blir renteutgiftene lavere etter hvert som tiden går. Har man for eksempel et serielån på 100 000 kroner med 20 000 kroner i avdrag og $5\ \%$ i rente, må man i første termin betale $20\ 000 + 100\ 000 \cdot 5\ \% = 25\ 000$ kroner første termin. I andre termin tenger man bare å betale renter på det resterende beløpet av lånet, altså 80 000, i tillegg til det vanlige avdraget på 20 000.

I et annuitetslån beregner man avdragene i hver termin slik at summen av avdraget og rentene blir konstant hver termin. I første termin er det mye rente å betale, så man betaler mindre i avdrag. I de senere terminene vil rentene synke, og vi betaler større avdrag.

b)

Siv tar opp et annuitetslån på 2 000 000 kroner. Solveig tar opp et serielån på

2 000 000 kroner. Begge får samme rentesats, og de skal betale ned lånene over like lang tid.

Hvorfor må Siv totalt betale mer tilbake til banken enn Solveig?

Løsningsforslag b)

Siv benytter seg av annuitetslån, og da reduseres restgjelden saktere enn i serielån. Hver termin betaler da Siv rente av et større restlån enn Solveig, og det resulterer i et høyere totalt tilbakebetalt beløp til banken.

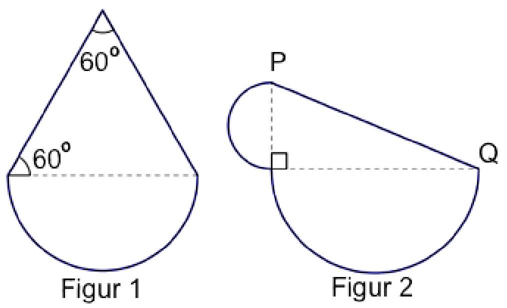
c)

Hvorfor kan det for noen være gunstig å velge et annuitetslån framfor et serielån?

Løsningsforslag c)

Det som er fordelen med annuitetslån, er at man i begynnelsen av låneperioden betaler mindre enn ved serielån. Man kan være i en situasjon der månedslønnen ikke rekker til å betale de høye avdragene med serielån. En annen fordel er at annuitetslån gir jevn lånebelastning, som gir mer forutsigbarhet. Ulempen man får er at totalbeløpet som betales til banken er høyere ved annuitetslån.

Oppgave 9 (4 poeng) Nettkode: E-4AMZ



Figur 1 ovenfor er sammensatt av en trekant og en halvsirkel. Halvsirkelen har radius 5,5.

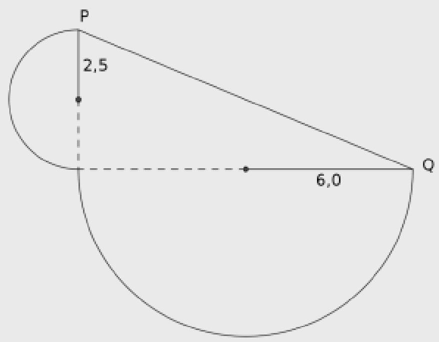
Figur 2 er sammensatt av en trekant og to halvsirkler. Den minste halvsirkelen har radius 2,5 og den største har radius 6,0.

a)

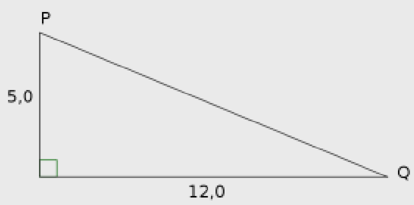
Vis at linjestykket PQ har lengde 13.

Løsningsforslag a)

Først setter vi på lengdene vi har fått oppgitt i teksten. Det kan hjelpe oss å se hva vi skal gjøre.



Nå ser vi at PQ faktisk er hypotenusen i en rettvinklet trekant med kateter 5 og 12.



Dette betyr at vi kan bruke Pytagoras setning, som sier at i en rettvinklet trekant med hypotenus a og kateter b og c, så er

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

I vårt tilfelle er katetene 5 og 12, mens hypotenusen altså er PQ, som vi skal vise at er lik 13. Vi setter dette inn i ligningen over, og får

$$PQ^2 = 5^2 + 12^2.$$

Vi vet at $5^2 = 25$ og $12^2 = 144$, så $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Vi skal vise at $PQ = 13$ passer inn i ligningen over, og det tilsvarer å regne ut at $13^2 = 169$. Vi regner ut for hånd.

```
  1 3 · 1 3 = 1 6 9
  3 9
1 3
1 6 9
```

Dette betyr at $13^2 = 5^2 + 12^2$, akkurat som vi ville, og dermed er $PQ = 13$.

b)

Gjør beregninger, og avgjør hvilken figur som har størst omkrets.

Løsningsforslag b)

La oss først regne ut omkretsen av Figur 2. Vi vet allerede at PQ er 13, så det gjenstår å finne omkretsen til de to halvsirklene. Formelen for omkretsen O av en sirkel med radius r er $O = 2\pi r$, og når vi skal finne omkretsen til en halvsirkel, dividerer vi dette med 2 og får πr. I Figur 2 har den lille halvsirkelen radius $2,5$ og den store 6. Deres omkrets blir da henholdsvis $\pi \cdot 2,5$ og $\pi \cdot 6$. Vi velger å ikke sette inn $\pi \approx 3,14$ ennå, for det er kanskje mulig for oss å sammenligne omkretsene i de to figurene utenom.

Vi legger sammen alle disse lengdene vi har for å få omkretsen av Figur 2.
$\text{Omkrets av Figur } 2 = 13 + \pi \cdot 2,5 + \pi \cdot 6 = 13 + 8,5\pi.$

Så skal vi regne ut omkretsen av Figur 1. Radien i halvsirkelen er $5,5$, så som over er omkretsen $\pi \cdot 5,5$. Deretter må vi finne lengdene til de to sidene over halvsirkelen. Vi ser at disse sidene er to sider i en trekant hvor to av vinklene er 60°. Summen av vinklene i en trekant er alltid 180°, så den siste vinkelen i trekanten er $180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$. Dette betyr at alle vinklene i trekanten er like, og det betyr igjen at alle sidene er like lange. Derfor er de to sidene vi vil regne ut, like lange som den nederste siden, altså diameteren i halvsirkelen – med andre ord, $5,5 \cdot 2 = 11$. Vi legger sammen alle lengdene, og får
$\text{Omkrets av Figur } 1 = 11 + 11 + 5,5\pi = 22 + 5,5\pi.$

Så skal vi finne ut hvilken av figurene som har størst omkrets, altså hva som er størst av $13 + 8,5\,\pi$ og $22 + 5,5\,\pi$. Generelt har vi at hvis a og b er to tall, så er a større enn b hvis (og bare hvis) $a - b > 0$. For eksempel er 5 større enn 1, og $5 - 1 = 4$ er større enn 0. Det betyr at for å finne ut hvilken omkrets som er størst, så kan vi se på fortegnet av det vi får når vi trekker det ene fra det andre. Altså skal vi finne ut om $(13+8,5\pi)-(22+5,5\pi)$ er negativ eller positiv. Hvis det blir negativt, har Figur 1 størst omkrets, og hvis det blir positivt er det Figur 2 som har størst omkrets. Vi regner ut:

$$\begin{aligned}(13 &+ 8,5\pi)-(22+5,5\pi)\\ &= (13-22)+(8,5\pi-5,5\pi)\\ &= -9+3\pi.\end{aligned}$$

Vi vet at $\pi \approx 3,14$ er større enn 3, så $3\cdot\pi$ må være større enn $3\cdot 3=9$. Da må $3\,\pi-9$ være større enn 0. Det betyr at Figur 2 har størst omkrets. Vi merker oss at dette tar mye kortere tid enn å sette inn $\pi \approx 3,14$ og regne ut, og det sparer oss tid på eksamen.

Svar: Figur 2 har størst omkrets.

DEL 2 Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng) Nettkode: E-4AN3

Da skatteetaten la ut det foreløpige skatteoppgjøret på nett 19. mars i år, var dette en av overskriftene på nettsidene til Teknisk Ukeblad:

SELVANGIVELSEN 2013
45 pålogginger hvert sekund for å sjekke skatten

Anta at pågangen var like stor hele denne dagen.

a)
Hvor mange hadde da logget seg på i løpet av én time?

Løsningsforslag a)

Vi vet at det var 45 pålogginger per sekund. For å finne ut hvor mange pålogginger det var på én time, må vi finne ut hvor mange sekunder det er i en time. En time består av 60 minutter, og et minutt består av 60 sekunder. Derfor får vi

$$1\text{time} = 60\text{minutter} = 60 \cdot 60\text{sekunder} = 3\,600\text{sekunder}.$$

Altså er det $3\,600$ sekunder i en time. Totalt antall pålogginger blir da $45\,\frac{\text{pålogginger}}{\text{sekund}} \cdot 3\,600\text{ sekund} = 162\,000\text{ pålogginger}$. Altså var det 162 000 som logget seg på for å sjekke skatten, på én time.

Svar: 162 000.

b)
Omtrent 900 000 skattytere fikk skatteoppgjøret sitt elektronisk denne dagen.

Hvor lang tid ville det gått før alle hadde logget seg på?

Løsningsforslag b)

Det er flere måter å løse dette på, og vi tar den greieste først. Vi vet fra forrige oppgave at 162 000 logget seg inn på én time. Hvis vi kan multiplisere opp 162 000 til å få 900 000, så kan vi multiplisere den ene timen med det samme tallet for å få tiden det tar for 900 000 å logge seg på. Vi vil altså ha et tall x som, multiplisert med 162 000, blir til 900 000. Dette setter vi opp slik:

$$x \cdot 162\,000 = 900\,000.$$

Å finne en x som passer inn i likningen over, tilsvarer å løse ligningen med hensyn på x. Derfor dividerer vi med 162 000 på hver side og forkorter.

$=$

$$\frac{x \cdot 162\ 000}{162\ 000} = \frac{900\ 000}{162\ 000}$$
$$x = \frac{900\ 000}{162\ 000}$$

Vi regner ut $\frac{900\ 000}{162\ 000} = \frac{900}{162}$ på kalkulatoren, og ser at det blir cirka $5,56$. Siden 162 000 brukte 1 time på å logge seg på, bruker derfor 900 000 cirka $1 \cdot 5,56 = 5,56$ timer på å logge seg på.

Vi kan også regne ut hvor mange sekunder det tar for 900 000 å logge seg inn. Vi vet at 45 personer logger seg inn på ett sekund, og da vil vi trenge

$$\frac{900\ 000}{45} = 20\ 000$$

sekunder for at alle 900 000 skal logge seg inn. Vi vet at det er 3 600 sekunder i en time, så 20 000 sekunder er det samme som

$$\frac{20\ 000}{3\ 600} \approx 5,56$$

timer. Dette er det samme som vi fikk over.

Svar: $5,56$ timer.

c)
Nedenfor ser du et annet sitat fra nettet i forbindelse med skatteoppgjøret.

Onsdag 19. mars kan nær 900 000 skattytere sjekke selvangivelse...

«I denne omgang er det bare elektroniske brukere (e-brukere) som får tilgang til selvangivelsen. Resten, det vil si rundt 3,7 millioner innbyggere, må vente til 1. april før de får skattedommen.»

Hvor mange prosent av skattyterne i Norge er elektroniske brukere?

Løsningsforslag c)

Vi vet at 900 000 var elektroniske brukere, og det er 3 700 000 som *ikke* var elektroniske brukere. Det betyr at antall skatteytere i Norge var $900\ 000 + 3\ 700\ 000 = 4\ 600\ 000$. Dermed må vi regne ut hvor mange prosent 900 000 er av 4 600 000 – eller, hvis vi forkorter fem nuller, hvor mange prosent 9 er av 46. Vi vet at $100\ \% = 1$, så svaret blir

$$\frac{900\ 000}{4\ 600\ 000} \cdot 100\ \% = \frac{9}{46} \cdot 100\ \% = 19,57\ \%.$$

Dermed var $19,57\ \%$ av skatteyterne i Norge elektroniske brukere.

Svar: $19,57\ \%$ av skatteyterne i Norge var elektroniske brukere.

Oppgave 2 (4 poeng) Nettkode: E-4AN9

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = -0{,}003x^3 - 0{,}005x^2 + 0{,}8x \quad , \quad 0 \leq x \leq 18$$

a)

Tegn grafen til f.

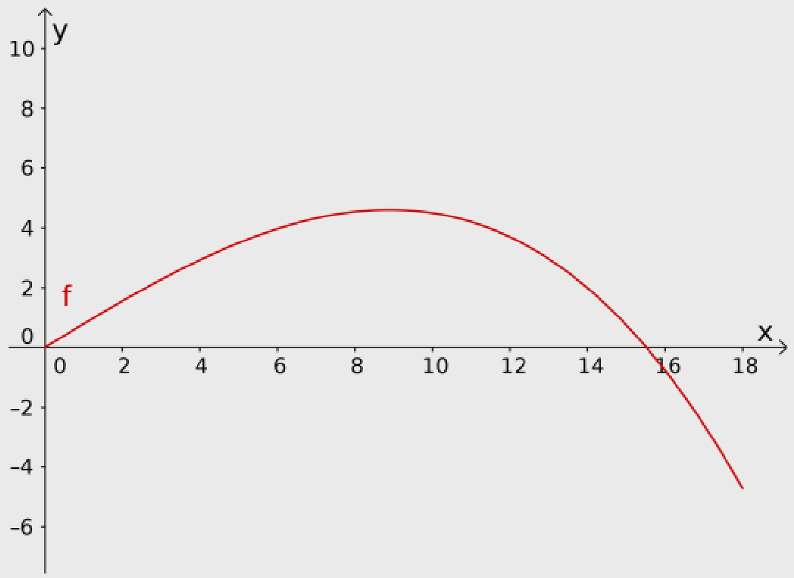
Løsningsforslag a)

I "Skriv inn"-boksen i Geogebra skriver vi

```
f(x) = Funksjon[-0.003*x^3 - 0.005*x^2 + 0.8x, 0, 18]
```

Det er lurt å stille inn GeoGebra til å vise tre desimaler for å se det fulle funksjonsuttrykket i algebrafeltet. Det gjør vi ved å gå på Avrunding i Instillinger-menyen og velge "3 desimaler". Resultatet ser vi under.

Svar:



b)

Bestem nullpunktene til f.

Bestem toppunktet på grafen til f.

Løsningsforslag b)

Vi ser at i funksjonsuttrykket til $f(x)$, så har alle leddene x som *faktor*. Det betyr at når $x = 0$, så vil alle leddene være 0, og dermed er $f(0) = 0$. Dermed er $x = 0$ det første nullpunktet, som vi også kan se på grafen vi tegnet.

Dette kan vi selvfølgelig også gjøre med Geogebra, og i samme slengen finne det andre nullpunktet. Vi bruker den samme filen som tidligere, der vi tegnet opp grafen. Vi bruker kommandoen

```
Nullpunkt[ <Polynom> ]
```

fordi vi skal finne nullpunktene til funksjonen f, som er et *polynom*. Funksjonen vår kalte vi f, så vi skriver

```
Nullpunkt[ f ]
```

i "Skriv inn"-vinduet. Da ser vi at vi har nullpunkter, nemlig $(0,0)$ og $(15.52,0)$. Nullpunktene er altså der $x=0$ og $x=15,52$.

For å finne toppunktet, bruker vi kommandoen

```
Ekstremalpunkt[ <Polynom> ]
```

Funksjonen vår er fremdeles f, så vi skriver

```
Ekstremalpunkt[ f ]
```

og får ekstremalpunktet $(8.89, 4.61)$. Vi ser på grafen at dette er et toppunkt.

Svar: Nullpunktene er der $x=0$ og der $x=15,52$, og toppunktet er i $(8.89, 4.61)$.

c)

En sommernatt begynte det å snø i en fjellbygd. Når $f(x) \geq 0$ viser funksjonen f snødybden $f(x)$ cm i bygda x timer etter midnatt.

Hva forteller svarene du fant i oppgave b) om snødybden i fjellbygda?

Løsningsforslag c)

Vi vet at $f(x)$ er snøhøyden når $f(x) \geq 0$, så når $f(x)=0$ er snøhøyden lik 0 cm – altså er det ikke noe snø. Nullpunktene viser akkurat når dette skjer: Det er ikke noe snø 0 og $15,52$ timer etter midnatt. Toppunktet på grafen sier oss at det er her det var mest snø. Toppunktet er der $x=8,89$, og $f(8,89)=4,61$. Det betyr at da det hadde gått $8,89$ timer, så nådde snøhøyden $4,61\text{ cm}$, og det var det høyeste i perioden på 18 timer.

For å oppsummere: Snøen begynte å samle seg opp med én gang etter midnatt, etter $8,89$ timer var snøhøyden på sitt høyeste ($4,61\text{ cm}$), og etter $15,52$ timer hadde all snøen smeltet igjen.

Oppgave 3 (5 poeng) Nettkode: E-4ANU

I en by abonnerer $39\,\%$ av husstandene på lokalavisen, mens $32\,\%$ av husstandene abonnerer på regionavisen. $41\,\%$ av husstandene abonnerer ikke på noen av de to avisene.

a)

Systematiser opplysningene ovenfor i et *venndiagram* eller en *krysstabell*.

Løsningsforslag a)

Vi kan velge mellom å lage en krysstabell og et venndiagram. Vi lager først en krysstabell.

Det første vi må gjøre er å avgjøre hva vi skal skrive til venstre i radene og øverst i kolonnene. Vi ser på to forskjellige inndelinger av befolkningen – de som abonnerer på lokalavisen, og de som abonnerer på regionavisen. Vi lar den øverste raden representere lokalavisen. En husstand har to muligheter i denne raden – enten så abonnerer den på lokalavisen, eller så gjør den ikke det. Det samme gjelder for kolonnene og regionavisen. Dermed kan vi sette opp følgende tabell.

	Lokalavis	**Ikke lokalavis**	**Totalt**
Regionavis			
Ikke regionavis			
Totalt			

Neste steg er å skrive inn informasjon vi allerede har. For det første er det totalt $39\ \%$ av husstandene som abonnerer på lokalavisen. Dette fyller vi inn der det står "Totalt" under "Lokalavis"-kolonnen. Tilsvarende er det totalt $32\ \%$ som abonnerer på regionavisen; dette fører vi opp i tilsvarende rute for regionavisen

	Lokalavis	**Ikke lokalavis**	**Totalt**
Regionavis			$32\ \%$
Ikke regionavis			
Totalt	$39\ \%$		

Vi vet også at $41\ \%$ av husstandene ikke abonnerer på noen av de to avisene. Dette skal fylles inn der "Ikke lokalavis"-kolonnen krysser "Ikke regionavis"-raden. Den siste delen med informasjon vi har står ikke eksplisitt i oppgaveteksten, men den er helt essensiell. Det er det faktum at totalt antall husstander i byen tilsvarer $100\ \%$. Dette skal vi fylle inn der "Totalt"-kolonnen krysser "Totalt"-raden.

	Lokalavis	Ikke lokalavis	Totalt
Regionavis			$32\ \%$
Ikke regionavis		$41\ \%$	
Totalt	$39\ \%$		$100\ \%$

Nå må vi begynne å regne ut informasjonen som ikke er gitt i oppgaveteksten. Den første tingen vi kan se, er at siden $39\ \%$ abonnerer på lokalavisen, må det nødvendigvis være $100\ \% - 39\ \% = 61\ \%$ som ikke gjør det. Vi kan også se på det på en annen måte også – i hver rad (og kolonne) skal de to første rutene summeres opp til totalen i den siste ruten; altså skal det i den blanke ruten nederst stå $100\ \% - 39\ \% = 61\ \%$. Det samme kan vi gjøre for kolonnen helt til høyre; der skal det stå $100\ \% - 32\ \% = 68\ \%$.

	Lokalavis	Ikke lokalavis	Totalt
Regionavis			$32\ \%$
Ikke regionavis		$41\ \%$	$68\ \%$
Totalt	$39\ \%$	$61\ \%$	$100\ \%$

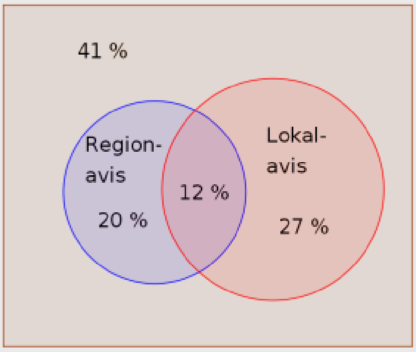
Vi kan gjøre det samme med den blanke ruten i den midterste raden. (Husk at rader går bortover og kolonner nedover.) Det er totalt $68\ \%$ som ikke abonnerer på regionavisen, hvorav 41 prosentpoeng ikke abonnerer på lokalavisen. Dermed er det $68\ \% - 41\ \% = 27\ \%$ som abonnerer på lokalavisen, men ikke på regionavisen. Tilsvarende skal det stå $61\ \% - 41\ \% = 20\ \%$ i den tomme ruten i midterste kolonne.

	Lokalavis	Ikke lokalavis	Totalt
Regionavis		$20\ \%$	$32\ \%$
Ikke regionavis	$27\ \%$	$41\ \%$	$68\ \%$
Totalt	$39\ \%$	$61\ \%$	$100\ \%$

Til slutt skal vi fylle inn ruten øverst til venstre. Vi kan velge mellom å fullføre i den første raden eller den første kolonnen – det gir samme svar. Hvis vi ser på raden, får vi $32\ \% - 20\ \% = 12\ \%$; i første kolonne får vi $39\ \% - 27\ \% = 12\ \%$.

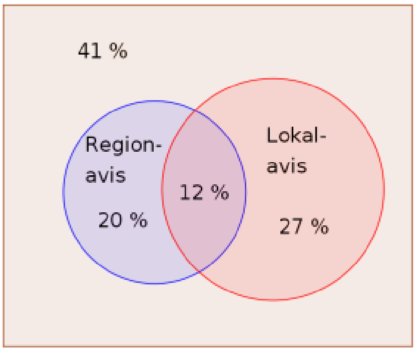
	Lokalavis	Ikke lokalavis	Totalt
Regionavis	$12\ \%$	$20\ \%$	$32\ \%$
Ikke regionavis	$27\ \%$	$41\ \%$	$68\ \%$
Totalt	$39\ \%$	$61\ \%$	$100\ \%$

For å lage venndiagram, er utregningene helt identiske, og diagrammet vil se noe slikt ut.



Svar: En av de følgende.

	Lokalavis	**Ikke lokalavis**	**Totalt**
Regionavis	$12\ \%$	$20\ \%$	$32\ \%$
Ikke regionavis	$27\ \%$	$41\ \%$	$68\ \%$
Totalt	$39\ \%$	$61\ \%$	$100\ \%$



b)

En husstand i byen abonnerer på regionavisen.

Bestem sannsynligheten for at denne husstanden også abonnerer på lokalavisen.

Løsningsforslag b)

Husstanden abonnerer på regionavisen, og derfor betrakter vi den første raden i krysstabellen vår. Det er totalt $32\ \%$ av husstandene som abonnerer på regionavisen, og $12\ \%$ av husstandene abonnerer på lokalavisen i tillegg. Derfor må vi finne ut hvor mange prosent $12\ \%$ er av $32\ \%$. Vi merker oss at det ikke er slik at $12\ \%$ av de $32\ \%$ som abonnerer på regioavisen, også abonnerer på lokalavisen. Det kan hjelpe å tenke på det som om det er 100 husstander, hvorav 32 abonnerer på regionavisen, og 12 av disse abonnerer i tillegg på lokalavisen. Dermed blir det klart at vi skal finne hvor mange prosent 12 er av 32, og det gjør vi slik.

$$\frac{12}{32} = \frac{12}{32} \cdot 100\ \% = 37{,}5\ \%$$

Dermed er det $37,5\ \%$ sannsynlighet for at denne hustanden også abonnerer på lokalavisen.

Svar: $\underline{\underline{37,5\ \%}}$

c)

Tre husstander i byen velges ut tilfeldig.

Bestem sannsynligheten for at akkurat én av husstandene abonnerer på lokalavisen.

Løsningsforslag c)

Vi vet at det er $39\ \%$ sannsynlighet for at en tilfeldig valgt husstand abonnerer på lokalavisen, siden $39\ \%$ av husstandene gjør det. La oss nå velge tre forskjellige husstander. Først regner vi ut sannsynligheten for at bare den første husstanden abonnerer på lokalavisen. Da må de to neste *ikke* abonnere på lokalavisen, og det er $61\ \%$ sannsynlighet for at en tilfeldig valgt husstand ikke gjør det. Dermed er sannsynligheten for at bare den første husstanden abonnerer på lokalavisen, lik

$$39\ \% \cdot 61\ \% \cdot 61\ \% \approx 14,52\ \%.$$

Men dette er bare sannsynligheten for at den *første* husstanden abonnerer på lokalavisen. Sannsynligheten for at den *andre* gjør det, er tilsvarende lik

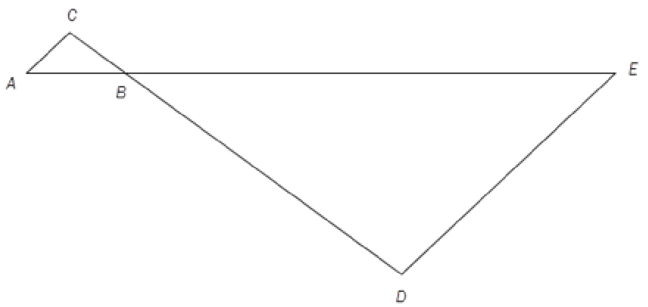
$$61\ \% \cdot 39\ \% \cdot 61\ \% \approx 14,52\ \%.$$

Sannsynligheten for at det er den tredje husstanden som er abonnenten, er like stor. Dermed blir sannsynligheten for at nøyaktig én husstand av de tre abonnerer på lokalavisen, lik cirka

$$14,52\ \% + 14,52\ \% + 14,52\ \% = 3 \cdot 14,52\ \% = 43,56\ \%.$$

Svar: Cirka $\underline{\underline{43,56\ \%}}$.

Oppgave 4 (6 poeng) Nettkode: E-4ANZ



ΔABC og ΔBDE er formlike.

$AB = 4{,}0$ cm

$AC = 2{,}4$ cm

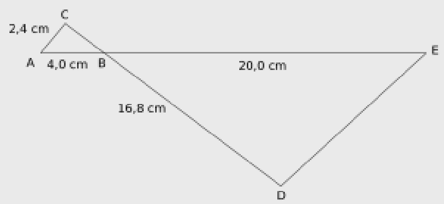
$BE = 20{,}0$ cm

$CD = 16{,}8$ cm

a)
Bestem lengden av DE ved regning.

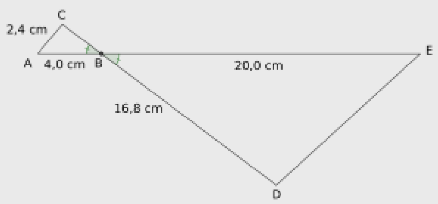
Løsningsforslag a)

Det aller første vi gjør, er å tegne opp figuren og skrive ned alle lengdene som er oppgitte. Da kan vi lettere se hva vi skal gjøre.



I tillegg til opplysningene som er gitt i oppgaven, må vi i denne oppgaven gjøre noen antakelser basert på figuren.

Først må vi anta at AE og CD er linjestykker som skjærer hverandre i B. Det betyr at det ikke er noen knekk i B. Da vet vi at $\angle ABC$ og $\angle DBE$ er toppvinkler og derfor like.



Vi vet videre at ΔABC og ΔEBD er formlike, så det skal være to par til av like vinkler. På figuren ser det ut til at $\angle C$ og $\angle D$ er de største vinklene i de to trekantene, så de må være like. Dermed må det siste paret av vinkler også være like, nemlig $\angle A = \angle E$.

I formlike trekanter er et par av sider tilsvarende hvis de står overfor like vinkler. Ut i fra dette kan vi si at AB i ΔABC tilsvarer BE i ΔBDE, CB tilsvarer BD og AC tilsvarer DE, når vi snakker om formlikhet. Med det mener vi at forholdene mellom dem er like, altså

$$\frac{AB}{BE} = \frac{CB}{BD} = \frac{AC}{DE}.$$

Vi vil vite lengden av DE, og vi har lengdene av AB, BE og AC. Derfor bruker vi likningen

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{DE}.$$

Hvis to brøker er like og tellerne ikke er 0, så kan vi snu dem opp ned og bevare likheten. (Det tilsvarer å dividere med den omvendte brøken på hver side av likhetstegnet.) Derfor har vi likningen

$$\frac{BE}{AB} = \frac{DE}{AC}.$$

Den passer mer til det vi skal gjøre, fordi DE er over brøkstreken. Vi setter inn $AB = 4\ \mathrm{cm}$, $BE = 20\ \mathrm{cm}$ og $AC = 2,4\ \mathrm{cm}$.

$$\frac{20\ \mathrm{cm}}{4\ \mathrm{cm}} = \frac{DE}{2,4\ \mathrm{cm}}$$

Først ser vi at $\frac{20\ \mathrm{cm}}{4\ \mathrm{cm}} = 5$. Vi vil ha DE alene på en side, så vi multipliserer med $2,4\ \mathrm{cm}$ på begge sider og forkorter.

$$5 \cdot 2,4\ \mathrm{cm} = \frac{DE}{2{,}4\ \mathrm{cm}} \cdot 2,4\ \mathrm{cm}$$
$$12\ \mathrm{cm} = DE$$

Dermed har vi funnet at $DE = 12\ \mathrm{cm}$.

Svar: $\underline{\underline{DE = 12\ \mathrm{cm}.}}$

b)

Bestem lengden av BC ved regning.

Løsningsforslag b)

Vi husker at $BC = CB$. Likningen $\frac{AB}{BE} = \frac{CB}{BD} = \frac{AC}{DE}$ gir oss at

$$\frac{CB}{BD} = \frac{AB}{BE}.$$

Vi har valgt akkurat denne likheten fordi den inneholder den ukjente BC (eller CB), og vi vet alle de andre verdiene der. Vi vet fra forrige oppgave at $\frac{BE}{AB} = 5$, så $\frac{AB}{BE} = \frac{1}{5}$. Vi vet ikke hva lengden til BD er, men vi vet at $CB + BD = 16,8\ \text{cm}$, og da er $BD = 16,8\ \text{cm} - CB$. Vi setter inn alt dette i likningen over, og får

$$\frac{CB}{16,8\ \text{cm} - CB} = \frac{1}{5}.$$

Vi vil løse denne likningen med hensyn på CB. For å få CB opp fra nevneren på høyre side, multipliserer vi med $16,8\ \text{cm} - CB$ på begge sider av likhetstegnet, og får

$$\frac{CB}{16{,}8\ \text{cm} - CB} \cdot \left(16,8\ \text{cm} - CB\right) = \frac{1}{5} \cdot \left(16,8\ \text{cm} - CB\right).$$

Dette forkorter vi til $CB = \frac{16{,}8\ \text{cm} - CB}{5}$, eller

$$CB = \frac{16,8\ \text{cm}}{5} - \frac{CB}{5}.$$

Nå vil vi ha alle leddene med CB på én side av likhetstegnet, så vi adderer $\frac{CB}{5}$ på begge sider.

$$\begin{aligned} CB + \frac{CB}{5} &= \frac{16{,}8\ \text{cm}}{5} - \frac{CB}{5} + \frac{CB}{5} \\ \frac{6}{5} CB &= \frac{16{,}8\ \text{cm}}{5}. \end{aligned}$$

For å få CB helt alene på venstre side, multipliserer vi med $\frac{5}{6}$ på begge sider, og vi får til slutt at

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} CB &= \frac{5}{6} \cdot \frac{16{,}8\ \text{cm}}{5} \\ CB &= 2,8\ \text{cm}. \end{aligned}$$

Dermed har vi at $BC = CB = 2,8\ \text{cm}$.

Svar: $BC = 2,8\ \text{cm}$

c)

Arealet av ΔABC er $3{,}3\ \mathrm{cm}^2$.

Bestem arealet av ΔBDE ved regning.

Løsningsforslag c)

La h_1 og h_2 være høyden til henholdsvis ΔABC og ΔBDE, målt fra C ned til AB, henholdsvis fra D opp til BE. Arealet A_2 til ΔBDE er dermed gitt ved

$$A_2 = \frac{BE \cdot h_2}{2},$$

og vi vet allerede at arealet A_1 til ΔABC er

$$A_1 = \frac{AB \cdot h_1}{2} = \frac{4\ \mathrm{cm} \cdot h_1}{2} = 3,3\ \mathrm{cm}^2.$$

Den siste likningen gir at $2\ \mathrm{cm} \cdot h_1 = 3,3\ \mathrm{cm}^2$, så $h_1 = \frac{3{,}3\ \mathrm{cm}^2}{2\ \mathrm{cm}} = 1,65\ \mathrm{cm}$. Trekantene er formlike, så alle tilsvarende lengder har samme forhold – så forholdet mellom høydene h_1 og h_2 er lik alle de andre forholdene vi har hatt. Spesielt vet vi at

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{BE}{AB},$$

og fra før vet vi at $\frac{BE}{AB} = 5$. Det betyr at $h_2 = 5 \cdot h_1$, så arealet til ΔBDE er lik

$$A_2 = \frac{BE \cdot h_2}{2} = \frac{BE \cdot 5 \cdot h_1}{2}.$$

Vi vet at $BE = 20\ \mathrm{cm}$ og at $h_1 = 1,65\ \mathrm{cm}$, og dermed blir arealet til ΔBDE lik

$$A_2 = \frac{20\ \mathrm{cm} \cdot 5 \cdot 1,65\ \mathrm{cm}}{2} = 82,5\ \mathrm{cm}^2.$$

Svar: Arealet til ΔBDE er $82,5\ \mathrm{cm}^2$.

Oppgave 5 (4 poeng) Nettkode: E-4AO4

Stanley har laget en sopp som skal brukes i en juleutstilling. Soppen er en sylinder med en halvkule på toppen.

Sylinderen har radius 2,0 dm, og halvkulen har radius 4,0 dm. Høyden i sylinderen er lik radien i halvkulen.

a)
Bestem volumet av soppen.

Løsningsforslag a)

Først regner vi ut volumet av halvkulen. Generelt er volumet V til en kule med radius r lik $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Vi skal ha volumet en halv slik kule med $r = 4\,\text{dm}$. Vi husker at $1\,\text{dm}^3 = 1\,\text{L}$, så volumet av halvkulen blir $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(4\,\text{dm}\right)^3 \approx 134,04\,\text{dm}^3 = 134,04\,\text{L}$.

Så går vi videre til sylinderen. Volumet V til en sylinder med radius r og høyde h, er gitt ved $V = \pi r^2 \cdot h$. Vi vet at sylinderen i oppgaven har radius $r = 2\,\text{dm}$, og høyden er den samme som radien i halvkulen, altså $h = 4\,\text{dm}$. Dette setter vi inn i ligningen over, og får $V = \pi \cdot \left(2\,\text{dm}\right)^2 \cdot 4\,\text{dm} \approx 50,27\,\text{dm}^3 = 50,27\,\text{L}$. Volumet til hele soppen er summen av volumene til halvkulen og sylinderen, og totalt blir dette cirka

$$134,04\,\text{L} + 50,27\,\text{L} = 184,31\,\text{L}.$$

Svar: Cirka $184,31\,\text{L}$.

b)

Stanley skal male soppen. 1 L maling er nok til 6 m^2.

Hvor mye maling trenger han?

Løsningsforslag b)

Vi regner ut overflaten i tre deler. Først tar vi overflaten til skallet til halvkulen, deretter overflaten under halvkulen, og til sist overflaten til sylinderen.

Overflaten O til en kule med radius r er gitt ved $O = 4\,\pi r^2$. Vi skal finne overflatearealet til et halvt kuleskall med $r = 4\text{ dm}$. Det blir $\frac{1}{2} \cdot 4\ \cdot \pi \cdot \left(4\text{ dm}\right)^2 \approx 100,53\text{ dm}^2$. Vi husker at $1\text{ m}^2 = 100\text{ dm}^2$, så dette blir cirka 1 m^2.

Deretter regner vi ut arealet av området på halvkulen som er under kuleskallet. Dette er egentlig en sirkel med radius $r = 4\text{ dm}$, men sylinderen dekker for en del av området. Toppen til sylinderen er en sirkel med radius 2 dm. Vi vet at arealet til en sirkel med radius r er lik $A = \ \pi r^2$, og dermed blir arealet til området under kuleskallet lik $\pi \cdot \left(4\text{ dm}\right)^2 - \ \pi \cdot \left(2\text{ dm}\right)^2 \approx 37,70\text{ dm}^2 \approx 0,38\text{ m}^2$.

Til slutt skal vi finne arealet til sylinderskallet. Vi tar verken med toppen eller bunnen til sylinderen. Sidearealet A til rett prisme er omkretsen til grunnflaten multiplisert med høyden; i dette tilfellet blir det $A = 2\,\pi r \cdot h$, der r er radien i sirkelen i bunnen og h høyden. Vi setter inn $r = 2\text{ dm}$ og $h = 4\text{ dm}$, og at flatearealet er $2\,\pi \cdot \left(2\text{ dm}\right) \cdot 4\text{ dm} \approx 50,27\text{ dm}^2 \approx 0,5\text{ m}^2$.

Nå kan vi finne det totale overflatearealet vi skal male. Det er cirka

$$1\text{ m}^2 + 0,38\text{ m}^2 + 0,5\text{ m}^2 \approx 1,88\text{ m}^2.$$

Vi vet at én liter maling holder til 6 m^2, og siden vi skal male cirka $1,88\text{ m}^2$ trenger vi

$$1\text{ L} \cdot \frac{1,88\text{ m}^2}{6\text{ m}^2} \approx 0,31\text{ L} = 31\text{ dL}.$$

Svar: Cirka 31 dL (eller cirka $0,31\text{ L}$).

Oppgave 6 (4 poeng) Nettkode: E-4AO9

År	2010	2011	2012	2013
Konsumprisindeks	128,8	130,4	131,4	134,2

I 2011 flyttet Per inn i ny leilighet. Husleien var da 8000 kroner per måned. I leiekontrakten til Per står det blant annet:

> Månedsleien justeres én gang per år. Dette skjer i januar i samsvar med konsumprisindeksen fra året før. Månedsleien rundes alltid opp til nærmeste hele krone.

a)

Vis at månedsleien fra og med januar 2012 var 8100 kroner.

Løsningsforslag a)

Vi har følgende sammenheng mellom konsumprisindeksen og månedsleien. Det er dette som betyr å justere verdien i samsvar med konsumprisindeksen året før.

$$\frac{\text{leie i 2011}}{\text{indeks i 2010}} = \frac{\text{leie i 2012}}{\text{indeks i 2011}}.$$

Leien i et år skal regnes ut i fra konsumprisindeksen i året *før*, og det er derfor vi har forskjellige årstall i telleren og nevneren.

Vi vet at husleien i 2011 var 8000 kroner per måned, og at konsumprisindeksen var $128,8$ og $131,4$ i henholdsvis 2010 og 2011. Dette setter vi inn i ligningen over.

$$\frac{8\ 000}{128,8} = \frac{\text{leie i 2012}}{130,4}$$

Dette er rett og slett en ligning vi vil løse med hensyn på leien i 2012. Vi lar x være den ukjente leien, for å bruke mer matematisk (med andre ord, mer kortfattet) notasjon.

$$\frac{8\ 000}{128,8} = \frac{x}{130,4}$$

Vi vil finne en x som passer inn i ligningen over. Dette kan vi få til ved å få x alene på én side, og derfor multipliserer vi med $130,4$ og forkorter.

$$\frac{8\ 000}{128{,}8} \cdot 130,4 = \frac{x}{130{,}4} \cdot 130,4$$
$$\frac{8\ 000}{128{,}8} \cdot 130,4 = x$$

Vi regner ut brøken på venstre side, og får at $x \approx 8\,099,38$. Vi skulle avrunde leien *opp* til nærmeste krone, så månedsleien i 2012 er $8\,100$ kroner, akkurat som vi ville ha.

b)

Hvor mye betalte Per til sammen i husleie fra og med januar 2012 til og med desember 2013?

Løsningsforslag b)

I 2012 var månedsleien 8 100 kroner. I tolv måneder blir da total leie i 2012 lik

$$8\,100\,\mathrm{kr} \cdot 12 = 97\,200\,\mathrm{kr}.$$

Så skal vi regne ut leien i 2013. Regnet som i forrige oppgave, ser vi at månedsleien i 2013 blir $\frac{8\,100\,\mathrm{kr}}{130{,}4} \cdot 131,4 \approx 8\,163\,\mathrm{kr}.$ Vi merker oss at vi må bruke indeksen og månedsleien for henholdsvis 2011 og 2012 i regnestykket, siden vi skal justere for indeksen i året før, altså 2012.

Leien i hele 2013 blir da $8\,163\,\mathrm{kr} \cdot 12 = 97\,956\,\mathrm{kr}$, og summen av all husleie i 2012 og 2013 blir $97\,200\,\mathrm{kr} + 97\,956\,\mathrm{kr} = 195\,156\,\mathrm{kr}$.

Svar: $195\,156\,\mathrm{kr}.$

Oppgave 7 (7 poeng) Nettkode: E-4AOD

Arne opprettet en høyrentekonto i banken 1. januar 2014 og satte inn 75 000 kroner. Renten er 1,75 % per år.

a)
Hvor mye vil han ha i banken 1. januar 2017?

Løsningsforslag a)

Det er tre år mellom 1. januar 2014 og 1. januar 2017. Den 1. januar 2015 har Arne fått $1,75\ \%$ rente av de opprinnelige 75 000 kronene. Dette er $1,75\ \% \cdot 75\ 000\ \text{kr} = 0,0175 \cdot 75\ 000\ \text{kr} = 1312,5\ \text{kr}$ i renter det første året, så 1. januar 2015 vil Arne ha $75\ 000\ \text{kr} + 1312,5\ \text{kr} = 76\ 312,5\ \text{kr}$. Vi merker oss at dette er nøyaktig det samme som vi får når vi multipliserer 75 000 med $1,0175$:

$$75\ 000 \cdot 1,0175 = 76\ 312,5.$$

Vi kan multiplisere med $1,0175$ igjen for å finne hvor mye Arne har på kontoen den 1. januar 2016, og multiplisere enda en gang for å få beløpet for 2017. Til sammen multipliserer vi tre ganger med $1,0175$. Den 1. januar 2017 har Arne dermed

$$75\ 000 \cdot 1,0175^3 \approx 79\ 006,81\ \text{kr}$$

i banken.

Svar: $79\ 006,81\ \text{kr}.$

b)
Eirik opprettet en BSU-konto (boligsparing for ungdom) i banken 1. januar 2014 og satte inn 25 000 kroner. Renten er 4,5 % per år. Eirik vil sette inn 25 000 kroner på kontoen 1. januar 2015 og 1. januar 2016.

Hvor mye vil han ha i banken 1. januar 2017?

Løsningsforslag b)

I 2014 satte Eirik inn 25 000, og med en rente på $4,5\ \%$ blir beløpet i banken etter ett år lik $25\ 000\ \text{kr} \cdot 1,045 = 26\ 125\ \text{kr}$. Eirik setter inn 25 000 kroner på kontoen hvert år, så 1. januar 2015 har han

$$26125\ \text{kr} + 25\ 000\ \text{kr} = 51\ 125\ \text{kr}.$$

For å finne renteinntekten av dette på et år, multipliserer vi igjen med $1,045$. Den 1. januar 2016 setter Eirik igjen inn 25 000, og beløpet på kontoen blir

$$51\ 125\ \text{kr} \cdot 1,045 + 25\ 000 \approx 78\ 425,63\ \text{kr}.$$

Vi gjentar prosessen nok en gang, men 1. januar 2017 setter *ikke* Eirik inn 25 000. Dermed har han til slutt

$$78\ 425,63\ \text{kr} \cdot 1,045 \approx 81\ 954,78\ \text{kr}$$

i banken.

Svar: $\underline{\underline{81\ 954,78\ \text{kr}}}$.

c)
Eirik får et skattefradrag på 20 % av beløpet han setter inn på kontoen hvert år.

Vis at dette betyr at han til sammen betaler 15 000 kroner mindre i skatt i løpet av disse tre årene enn han ellers ville ha gjort.

Løsningsforslag c)

I tre år satt Eirik inn 25 000 kroner på kontoen. Vi regner ut at $20\ \%$ av dette er

$$25\ 000 \cdot 20\ \% = 25\ 000 \cdot \frac{1}{5} = 5\ 000.$$

Dette betyr at Eirik fikk $5\ 000\ \text{kr}$ i skattelette hvert år i de tre årene, til en totalsum på

$$3 \cdot 5\ 000\ \text{kr} = 15\ 000\ \text{kr}.$$

d)
Vis at når vi ser på renter og skattefradrag, «tjener» Eirik omtrent 448 % mer enn Arne ved å velge BSU framfor høyrentekonto.

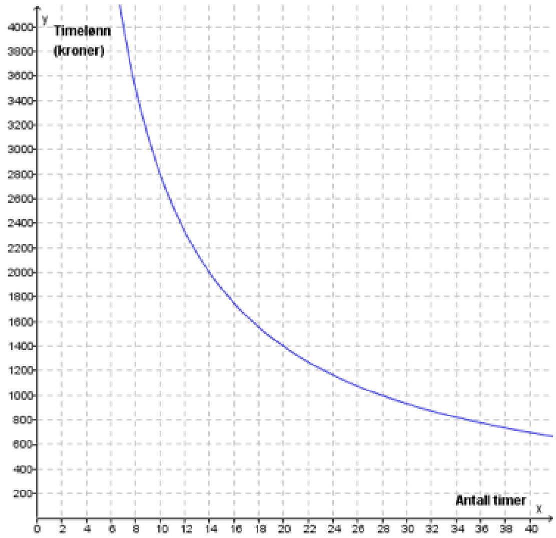
Løsningsforslag d)

Arne satte 75 000 kroner inn på kontoen, og innen 2017 hadde han $79\ 006,81\ \text{kr}$. Det er en fortjeneste på $79\ 006,81\ \text{kr} - 75\ 000\ \text{kr} = 4\ 006,81\ \text{kr}$. På den samme tiden hadde Eirik $81\ 954,78\ \text{kr}$ på kontoen, som er en fortjeneste på $81\ 954,78\ \text{kr} - 75\ 000\ \text{kr} = 6\ 954,78\ \text{kr}$. I tillegg slapp Eirik å betale $15\ 000\ \text{kr}$ i skatt, som gir en total "fortjeneste" på $6\ 954,87\ \text{kr} + 15\ 000\ \text{kr} = 21\ 954,87\ \text{kr}$. Dette er $21\ 954,78\ \text{kr} - 4\ 006,8\ \text{kr} = 17\ 948,06\ \text{kr}$ mer enn Arnes fortjeneste. I prosent "tjente" Eirik cirka

$$\frac{17\ 948,06\ \text{kr}}{4\ 006,81\ \text{kr}} \cdot 100\ \% \approx 448\ \%$$

mer enn Arne.

Oppgave 8 (2 poeng) Nettkode: E-4AOJ



Maler Jensen tilbyr en kunde en fast pris for å male et hus. Grafen ovenfor viser sammenhengen mellom antall timer Jensen bruker på jobben, og timelønnen han vil få.

Bestem Jensens timelønn dersom han bruker 64 timer på jobben.

Løsningsforslag

Vi må finne ut hvor mye Jensen tar betalt for å male et hus. Dette er en fast sum, og grafen i oppgaven representerer hvor høy timelønn Jensen i så fall ville tatt hvis det tok x timer å male huset. Vi kan finne denne faste summen ved å lese av et hvilket som helst punkt på grafen, og vi prøver å finne et punkt der det er lettest å lese av. Vi ser at grafen krysser ganske nøyaktig i punktet der $x = 14$ og $y = 2\,000$. Dette tolkes som at hvis Jensen hadde malt et hus på 14 timer, så hadde timeslønnen vært på 2 000 . Det betyr at den totale lønnen han fikk for arbeidet var

$$14 \text{ timer} \cdot 2\,000 \frac{\text{kroner}}{\text{timer}} = 28\,000 \text{ kr}.$$

Vi har nå funnet ut at den faste prisen Jensen tar for å male et hus er lik $28\,000$ kr, uansett om jobben tar 14 timer, 20 timer eller 64 timer. Hvis jobben tar 64 timer, så vil timeslønnen være på

$$\frac{28\,000 \text{ kr}}{64 \text{ timer}} = 437,5 \text{ kr/time}.$$

Svar: $\underline{\underline{437,5 \text{ kr/time}}}$.