

Forskjellige typer utvalg

Det skal deles ut tre pakker til en gruppe på seks. Pakkene inneholder en TV, en PC og en mobiltelefon. **På hvor mange måter kan pakkene deles ut?**

Utdelingen skal være *tilfeldig* – og ingen kan få mer enn en pakke. Alle seks har samme mulighet til å få en hvilken som helst av pakkene.

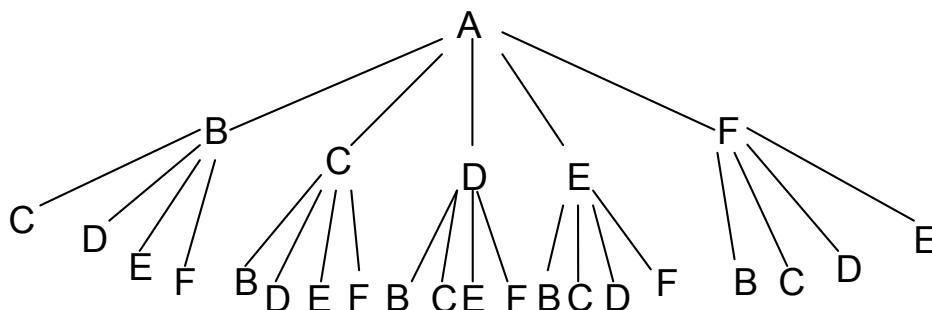
Tenk over spørsmålet – og prøv å finne løsningen før du leser videre.

Har du funnet løsningen?

Det er seks som kan få TV'en. Da er det fem som kan få PC'en. Og det er fire som kan få mobiltelefonen. Antall kombinasjoner blir $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Det er altså 120 forskjellige muligheter for fordeling. Hvordan vil et tredigram se ut?

Vi kaller personene A, B, C, D, E og F

Nedenfor ser du hvordan det blir dersom A får TV'en:



Du ser at dersom A får TV'en, er det 20 mulige kombinasjoner for utdeling. Tilsvarende antall får du dersom B, C, D, E eller F får TV'en.

Du må gjerne lage tredigram for alle hvis du gidder, men er du inne i tenkemåten, er det unødvendig.

Dette betyr at det er $6 \cdot 20 = 120$ kombinasjoner til sammen – som vi kan skrive som $6 \cdot 5 \cdot 4$.

Merk at her spiller det en rolle hvilken rekkefølge vi får. Hvis oppgaven var å trekke ut tre personer av seks, så spiller *ikke* rekkefølgen noen rolle.



Mulige sammensetninger:

ABC	ABD	ABE	ABF	ACD	ACE	ACF	ADE	ADF	AEF
BCD	BCE	BCF	BDE	BDF	BEF				
CDE	CDF	CEF							
DEF									

Vi ser at antall utvalg blir bare 20, altså sjetteparten i forhold til de 120 vi fikk her. (Skulle vi sammenlikne med pakkeutdeling, kunne vi si at det var tre helt like pakker, så det spilte ingen rolle hvilken du fikk.)

Nå lager vi oss først en viktig *definisjon*:

Utvalg som det med pakkene, kaller vi et *ordnet utvalg* fordi *ordningen*, eller rekkefølgen, *spiller en rolle*.

Når hver har mulighet for å få bare *en* pakke, sier vi at det *ikke* er tilbakelegging. *Har* en person fått en pakke, blir ikke denne personen med i neste trekning.

Vi har altså et:

Ordnet utvalg uten tilbakelegging.

En generell regel for slike utvalg blir da:

Dersom vi skal trekke o objekter fra en mengde på m elementer, og rekkefølgen spiller en rolle, er antall forskjellige utvalg gitt ved:

$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot$ der *antall faktorer blir* o .

Dette kan vi også skrive som $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-o+1)$.

Hvordan trekke inn sannsynlighet her? Hva er for eksempel sannsynligheten for at A, B og C er med sammen i et tilfeldig uttrukket utvalg – altså at alle de tre får (en eller annen) pakke? Og hva er sannsynligheten for at A og B er to av tre tilfeldige som får en pakke?

Og hva er sannsynligheten for at akkurat C får TV'en? Eller for at A får mobiltelefonen? Eller for at F får TV'en, D får PC'en og B får mobiltelefonen?

Klarer du å finne det ut ved å betrakte tredigrammet foran? Eller trenger du å tegne litt mer? Eller er det en lur måte å regne på – som vi kan *forklare* ut fra tredigram?

Neste utvalgstype:

Så ser vi nærmere på tilfellet der rekkefølgen *ikke* har betydning, som eksemplet øverst på side 2 når det trekkes tre av seks personer.

Hva om seks personer skulle sammen på en konsert der det kun var mulig å kjøpe to billetter hver?

Vi antar at tre av dem stiller seg i kø.

På hvor mange måter kan tre av de seks velges ut?



Vi ser at dette tilsvarer eksemplet på side 1 der vi skulle finne hvor mange forskjellige måter vi kunne trekke tre personer ut fra en mengde på seks.

Her spiller altså *ikke* rekkefølgen noen rolle. Vi skal bare se på hvor mange *forskjellige grupper* på tre personer det kan velges fra de seks.

Svaret vi kom fram til på side 2, var at det var 20 forskjellige muligheter.

Vi skal prøve å lage en enkel formel her også - som gjelder generelt - og som vi kan gi en logisk forklaring på.

Først en *definisjon*:

Siden rekkefølgen på personene *ikke* spiller noen rolle, sier vi at utvalget er *uordnet*.

De forskjellige personene i de alternative gruppene skal altså *ikke ordnes i forhold til hverandre*.

Så i motsetning til når det er et ordnet utvalg, vil vi her "miste" et visst antall. Tenk over hvordan vi kan forklare det!

Nå har du tenkt, så:

Vi har at

$ABC = ACB = BAC = BCA = CAB = CBA$. Og tilsvarende er
 $BCE = BEC = CBE = CEB = EBC = ECB$ og så videre.

Så her blir altså bare sjettedparten av det opprinnelige antallet igjen - og sjettedparten av 120 er 20, så det stemmer med det vi fant tidligere.

En annen måte å se det på, er at de tre som velges ut, kan ordnes på $3 \cdot 2 \cdot 1$ forskjellige måter. Siden $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, er det seks ganger så mange ordnede som uordnede utvalg.

Hva hvis vi skal velge ut to fra en mengde på fem? Hvor mange forskjellige utvalg kan vi da få dersom vi ser på ordnede utvalg (uten tilbakelegging)?

Prøv å finne det ut - både ved å tegne tredigram - og ved å stille det opp matematisk på en måte du kan forklare (gjerne ut fra tredigram).

Nå har du antagelig funnet det ut - og du har en god forklaring, så

Det blir $5 \cdot 4 = 20$ mulige sammensetninger.

Hvis utvalgene skal være uordnet slik som her - altså at rekkefølgen ikke spiller noen rolle - så blir $AB = BA$, $AC = CA$ og så videre, så vi "mister" altså halvparten av sammensetningene. Her må vi dividere med 2 i forhold til antall ordnede utvalg, og 2 kan vi skrive som $2 \cdot 1$.

Prøv selv å finne ut hvor mange måter du kan velge fire ut fra syv på - før du leser videre.



Antall *ordnede* utvalg blir $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$. *Da har altså rekkefølgen betydning.*

Skal vi finne antall *uordnede* utvalg, må vi finne ut hvor mange måter de fire kan ordnes på. Det er $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Altså finner vi antall uordnede utvalg ved å dividere 840 med 24.

Så antall *uordnede* utvalg når vi velger fire fra syv, blir trettifem.

Merk at vi *ikke* legger tilbake. *Er en person trukket ut, kan hun ikke trekkes en gang til.*

Nå er det lurt å gå tilbake og se om du har kontroll på hva som menes med ordnet og uordnet utvalg – og ikke minst sjekke at du kan forklare de beregningene som er gjort.

Da har du sjekket det, og vi går videre:

Skal vi trekke seks elementer fra ti – *og rekkefølgen ikke spiller noen rolle* – har vi i utgangspunktet $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ forskjellige utvalg, men siden utvalget er uordnet må vi dividere dette tallet med $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (som er antall måter seks elementer kan ordnes på).

Svaret kan du regne ut selv, men legg merke til at det er *et system som går igjen* her.

Ser du det ikke umiddelbart, så lag diverse alternativer selv.

Nå kan vi lage en generell *regel for*:

Uordnet utvalg uten tilbakelegging.

Dersom vi skal trekke o objekter fra en mengde på m elementer, og rekkefølgen ikke spiller noen rolle, er antall forskjellige utvalg gitt ved:

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-o+1)}{o!} \text{ som også kan skrives slik: } \binom{m}{o}$$

Lotto er et eksempel på uordnet utvalg uten tilbakelegging. Her skal det trekkes syv tall fra en mengde på trettifire tall – uten å legge tilbake. Hvor mange forskjellige lottorekker finnes det?

Prøv selv å finne ut hvor mange forskjellige uordnede utvalg det blir dersom du skal trekke ut tre personer fra fem i forhold til to fra fem. Hvordan vil du forklare resultatet? Og hva med fire fra fem i forhold til en fra fem? Bruk gjerne tredigram for å forklare. Og se gjerne på antall ordnede utvalg som utgangspunkt dersom du synes det gjør det enklere.

To utvalgstyper til:

Til nå har vi sett på utvalg der vi *ikke* legger tilbake. Hva så med utvalg *med* tilbakelegging?

For eksempel kan vi tenke oss et lotteri der det er mulig å vinne flere ganger på samme loddet – altså at det legges tilbake etter at det er trukket ut.



Et annet eksempel er tippekupong. Der er det 12 kamper, og i hver kamp kan det bli enten H eller U eller B. Det er altså tre mulige resultater i første kamp. Så legger vi tilbake og ”trekker” igjen - det vil si vi ”trekker” med de samme alternativene *en gang til*. Hvor mange mulige sammensetninger av resultater er det for de to første kampene? Og hva med de *tre første*? Lag et tredigram og sjekk at du har rett i antakelsen din.

Hvor mange forskjellige tipperekker finnes det – når det er 12 kamper?
Så hvor mange rekker må vi levere for å være garantert gevinst?

Tenk gjennom hva som menes med at utvalgene her er *ordnet* og at de er *med tilbakelegging*.

Hva hvis tippekupongen hadde bestått av ti kamper og det bare var to alternative utfall – enten H eller U?

Og hva om det hadde vært ti kamper med *fire* mulige utfall (det fjerde kunne for eksempel ha vært A for avlyst)? Hvor mange alternative utfall ville det da ha vært?

Du fant antagelig ut at når vi har en ”vanlig” tippekupong, er det ni mulige kombinasjoner i de to første kampene – altså 3^2 . Ved tolv kamper blir det 3^{12} muligheter. (Så det blir dyrt å skulle sikre seg å få 12 rette.)

Kaster vi et pengestykke, kan vi få *enten* kron (K) *eller* mynt (M). Vi ser da bort fra muligheten for at det blir liggende på høykant. Kaster vi to ganger, kan vi få enten K eller M første gang og enten K eller M andre gang. Antall mulige resultater for de to gangene vil være KK, KM, MK eller MM - altså fire muligheter. Hva om vi kaster åtte ganger? Eller n ganger? Vi får hele tiden en potens med grunntall lik antall mulige resultater i hvert forsøk – og eksponent lik antall forsøk. (Sjekk at det stemmer også i tilfellet med tippekupongen.)

Vi kan formulere det som at vi trekker fra en mengde med et visst antall mulige utfall (eller resultater): tippekupong tre – H, U eller B og myntkast to – K eller M.

Vi gjør trekkingen et visst antall ganger, og vi har de samme alternativene i hver trekning, det vil si at vi ”legger tilbake” mellom hver trekning.

Lar vi nå antall mulige resultater være N og antall trekninger være n, kan vi lage en generell *regel* for:

Ordnet utvalg med tilbakelegging:

Dersom vi trekker n ganger fra en mengde på N, vil antall mulige forskjellige resultater bli N^n .

Så til det ”siste” utvalget.

Til nå har vi sett på *tre* forskjellige typer utvalg.

Vi *kan* også ta med et fjerde – som vi kaller:

Uordnet utvalg med tilbakelegging.



Vi tenker oss et par som vil ha tre barn. De kan da få tre jenter, tre gutter, ei jente og to gutter, to jenter og en gutt.

I dette eksemplet lar vi altså ikke rekkefølgen spille noen rolle, så da har vi et *uordnet* utvalg.

Vi trekker ut fra de samme alternativene hver gang, så da er det *med tilbakelegging*.

Dersom vi teller opp antall mulige utfall, ser vi at det blir *fire*.

Men disse utfallene har *ikke samme sannsynlighet* for å inntreffe. For eksempel kan tre jenter fås på bare en måte: nemlig JJJ. Hva med to jenter og en gutt – eller to gutter og ei jente – eller tre gutter? (Tenk over det før du går videre.)

Forhåpentligvis fant du at to jenter og en gutt kan fås på flere måter: JJG, JGJ, GJJ. Så det er tre ganger så stor sjanse for å få to jenter og en gutt som for å få tre jenter.

Og hva med de andre utfallene?

Merk at dersom vi hadde spurt om *rekkefølgen* – for eksempel først jente, så gutt og til slutt jente, så ville det vært et *ordnet* utvalg. (Hvilken betydning ville det ha hatt for beregning av sannsynlighet?)

Siden du sikkert allerede har funnet ut sjansene for de forskjellige utfallene det ble spurt om ovenfor, kan vi jo sette opp alle mulighetene, så kan du kontrollere at det du fant ut, stemmer.

Ved 3 jenter blir rekkefølgen.	JJJ
Ved 2 jenter og en gutt kan det være:	JJG, JGJ, GJJ
Ved ei jente og 2 gutter:	GGJ, GJG, JGG
Ved 3 gutter:	GGG

Vi kan relativt greit finne antall forskjellige utfall, men vil se at de forskjellige utfallene har ulik sannsynlighet for å inntreffe.

Forresten finnes det også en formel slik at vi kan kontrollere at vi har funnet riktig antall uordede utvalg med tilbakelegging. Den forteller oss at antallet er gitt ved (når er n mengden vi trekker fra og

k antall ganger vi trekker):
$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{2+3-1}{3} = \binom{4}{3} = 4.$$

Sammenlikn skrivemåten med det vi satte opp da vi så på uordnet utvalg *uten* tilbakelegging.

Ovenfor ser vi at det er fire forskjellige muligheter når utvalget skal være uordnet. Teller vi antall sammensetninger, finner vi åtte. Av disse er det bare *en* som gir tre jenter og *en* som gir tre gutter, mens det er tre sammensetninger som gir to jenter og en gutt og tre som gir ei jente og to gutter.



Vi kan sette opp sannsynlighetene slik:

$$P(\text{tre jenter}) = \frac{1}{8}$$

$$P(\text{tre jenter og en gutt}) = \frac{3}{8}$$

Og så videre. (Hva blir svaret hvis du legger sammen alle sannsynlighetene?)

Du kan også gjerne vise resultatene ved tredigram.

Og hvordan ville det vært dersom paret ville ha *fire* barn – eller *enda flere*?

Så sammenlikner vi det vi har sett på ovenfor, med *ordnet utvalg med tilbakelegging*.

Da er vi interessert i hvor mange mulige *enkeltutfall* det er til sammen - og sannsynligheten for at *et spesielt* skal inntreffe. Bruker vi formelen for ordnet utvalg med tilbakelegging, får vi 2^3 – altså 8 muligheter. Og hver av disse har *samme* sjanse for å inntreffe. Så det er $\frac{1}{8}$ sjanse for hver.

Hvis vi derimot betraktet det som et *uordnet utvalg*, hadde vi fire muligheter - og de har ganske forskjellig sjanse for å inntreffe.

Som en øvelse bør du gå tilbake til tippekupongen der vi hadde tre mulige utfall H, U og B. Ta for deg de to første kampene, og tenk på det som et *uordnet utvalg*. Hvor mange forskjellige utfall er det – når rekkefølgen mellom H, U og B ikke spiller noen rolle (altså at HU er det samme som UH og så videre)? Hvor stor sannsynlighet er det for at hvert av de forskjellige utfallene skal inntreffe?

Sammenlikn deretter resultatet med det du får dersom du betrakter det som ordnet utvalg med tilbakelegging.

Hvilket resultat kom du til?